

# LAGRANGIANO PARA *QCD* A BAJAS ENERGÍAS

John Morales<sup>1,\*</sup> y Germán Sinuco<sup>2,†</sup>

<sup>1</sup> Centro Internacional de Física, Bogotá, Colombia.

<sup>2</sup> Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

## Resumen

Al comparar las constantes de acoplamiento asociadas a la Electrodinámica Cuántica y a la Cromodinámica Cuántica, se observa la imposibilidad de utilizar métodos perturbativos para la descripción de la interacción fuerte a bajas energías. Esto justifica la búsqueda de otros planteamientos que permitan calcular propiedades de los sistemas hadrónicos. En este trabajo se presenta la construcción del Lagrangiano Efectivo de interacción de menor orden, útil para la descripción de procesos mesón- $\pi$  - Nucleón para energías  $< 1,0$  GeV.

**Palabras claves:** Cromodinámica cuántica, teorías efectivas

## Abstract

Comparing the behavior of the coupling constants for the Quantum Electrodynamics and the Quantum Chromodynamics we observe the impossibility to use perturbative methods to describe the strong interaction at low energies. This give us a good reason for explore other procedures in order to calculate properties of hadronic systems. In this work we present how construct an effective interaction lagrangian of smaller order, useful to describe processes  $\pi$  mesons-Nucleon with energy less than 1,0 GeV.

\*: johnmo@ciencias.ciencias.unal.edu.co

†: gas@estudiantes.fisica.unal.edu.co

Ciudad Universitaria, Bogotá, D.C., Colombia

Tel.: +57 1 3165215; Fax: +57 1 3165669

## 1. INTRODUCCIÓN

El Modelo Estándar (ME) de las interacciones fuerte y electrodébil ha superado hasta ahora todas las verificaciones experimentales a las que ha sido sometido, aunque de los tres sectores que conforman este modelo: el de las interacciones fuertes (Cromodinámica Cuántica  $QCD$ ), el electrodébil y el sector de ruptura espontánea de simetría, sólo los dos primeros son realmente conocidos y han sido verificados experimentalmente.

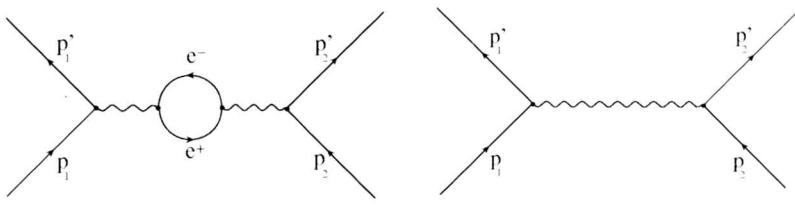
La interacción fuerte es descrita por una teoría de calibración (gauge) no-abeliana y por lo tanto presenta *libertad asintótica* (Sección 3). Este fenómeno impide la utilización de un esquema perturbativo de cálculo para procesos que involucren momentos transferidos  $< 1,0$  GeV, por lo tanto es necesario utilizar otras técnicas como las teorías efectivas cuya construcción se basa en las propiedades de simetría de la  $QCD$  y del espectro de partículas que se desea estudiar (Sec. 4).

Con el objetivo de aclarar el concepto de libertad asintótica, en la sección 2 mostramos como evoluciona la constante de acoplamiento para  $QED$ , observándose que la carga eléctrica es apantallada por la polarización del vacío, por lo tanto si nos alejamos de la partícula (disminuimos la energía), su carga eléctrica efectiva disminuye. En la sección 3 presentamos el caso de  $QCD$  donde el efecto de la polarización del vacío es totalmente contrario: al alejarse del quark (al disminuir energía) la intensidad de la interacción aumenta impidiendo aplicar la teoría de perturbaciones. En la sección 4 presentamos el concepto de Teoría Efectiva. En las secciones 5 y 6 se presenta la construcción del Lagrangiano Efectivo de Interacción para los hadrones más ligeros: mesones- $\pi$  y Nucleones. Finalmente, en la sección 7 presentamos las conclusiones generales.

## 2. EVOLUCIÓN DE LA CONSTANTE DE ACOPLAMIENTO PARA $QED$ ( $\alpha_{QED}$ )

En el caso de la  $QED$ , descrita por una teoría de calibración Abeliana [1, 2, 3], es imposible observar libertad asintótica ya que el vacío actúa como un dieléctrico que apantalla la carga eléctrica. Es

possible observar esto mediante la consideración de la dispersión de un electrón por otro. A orden más bajo en la constante de acoplamiento electrónica,  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$ , este proceso es descrito por el intercambio de un fotón representado por el diagrama de Feynmann (Figura 1b.). Si la dispersión tiene lugar a energías suficientemente altas, diagramas de orden superior contribuyen fuertemente a la dispersión (Figura 1a.).



a. Diagrama con un loop.

b. Diagrama a nivel árbol para la dispersión de dos partículas cargadas

FIGURA 1. Diagramas de orden  $\alpha$  y  $\alpha^2$  para la dispersión de partículas cargadas.

Este último diagrama corresponde a los llamados diagramas de *polarización del vacío*, en los cuales las líneas fotónicas contienen loops de electrón-positrón. Los pares virtuales  $e^-e^+$  son polarizados por el campo eléctrico de la carga, haciendo que el vacío se comporte como un medio dieléctrico y la carga presente una apantallamiento debido a efectos de polarización. Los pares electrón-positrón apanallan la carga original del electrón (Figura 2).

Para momentos transferidos altos ( $Q^2 >> 4m_e^2$ ), es decir, para pequeñas separaciones de las cargas, el electrón dispersado penetra en la nube de apantallamiento de pares  $e^-e^+$  y observa una carga efectiva mayor con respecto al valor para momentos transferidos pequeños. De este simple argumento nació un cálculo explícito en el cual se adicionan todas las posibles contribuciones de los diferentes diagramas y así se obtiene una nueva constante de acoplamiento “Renormalizada”  $e$ , relacionada con la constante de acoplamiento desnuda  $e_0$  por: [1, 2, 3, 4, 5]

$$e = \frac{Z_2 \sqrt{Z_3}}{Z_1} e_0, \quad (1)$$

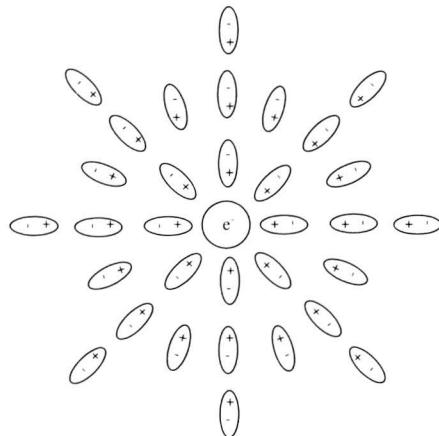


FIGURA 2. Efecto de apantallamiento de la carga eléctrica debido a la polarización del vacío.

donde  $Z_2^{1/2}$  y  $Z_3^{1/2}$  son las constantes de renormalización para los campos fermiónico y bosónico respectivamente. La constante  $Z_2$  se obtiene de los diagramas a un lazo que contribuyen al propagador fermiónico,  $Z_3$  es la constante que proviene de los lazos que corri- gen al propagador fotónico y la constante  $Z_1$  es la contribución del vértice fermión-fotón.

Como resultado de la renormalización, asociada a los lazos de fermiones en el propagador del fotón (figura 1), se define la constante de acoplamiento  $e$  como un parámetro que depende del momentum transferido:

$$e^2(Q^2) = \frac{e^2(\mu^2)}{1 - \frac{e^2(\mu^2)}{12\pi^2} \log\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)}, \quad (2)$$

donde  $e^2(\mu^2)$  es el valor de la constante de acoplamiento para un cierto valor de referencia del momento  $\mu$ , que puede ser la masa del electrón  $m$ . En esta expresión se observa que  $e$  se incrementa cuando el momento transferido es grande, es decir, para distancias pequeñas desde la carga (Figura 3). Teniendo  $\alpha_{QED}(Q^2) = \frac{e^2(Q^2)}{4\pi}$  se obtiene

$$\alpha_{QED}(Q^2) = \frac{\alpha(m^2)}{1 - \frac{\alpha(m^2)}{3\pi} \log\left(\frac{Q^2}{m^2}\right)}. \quad (3)$$

Debido a que  $\frac{e^2}{12\pi^2} \sim 10^{-3}$  estos efectos de polarización del vacío son pequeños, no obstante es posible calcularlos y medirlos con gran precisión en fenómenos de la física atómica (Efecto Cassimir) [6].

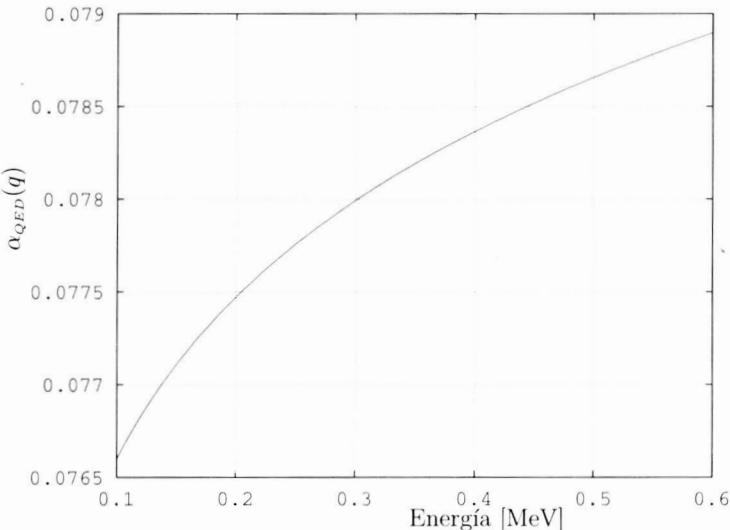


FIGURA 3. Dependencia de la constante de estructura fina para QED

### 3. EVOLUCIÓN DE LA CONSTANTE DE ACOPLAMIENTO PARA QCD ( $\alpha_{QCD}$ )

La *QCD* es la teoría que describe la interacción fuerte entre los quarks y gluones a través de una teoría de calibración no abeliana  $SU(N_c)$ , siendo  $N_c$  el número de colores, el mundo real corresponde a  $N_c = 3$ . El lagrangiano que describe esta teoría, en términos de los grados de libertad: quarks y gluones, está dado por:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\psi}_f (i \not{D} - \mathcal{M}_f) \psi_f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^j F_j^{\mu\nu}, \quad (4)$$

donde  $\psi_f$  es un vector columna que representa el campo de los quarks en los espacios de color y sabor,  $\mathcal{M}_f$  es la matriz de masa de los quarks en el espacio de sabores dada por  $\mathcal{M} = \text{diag}(m_1, \dots, m_{n_f})$  y la derivada covariante es

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + \frac{i}{2}g\lambda_l A_\mu^l \\ D &\equiv \gamma^\mu D_\mu. \end{aligned} \quad (5)$$

$\lambda_l$  denota las matrices  $SU(3)$  de Gell-Mann,  $A_\mu^l$  son los campos gluónicos con  $l = 1, 2, 3, \dots, 8$  y  $g$  es la constante de acoplamiento de la interacción fuerte. El tensor de campo gluónico no abeliano es definido de la siguiente forma:

$$F_{\mu\nu}^j = \partial_\mu A_\nu^j - \partial_\nu A_\mu^j - g f_{jkl} A_\mu^k A_\nu^l, \quad (6)$$

siendo  $f_{jkl}$  las constantes de estructura del grupo  $SU(3)$ .

Usando las reglas de Feynmann asociadas al lagrangiano ec.(4) se observa que los diagramas con un lazo fermiónicos son análogos a los de la  $QED$  (figura 4a.). Sin embargo, efectos adicionales aparecen debido a la interacción entre los bosones de calibración, lo cual es una consecuencia del carácter no-abeliano de la teoría. Estas interacciones entre los bosones de calibración (gluones), causan lazos en el propagador bosónico (Figura 4b., 4c.) y conducen a contribuciones a la constante de acoplamiento de signo opuesto a las provenientes del lazo fermiónico [1], originando un efecto de antiapantallamiento.

Si el número de bosones de calibración es suficientemente grande, entonces el efecto de antiapantallamiento debido al lazo de bosones en el propagador, predomina sobre el lazo de fermiones y la teoría es totalmente antiapantallante. En tal caso la constante de acoplamiento disminuye con el decrecimiento de la distancia, es decir, incrementando el momento transferido. Por tanto, los fermiones aparecen como partículas no-interactuantes a distancias pequeñas entre partículas.

Pictóricamente hablando, como el cuadro del campo de calibración de una teoría no-abeliana es portador de carga (el gluón tiene

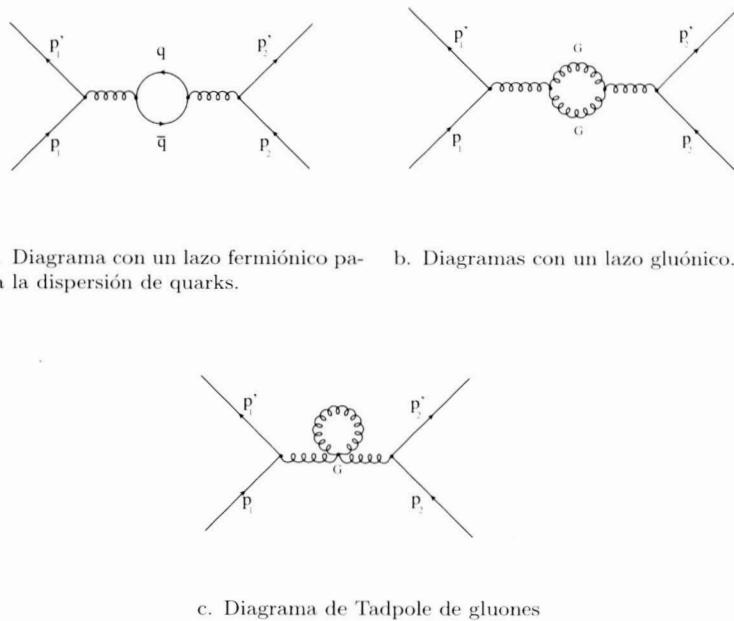


FIGURA 4. Diagramas de orden  $\alpha^2$  para la dispersión de partículas con carga de color.

carga de color), los quarks pueden distribuir su carga sobre la nube de bosones de calibración. Por tanto, la carga entera puede ser vista únicamente desde grandes distancias, implicando una constante de acoplamiento grande a distancias grandes. Esta propiedad es conocida como *Libertad Asintótica*.

Para mayor claridad, veamos como evoluciona con el momentum transferido la constante de acoplamiento para *QCD* [7]. Los diagramas a un lazo, Fig. 1a., calculados con las reglas de Feynmann asociadas al lagrangiano (4) conducen a infinitos y deben ser absorbidos por renormalización de los campos y la constante de acoplamiento. Concentrándonos en el caso de  $g_s$ , tenemos que la relación entre la constante de acoplamiento desnuda  $g_s^0$  y la renormalizada  $g_s$  puede ser escrita como:

$$g_s = Z_1^{-1} Z_2 Z_3^{1/2} g_s^0, \quad (7)$$

donde  $Z_2^{1/2}$  y  $Z_3^{1/2}$  son las constantes de renormalización para los campos quark  $\psi$  y gluónicos  $A_\mu^l$  respectivamente. La constante  $Z_2$  puede ser calculada de los diagramas que contribuyen al propagador del quark, mientras que la constante  $Z_3$  proviene de los diagramas correspondientes al propagador del gluón. Además,  $Z_1$  es obtenido de los diagramas que contribuyen al vértice gluón-quark. En consecuencia, la evolución con la energía de la constante de acoplamiento para  $QCD$  toma la siguiente forma [7]:

$$\alpha_s(q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \log \left( \frac{q^2}{\Lambda_{QCD}^2} \right)}, \quad (8)$$

donde  $\alpha_s = \frac{g_s}{4\pi}$ , con  $\mu$  la escala de renormalización y  $N_f$  es el número de quarks cuya masa es menor que  $q$ . Escrita de esta manera, la evolución de la constante de acoplamiento con la escala sólo depende de un parámetro  $\Lambda_{QCD}$ , conocido como la escala de  $QCD$  definida en términos de  $\mu$  y  $\alpha_s(\mu^2)$  a través de:

$$\log \Lambda_{QCD}^2 = \log \mu^2 - \frac{12\pi}{\alpha_s(\mu^2)(33 - 2N_f)}, \quad (9)$$

donde  $\alpha_s(\mu)$  es el valor de la constante de acoplamiento de la interacción fuerte para un momento de referencia  $\mu$ . Ahora, reemplazando la ec.(9) en la ec.(8) se obtiene:

$$\alpha_s(q^2) = \frac{\alpha_s(\mu)}{1 + \left( \frac{\alpha_s(\mu)}{12\pi} \right) (33 - 2N_f) \log \left( \frac{q^2}{\mu^2} \right)}. \quad (10)$$

En el factor  $(33 - 2N_f)$ , el primer término proviene de los lazos de gluones, mientras que el segundo se origina en lazos de fermiones, resultado completamente diferente al que se obtiene en la Electrodinámica Cuántica, pues allí no se tienen lazos de fotones. De la ec.(10) podemos observar que la constante de acoplamiento  $\alpha_s(q^2)$  tiende a cero para valores de  $q^2$  grandes (Figura 5); este fenómeno es conocido como *Libertad Asintótica*. Por otro lado, el crecimiento de  $\alpha_s(q^2)$  para grandes distancias indica que la separación de

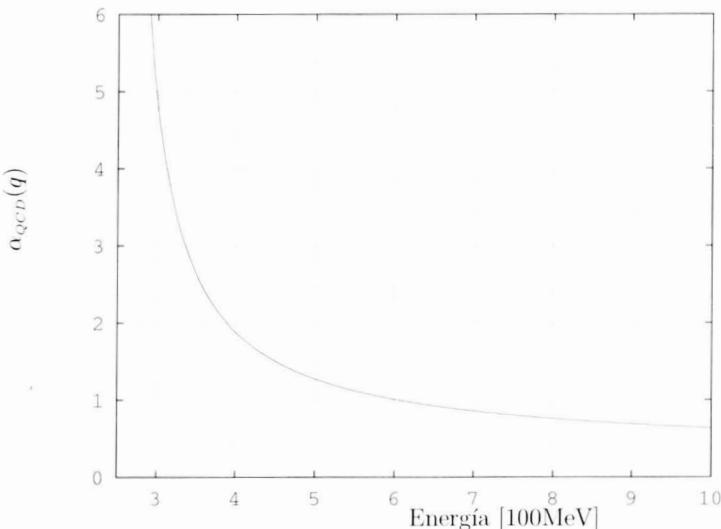


FIGURA 5. Dependencia de la constante de estructura para QCD

las fuentes de color no puede ocurrir a menos que una cantidad infinita de energía sea suministrada al sistema. Esta propiedad se llama *Confinamiento* y esta de acuerdo con la ausencia de estados asintóticos de quarks y gluones libres, ellos se encuentran confinados en hadrones como el protón, el neutrón, los mesones- $\pi$ , etc.

Ya que para grandes distancias ( $q^2$  pequeños) la constante de acoplamiento de la *QCD* es grande, los métodos perturbativos fallan a la hora de reproducir las características esenciales del mundo hadrónico a baja energía, tales como el espectro de estados. Para evitar este problema y poder estudiar las propiedades de la teoría a grandes distancias es necesario discutir nuevos métodos de cálculo no perturbativo como *Teorías Efectivas*, *Teorías en la red* o *Métodos de Montecarlo*.

#### 4. TEORÍAS EFECTIVAS

En el estudio de sistemas físicos es importante determinar las limitaciones de los modelos propuestos para describirlos. Es así como la escala de energía, la cantidad de cuerpos interactuantes, la intensi-

dad de la interacción, etc. hacen parte esencial ellas. El propósito de una Teoría de Campos Efectiva es describir la dinámica de un sistema para energías inferiores a una escala dada  $\Lambda$  en donde los efectos presentes a energías superiores están incluidos a través de constantes de acoplamiento, términos de interacción ó restricciones de simetría.

Con una teoría efectiva se describe la dinámica de sistemas físicos a bajas energías sin conocer los detalles de la dinámica a alta energía, en términos de constantes de acoplamiento que pueden ser calculadas a partir de consideraciones más fundamentales ó determinadas fenomenológicamente. Esto implica que los únicos efectos de la dinámica a altas energías son modificaciones en las constantes de acoplamiento y en la imposición de simetrías sobre la teoría a bajas energías. Por ejemplo; la interacción débil a bajas energías está descrita por una interacción puntual caracterizada por la constante de Fermi  $G_F$ , pero para procesos que involucren energías del orden de  $100\,GeV$  es necesario incluir en la teoría los campos de calibración  $W$  y  $Z$ .

Si incrementamos la energía involucrada en los procesos, nuevos grados de libertad serán relevantes y deben incluirse en la teoría, al mismo tiempo, otros campos pierden su estatus de fundamentales identificándose ahora como estados acotados de los nuevos grados de libertad. Si ahora la energía de los procesos se disminuye algunos grados de libertad desaparecen del espectro de estados accesible. De acuerdo con esto, una teoría efectiva está caracterizada por un conjunto de estados asintóticos que corresponden a los campos relevantes en la interacción y cierta escala de energía  $\Lambda$ , más allá de la cual es necesario utilizar una teoría más fundamental [8].

Para construir una teoría efectiva será necesario determinar las simetrías de la teoría fundamental y el *Lagrangiano Efectivo* de la teoría será aquel que incluya todos los términos que satisfagan las restricciones impuestas por la simetría, con parámetros libres para ser ajustados, es decir:

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_i C_i \mathcal{O}_i, \quad (11)$$

donde  $C_i$  son constantes de acoplamiento y  $\mathcal{O}_i$  corresponde a opera-

dores construidos con los campos asociados a los grados de libertad del sistema tales que satisfacen las simetrías impuestas. Las constantes de acoplamiento  $C_i$  se determinan ajustando las predicciones teóricas con los resultados experimentales; en ellas están contenidos todos los efectos asociados a las partículas cuya masa es mayor a la escala de energía en consideración. Uno de los puntos de mayor importancia en la construcción de una Teoría Efectiva es la determinación de estas cantidades y sus correcciones[15].

## 5. QCD A BAJAS ENERGÍAS

Los grados de libertad relevantes a bajas energías corresponden a las partículas más ligeras; si consideramos procesos en los cuales únicamente sea relevante la existencia de los quarks  $u$  y  $d$  estas partículas son los mesones- $\pi$ . Para describir su dinámica es necesario determinar como se manifiestan las simetrías de la QCD con dos quarks a bajas energías [10].

En el límite de masa nula<sup>1</sup>, el lagrangiano de QCD:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QCD} &= \bar{q}(i\gamma_\mu \mathcal{D}^\mu - \mathcal{M})q - \frac{1}{4}\mathcal{G}_{\mu\nu}^a \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \\ \mathcal{D}^\mu &= \partial_\mu - ig_s \mathcal{G}_\mu^a \frac{\lambda_a}{2} \\ \mathcal{G}_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu \mathcal{G}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{G}_\mu^a + g_s f^{abc} \mathcal{G}_\mu^b \mathcal{G}_\nu^c,\end{aligned}\quad (12)$$

es invariante bajo transformaciones del grupo  $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ . Consideremos únicamente el caso de dos quarks ( $u, d$ ). Las componentes derecha e izquierda de los campos transforman según:

$$\begin{aligned}q_L &\rightarrow L q_L \\ q_R &\rightarrow R q_R,\end{aligned}\quad (13)$$

donde

$$q_i = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}. \quad (14)$$

---

<sup>1</sup>El lagrangiano y el hamiltoniano correspondientes a la teoría que describe quarks sin masa se denotan con un superíndice 0:  $\mathcal{L}^0, \mathcal{H}^0$

Asociadas a esta simetría, existen dos corrientes que se conservan:

$$\begin{aligned} J_\mu^i &= \bar{q} \gamma_\mu T^i q \\ J_\mu^{5i} &= \bar{q} \gamma_\mu \gamma^5 T^i q, \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $T^a$  son los generadores de  $SU(2)$ . A cada corriente corresponde una carga que se conservan, i. e., commuta con el hamiltoniano:

$$[\mathcal{Q}^a, \mathcal{H}^0] = [\mathcal{Q}^{5a}, \mathcal{H}^0] = 0. \quad (16)$$

Por otro lado el espectro de partículas puede ser organizado en multipletes de isoespín  $SU(2)_{L+R}$ : Los mesones- $\pi$  ( $\pi^+ \pi^- \pi^0$ ) son miembros de un triplete de isoespín  $I = 1$  con  $m_{\pi^\pm} \sim m_{\pi^0}$  y los Nucleones (protón y neutrón) pertenecen a un doblete de isoespín total  $I = 1/2$ . Estamos ante un esquema de rompimiento espontáneo de la simetría  $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_{L+R}$ . Por razones dinámicas, el estado más importante -el vacío- solamente es simétrico bajo rotaciones de isoespín pero no cuando se aplican transformaciones quirales. El hecho de que las cargas axiales commutan con el hamiltoniano implica la existencia de estados propios con la misma energía del estado de vacío:

$$\mathcal{H}^0 \mathcal{Q}^{5a} |VAC\rangle = \mathcal{Q}^{5a} \mathcal{H}^0 |VAC\rangle = 0. \quad (17)$$

Así en el espectro se deben encontrar estados  $\mathcal{Q}^{5a} |VAC\rangle$ ,  $a = 1, 2, 3$  que describen partículas de masa nula, estos son los llamados Bosones de Goldstone<sup>2</sup> asociados al rompimiento espontáneo y se identifican con los mesones- $\pi$  [11].

Recordemos que hemos considerado la masa de los quarks igual a cero. En este límite el esquema de rompimiento espontáneo es exacto. Como en realidad la masa de los quarks es distinta de cero ( $m_q \neq 0$ ) esta descripción es solo aproximada, lo que se refleja en el hecho de que los mesones- $\pi$  son masivos. Al incluir términos de masa en el lagrangiano de QCD tenemos un rompimiento explícito

<sup>2</sup>El esquema de rompimiento espontáneo de la simetría permite explicar dos hechos: (i) Los estados pueden organizarse en multipletes de isoespín. (ii) La masa de los mesones- $\pi$  ( $m_\pi \sim 140$  MeV) es mucho menor que la de los demás hadrones ( $\sim 1.0$  GeV)

de la simetría quiral y como consecuencia los bosones de Goldstone adquieren masa, en este caso dada por:

$$\begin{aligned} m_{\pi^\pm}^2 &= (m_u + m_d)B_0 + \mathcal{O}(m^2) \\ B_0 &= \frac{1}{F_0} \left| \langle VAC | \bar{u}u | VAC \rangle \right|, \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $B_0$  corresponde al valor esperado para el condensado de quarks [12]. Una vez estudiadas las simetrías de la interacción fuerte y su realización se puede construir el lagrangiano efectivo en términos de los campos relevantes.

## 6. LAGRANGIANO EFECTIVO DE LA QCD

Para construir la teoría efectiva que describe QCD a bajas energías se deben involucrar los siguientes elementos [13]:

1. Los grados de libertad deben corresponder explícitamente al espectro de partículas (hadrones) observados a bajas energías. De esta manera los grados de libertad asociados a quarks y gluones deben cambiarse por un conjunto de campos  $\pi$  que describen los grados de libertad asociados a los bosones de Goldstone. Es conveniente parametrizarlos en una matriz  $2 \times 2$ :

$$U(x) = \exp \left( \frac{i\tau^a \pi^a}{f_\pi} \right), \quad (19)$$

donde  $\tau^a$  corresponde a las matrices de Pauli y  $f_\pi$  es la constante de decaimiento de los mesones- $\pi$ .

2. El lagrangiano de QCD es reemplazado por un lagrangiano efectivo el cual solo involucra el campo  $U(x)$  y sus derivadas

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}_{eff}(U, \partial U, \partial^2 U, \dots). \quad (20)$$

3. El lagrangiano efectivo se puede organizar de acuerdo con el número de derivadas del campo  $U(x)$ . Invarianza Lorentz solo permite términos con un número par de derivadas:

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{eff}^2 + \mathcal{L}_{eff}^4 + \mathcal{L}_{eff}^6 + \dots, \quad (21)$$

donde el superíndice indica la cantidad de derivadas.

4. La simetría quiral excluye vértices de interacción independientes del momentum. Esta propiedad es esencial para la consistencia del análisis a bajas energías ya que el momentum corresponde al parámetro perturbativo.

De esta manera considerando solamente términos con dos derivadas, el lagrangiano está totalmente determinado por la constante de decaimiento de los mesones- $\pi$ :

$$\mathcal{L}_{eff}^2 = \frac{1}{4} f_\pi^2 \operatorname{tr} \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu u. \quad (22)$$

Este lagrangiano describe partículas de masa nula, pero la simetría quiral también es rota explícitamente por la matriz de masa de los quarks, por lo tanto es necesario introducir un lagrangiano de masa que respete la simetría de isoespín. El término de menor orden proporcional a  $\mathcal{M}$  que puede ser incluido en el lagrangiano es:

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} f_\pi^2 B_0 \operatorname{tr} \mathcal{M}(U + U^\dagger). \quad (23)$$

Para obtener los vértices de interacción y estudiar la dinámica de los mesones- $\pi$  el lagrangiano  $\mathcal{L}_{eff}^2 + \mathcal{L}_m$ , se expande en potencias de los campos  $\pi$ . A segundo orden de esta expansión se obtienen vértices de cuatro mesones- $\pi$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pi\pi}^2 = & \frac{1}{2} \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi + \frac{1}{6f_\pi^2} [(\pi \partial_\mu \pi)^2 - \pi^2 (\partial_\mu \pi \partial^\mu \pi)] \\ & - \frac{m_\pi^2}{2} \pi^2 + \frac{m_\pi^2}{24f_\pi^2} \pi^4 \end{aligned} \quad (24)$$

### 6.1. Conteo de Potencias

En general las teorías efectivas no son renormalizables en el sentido usual sino orden por orden y así tienen un poder predictivo limitado [14, 15, 16].

Consideremos un proceso general que involucre un número arbitrario de mesones- $\pi$  en los estados inicial y final. Supongamos que sus momentos son de orden  $Q \ll 1,0 \text{ GeV}$ . Con el lagrangiano

obtenido podemos desarrollar teoría de perturbaciones como una expansión en serie de potencias de  $Q$ .

Cada derivada en cada vértice de interacción contribuye con un factor  $Q$  al orden de magnitud del diagrama, cada línea interna contribuye con un factor  $Q^{-2}$ , cada integración  $d^4q$  asociada a lazos contribuye con un factor  $Q^4$ , así un diagrama conectado será de orden  $Q^\nu$ , con:

$$\nu = \sum_i V_i d_i - 2I + 4L, \quad (25)$$

donde  $d_i$  es el número de derivadas en la interacción  $i$ -ésima,  $V_i$  es el número de vértices de tipo  $i$  en el diagrama,  $I$  el número de líneas internas y  $L$  el número de lazos. Estas cantidades están relacionadas por la identidad:

$$L = I - \sum_i V_i + 1. \quad (26)$$

De esta manera:

$$\nu = \sum_i V_i (d_i - 2) + 2L + 2. \quad (27)$$

Como resultado solamente son necesarios un número finito de términos en el lagrangiano efectivo para obtener resultados a un orden determinado en  $Q$ , de tal manera que el lagrangiano actúa como una teoría renormalizable. Por ejemplo, para calcular las amplitudes de dispersión de orden 4, debemos considerar diagramas tales que:

$$4 = 2 + 2L + \sum_i V_i (d_i - 2), \quad (28)$$

condición que se satisface si  $L = 0, V_4 = 1, V_{\geq 4} = 0$  ó  $L = 1$  y  $m_{k>2} = 0$ , es decir, solamente es necesario considerar diagramas a nivel árbol originados en  $\mathcal{L}_{eff}^4$  y diagramas de un lazo originados en  $\mathcal{L}_{eff}^2$  para calcular la amplitud a orden 4.

El cálculo del diagrama con un lazo da origen a una divergencia que puede ser removida por renormalización de la constante de acoplamiento de un término asociado a  $\mathcal{L}_{\pi\pi}^4$ . Este procedimiento de renormalización de la teoría orden por orden es característico de las teorías efectivas y permite, para un orden fijo  $\nu$ , que la teoría se comporte como una renormalizable [17].

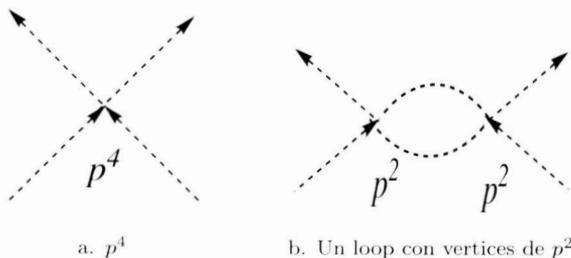


FIGURA 6. Diagramas para un cálculo a orden  $p^4$

## 7. CONCLUSIONES

El conocimiento que se tiene sobre el tratamiento perturbativo de las distintas interacciones del ME no es igual para la interacción electrodébil que para la fuerte. Para esta última, sabemos que la existencia de libertad asintótica permite tratar perturbativamente a la teoría únicamente en la región de energías y momentos grandes comparados con alguna escala característica ( $\Lambda_{QCD}$ ), es decir, su running coupling constant decrece a altas energías. En cambio, en la zona de baja energía la teoría se hace no perturbativa en la constante de acoplamiento, lo que físicamente queda reflejado en el hecho de que los estados asintóticos de la teoría no son los grados de libertad en los que inicialmente se formula, los quarks, sino hadrones en los que los quarks aparecen confinados.

En este trabajo se ha mostrado la naturaleza de las teorías efectivas tomando como ejemplo la interacción fuerte a bajas energías. En general las teorías efectivas permiten una descripción fenomenológica de diversos sistemas físicos. Como vimos, las simetrías y su manifestación juegan un papel fundamental en la construcción del lagrangiano efectivo. En el caso de la QCD los hadrones más ligeros pueden identificarse con pseudo-bosones de Goldstone asociados al rompimiento espontáneo de la simetría quiral y la teoría efectiva proporciona una manera sistemática para calcular procesos a cualquier orden  $\nu$ .

El análisis presentado se puede generalizar e incluir más términos en el lagrangiano e incluso otros efectos como las interacciones

electromagnética y débil e incluir la interacción con campos de materia.

## Referencias

- [1] C. Quigg *Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions*, Benjamin/Cummings (1983).
- [2] Michio Kaku *Quantum Field Theory*, Oxford University Press (1993).
- [3] Lewis H. Ryder *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1996).
- [4] I. J. R. Aitchison *An Informal Introduction to Gauge Field Theories*, Cambridge University Press. Cambridge (1982).
- [5] M. E. Peskin and D.V. Schroeder *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company (1995).
- [6] C Itzykson, J. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw Hill, (1980).
- [7] P. Pascual and R. Tarrach *QCD: Renormalization for the Practitioner* Springer-Verlag Vol 194 (1984).
- [8] G. Ecker, *The Pion-Nucleon Interaction as an Effective Field Theory*, arXiv:hep-ph/9407240 (1994).
- [9] J. F. Donoghue, E. Golowich, B. R. Holstein, *Dynamics Of The Standard Model*, Cambridge University Press, Cambridge, (1992).
- [10] A. Dobado, A. Gómez-Nicola, A. Maroto, J. Peláez, *Effective Lagrangians for the Standar Model*, Springer-Verlag, Berlín (1997).
- [11] H. Leutwyler, *Theoretical Chiral Dynamics*, arXiv:hep-ph/0011140 (2000).

- [12] M. Gell-Mann, R. J. Oakes, B. Renner, *Phys. Rev.* **175** (1968) 2195.
- [13] H. Leutwyler, *Goldstone Bosons*, arXiv:hep-ph/9409422 (1994).
- [14] A. Manohar, *Effective Field Theories*, arXiv:hep-ph/9606222 (1996).
- [15] A. Pich, *Effective Field Theory*, arXiv:hep-ph/9806303 (1998).
- [16] D. Kaplan, *Effective Field Theories*, arXiv:hep-ph/9506035 (1995).
- [17] K. G. Richardson, *Chiral Symetry and the N-N interactionl*, arXiv:hep-ph/0008118 (2000).