

# TEORÍA FORMAL DE ELASTICIDAD: MÉTODO UNIFICADO PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE CUERPOS DEFORMABLES BAJO LA ACCIÓN DE CARGAS

Diego Luis González Cabrera<sup>1,\*</sup> y Francisco Marín Quiroga<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Ingeniería, Escuela Colombiana de Carreras Industriales, Bogotá D. C.

<sup>2</sup> Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia

## Resumen

Se estudian los conceptos básicos de la teoría formal de la elasticidad tales como esfuerzos, deformaciones, ley de Hooke, relación de Poisson, entre otros. Se muestra como cualquier problema de elasticidad plana puede ser reducido a un problema de ecuaciones diferenciales parciales, en donde la ecuación a resolver es llamada ecuación biarmónica. Los conceptos introducidos son aplicados en la solución de un problema clásico en mecánica de materiales: viga en cantilever sometida a una carga puntual en el extremo libre. La solución obtenida se compara con la reportada usualmente en los libros de resistencia de materiales.

**Palabras claves:** Elasticidad, diseño mecánico

## Abstract

Fundamental concepts of the formal theory of elasticity as strength, deformation, Hooke law and Poisson relation are studied. It is shown that all problems of plane elasticity can be reduced to partial - differential - equation systems, where the essential equation is called biharmonic equation. The relevant principles are applied in the solution of a classic problem in material mechanics: a cantilever beam on the action of a probe charge in the free extreme. The solution are compared with the reported in the material books.

---

\*: [gfnm@ciencias.unal.edu.co](mailto:gfnm@ciencias.unal.edu.co)

## 1. INTRODUCCIÓN

Los fundamentos básicos del diseño estructural y de elementos de máquina son estudiados por la mecánica de materiales. Dado que el comportamiento de los sólidos deformables bajo la acción de cargas externas es en general un problema de elevada complejidad, los libros de mecánica de materiales básicos se enfocan en la solución de algunos problemas particulares haciendo generalmente una gran cantidad de suposiciones y simplificaciones.

## 2. TEORÍA FORMAL DE ELASTICIDAD

### 2.1. Componentes de esfuerzo

El estado tridimensional de esfuerzo de un sólido debe ser descrito por tres componentes normales  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\sigma_z$  y seis esfuerzos cortantes  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$  [1]. Por lo tanto, para especificar el estado de esfuerzo de cualquier sólido se tienen 9 cantidades, pero dado que el elemento está en equilibrio estático tan solo seis de esas cantidades son independientes. Al realizar  $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$  y  $\sum \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ , se encuentra:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  y  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ . Así, para especificar totalmente el estado de esfuerzo de un sólido se requieren seis cantidades, tres esfuerzos normales y tres esfuerzos cortantes:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{yz}$ .

### 2.2. Componentes de deformación

Para determinar las componentes de deformación se consideran tres puntos cercanos de un sólido en el plano  $xy$  como se muestra en la figura 1a.

Al someter al sólido a cargas externas, cada punto del sólido se desplazará de su posición original, el vector desplazamiento  $\vec{\delta}$  de cada punto está dado por:

$$\vec{\delta} = u(x, y, z) \hat{i} + v(x, y, z) \hat{j} + w(x, y, z) \hat{k}$$

Por lo tanto  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  y  $w(x, y, z)$  son las deformaciones en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente. Dado que las componentes del vector desplazamiento son función de las coordenadas,

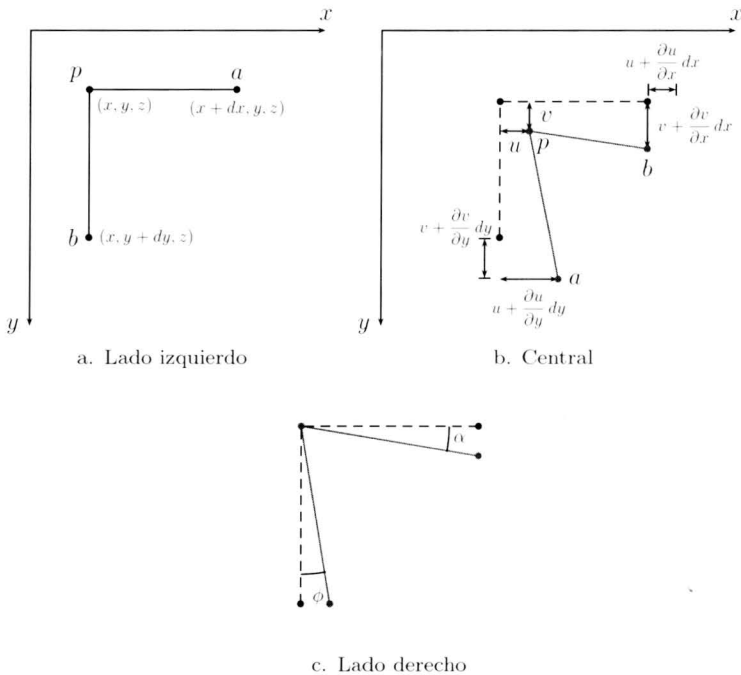


FIGURA 1. Componentes de la deformación.

las deformaciones van a variar de punto en punto. Debido a las cargas externas los puntos  $a$ ,  $b$ ,  $p$  forman una configuración como la mostrada en la figura 1b. Las nuevas coordenadas de los puntos  $a$ ,  $b$  y  $p$ , teniendo en cuenta las deformaciones son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 a &= (x + u, y + v) \\
 b &= \left( x + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, y + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \\
 c &= \left( x + u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, y + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy + dy \right)
 \end{aligned}$$

La deformación longitudinal unitaria en dirección  $x$  esta dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\left[ x + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + dx - (x + u) \right] - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

De forma análoga, para la dirección  $y$ :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

La deformación angular en el plano  $xy$  se muestra en la figura 1c., por lo tanto la deformación angular total es la suma de los dos ángulos mostrados  $\alpha$  y  $\phi$ , dado que estos ángulos son pequeños:

$$\gamma_{xy} = \phi + \alpha \approx \tan \phi + \tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Si se analizan las deformaciones en los otros planos  $xz$  y  $yz$  se encuentran resultados análogos, de tal forma que las componentes de deformación son:

Deformaciones Lineales	Deformaciones angulares
$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$	$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$
$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$	$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$
$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$	$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$
(1)	(2)

### 2.3. Relación general entre esfuerzo y deformación

La ley de Hooke postula el comportamiento elástico de un sólido para deformaciones lo suficientemente pequeñas, es decir propone una relación lineal entre las componentes de esfuerzo y deformación. La relación de Poisson tiene en cuenta que una elongación en una dirección va acompañada de una contracción en las otras dos direcciones y viceversa. De esta forma se tiene:

Relaciones de esfuerzo-deformación Normal	Relaciones de esfuerzo-deformación Cortante
$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$	$\tau_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{G}$
$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$	$\tau_{xz} = \frac{\gamma_{xz}}{G}$
$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$	$\tau_{yz} = \frac{\gamma_{yz}}{G}$
(1)	

## 2.4. Esfuerzo y deformación plana

El estado de esfuerzo y deformación de cualquier sólido se especifica por 12 cantidades, tres esfuerzos normales y tres esfuerzos cortantes cada uno con sus respectivas deformaciones. Se introduce ahora una aproximación para facilitar la ilustración de la teoría, se supone que las dimensiones del sólido en las direcciones  $x$  e  $y$  son mucho mayores (menores) que la dimensión en dirección  $z$ . Debido a esto los esfuerzos y las deformaciones no dependen de la coordenada  $z$  y por lo tanto para un cuerpo sometido a esfuerzo y deformación plana tan solo se necesitan 6 cantidades, tres esfuerzos y tres deformaciones unitarias:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  y  $\gamma_{xy}$ .

## 2.5. Ecuaciones diferenciales de equilibrio

A partir de las discusiones anteriores se sabe que los esfuerzos que actúan sobre un pequeño elemento del sólido son los mostrados en la figura 2.

Aplicando la segunda ley de Newton bajo la suposición de equilibrio se tiene:

$$\sum F_x = 0$$

$$F_x \Delta x \Delta y e + \tau_{xy}(x, y + \Delta y/2) \Delta x e - \tau_{xy}(x, y - \Delta y/2) \Delta x e$$

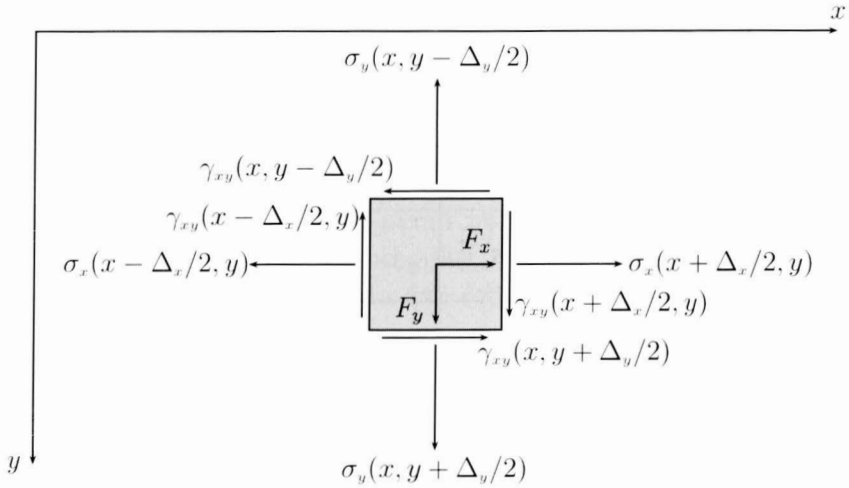


FIGURA 2. Esfuerzo plano.

$$+ \sigma_x(x + \Delta x/2, y) \Delta y e - \sigma_x(x - \Delta x/2, y) \Delta y e = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_y \Delta x \Delta y e + \tau_{xy}(x + \Delta x/2, y) \Delta y e - \tau_{xy}(x - \Delta x/2, y) \Delta y e \\ + \sigma_y(x, y + \Delta y/2) \Delta x e - \sigma_y(x, y - \Delta y/2) \Delta x e = 0$$

Reagrupando las dos últimas ecuaciones y tomando el límite cuando los incrementos en  $x$  e  $y$  tienden a cero, se tiene:

$$F_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ F_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

Si la única fuerza por unidad de volumen es el peso y el eje  $y$  se toma en dirección vertical se tiene  $F_x = 0$  y  $F_y = \rho g$ .

## 2.6. Ecuación de compatibilidad

Las ecuaciones (1) y (2) no son totalmente independientes, para esfuerzo y deformación plana solo se necesitan tres de estas ecuaciones, por lo tanto derivando la primera de las ecuaciones (1) dos veces con respecto a  $y$  y la segunda ecuación dos veces con respecto a  $x$  se tiene:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

y

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Derivando la primera de las ecuaciones (2) una vez con respecto a  $x$  y otra con respecto a  $y$ :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Comparando las dos últimas ecuaciones se encuentra:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Esta última ecuación se llama ecuación de compatibilidad y junto con (4) constituyen un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas. Puesto que las ecuaciones (4) están en función de los esfuerzos es conveniente escribir la ecuación de compatibilidad en función de los esfuerzos, para esto se utiliza la relación entre esfuerzos y deformaciones, de tal forma que:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (5)$$

Las ecuaciones (4) y (5) conforman un conjunto de tres ecuaciones diferenciales parciales acopladas, que junto con las condiciones de frontera pueden ser resueltas por diversos métodos [2]. Sin embargo es conveniente reunir las tres ecuaciones diferenciales en una sola utilizando la función de esfuerzo.

## 2.7. Ecuación biarmónica

Para reunir las tres ecuaciones diferenciales se escriben los esfuerzos en términos de una única función llamada función de esfuerzo, dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \rho g y \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \rho g y \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{6}$$

Y la función de esfuerzos satisface la ecuación biarmónica:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0\tag{7}$$

La ecuación (7) condensa toda la información de las ecuaciones (4) y (5) y junto con las condiciones de frontera propias del problema a resolver constituye un problema completo de ecuaciones diferenciales parciales.

## 2.8. Solución de la ecuación biarmónica

La ecuación biarmónica puede ser resuelta analíticamente para algunos casos [2] dependiendo de la complejidad de las condiciones de frontera. Una vez que se logra solucionar esta ecuación, se utilizan las ecuaciones (6) para determinar los esfuerzos. Las deformaciones se determinan a partir de las ecuaciones (1), (2) y (3).

## 3. Viga en cantilever

Se considera una viga en cantilever sometida a una fuerza puntual en su extremo libre, tal como se observa en la figura 3.

Las condiciones de frontera tienen implícita la información de las cargas y de la geometría del sistema; para este caso particular son:



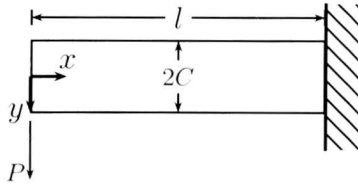


FIGURA 3. Viga en cantilever.

- $\sigma_y(x, \pm c) = 0$  y  $\sigma_x(0, y) = 0$ , evidencian la ausencia de carga normal en los extremos horizontales de la viga y en el extremo vertical izquierdo de la viga, respectivamente.

- 

$$\int_{-c}^c \sigma_x(l, y)y \, dy = -Pl$$

muestra como el torque aplicado por el esfuerzo normal sobre el lado vertical derecho debe ser igual al torque aplicado por la carga.

- 

$$-\int_{-c}^c \tau_{xy}(0, y) \, dy = P$$

evidencia como la fuerza aplicada por el esfuerzo cortante sobre el lado vertical izquierdo debe ser igual a la aplicada por la carga.

- $\tau_{xy}(x, \pm c) = 0$ , sugiere la ausencia de carga paralela en los extremos horizontales de la viga.

Solucionando la ecuación biarmónica por medio de series de poten-

cias bidimensionales se tiene:

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= -\frac{P}{4C^3} xy^3 + \frac{3P}{4C} xy \\ \sigma_x(x, y) &= -\frac{Pxy}{l} \\ \sigma_y(x, y) &= 0 \\ \tau_x(x, y) &= -\frac{P}{2l} (C^2 - y^2)\end{aligned}\tag{8}$$

Tomando  $P = 1$ ,  $C = 1$  y  $l = 4$  se estudia fácilmente la solución dada por las ecuaciones (8) a partir de sus gráficas de contorno [3].

### 3.1. Campo de esfuerzos

#### 3.1.1. Esfuerzo normal en $x$

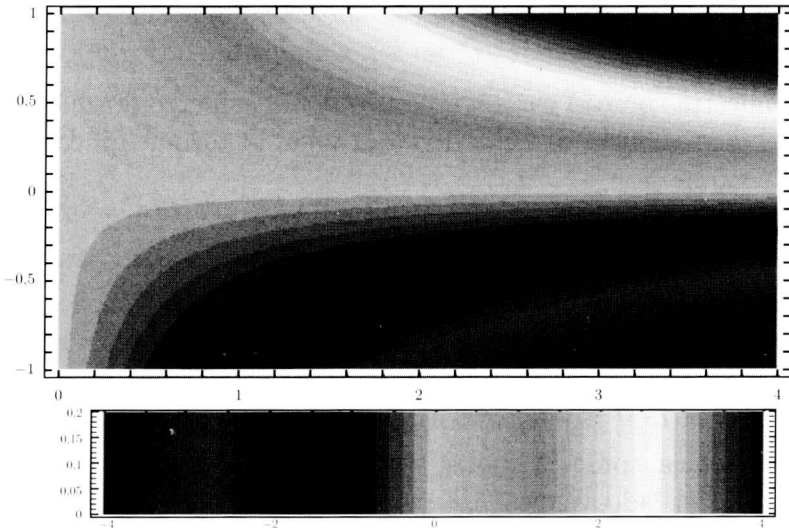


FIGURA 4. Esfuerzo normal en  $x$ .

En la figura 4 se evidencia la existencia del eje neutro, en donde el esfuerzo normal en  $x$  vale cero. La parte superior de la viga se

encuentra a tensión y la inferior a compresión. El esfuerzo normal sobre el lado vertical izquierdo de la lámina vale cero tal como se planteó en las condiciones de frontera. Los valores máximos de tensión y compresión se encuentran en los vértices superior e inferior derecho.

### 3.1.2. Esfuerzo cortante

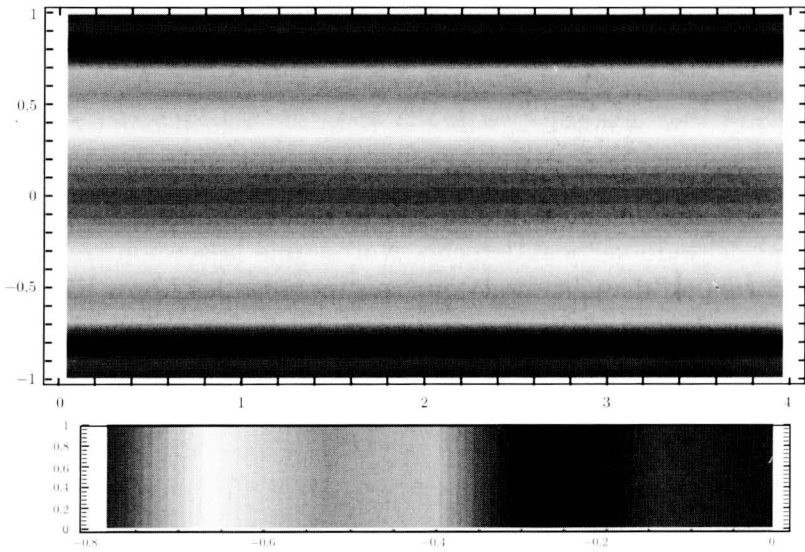


FIGURA 5. Esfuerzo cortante.

El esfuerzo cortante vale cero en los lados horizontales de la viga y alcanza su máximo valor en el centro de la viga. Nótese, según la figura 5 que el esfuerzo cortante tiene igual distribución sobre cualquier sección transversal vertical, lo cual implica que la distribución de la fuerza cortante es constante a lo largo de la viga tal como se deduce en los libros de estática.

### 3.2. Campo de deformaciones

La línea punteada en la figura 6 muestra la viga sin deformaciones y la continua muestra las deformaciones de la viga debido a la acción de la carga puntual. Para la determinación de las deformaciones

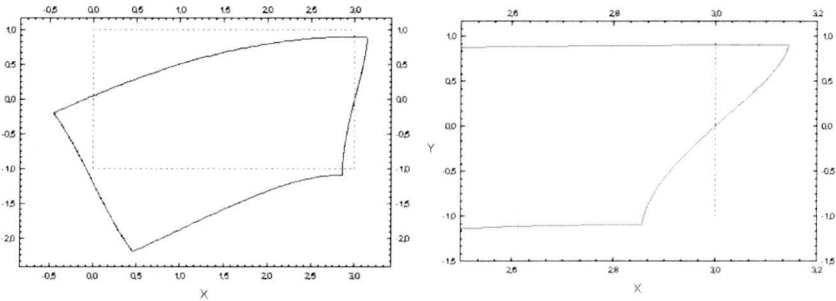


FIGURA 6. Lado izquierdo deformación de la viga, lado derecho ampliación del empotramiento.

se supuso que el único punto fijo al empotramiento es el punto central del lado vertical derecho. Nótese que la sección transversal se deforma a diferencia de lo que se supone en los libros básicos de mecánica de materiales. La gráfica muestra una ampliación de la deformación de la viga sobre el empotramiento.

Es evidente que debido a la acción del esfuerzo cortante la viga se deforma transversalmente.

#### 4. Conclusiones

La teoría formal de la elasticidad proporciona un método unificado para resolver problemas de cuerpos deformables sometidos a la acción de cargas. Cualquier problema de elasticidad se puede escribir como un problema de ecuaciones diferenciales parciales a diferencia de la mecánica de materiales básica en la cual se plantea una ecuación para cada problema particular que se desea resolver. El precio que se debe pagar por el uso de esta teoría general es el de usar una estructura matemática más compleja.

El problema de la viga en cantilever se estudia de una forma más general a la encontrada comúnmente en la bibliografía, puesto que se determinan los esfuerzos y las deformaciones en todos los puntos del sólido.

Aunque todo problema de elasticidad puede ser planteado como un problema de ecuaciones diferenciales parciales, la gran mayoría

de los problemas (a diferencia del expuesto en este artículo) carece de solución analítica. Este problema puede salvarse debido a la existencia de métodos computacionales para resolver ecuaciones diferenciales parciales tales como el de diferencias finitas y el de elementos finitos.

## Referencias

- [1] J. E. Shigley, C. R. Mischke, *Diseño en Ingeniería Mecánica*, Mc Graw-Hill (1985).
- [2] S. P. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, Mc Graw-Hill, Tercera edición (1970).
- [3] D. L. González C, F. Marín Quiroga, J. Roa-Rojas, D. A. Landínez Téllez, *Plastic deformations in Cantelivers-beams* Revista Mexicana de Física (preprint) (2002).