

ECUACIÓN FRACCIONARIA DE BURGERS NO HOMOGÉNEA

NONHOMOGENEOUS FRACTIONAL BURGERS EQUATION

Victor G. Buesaquillo¹, Alejandro Pérez², Alvaro Rugeles¹

¹ Departamento de Física. Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

² Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.

(Recibido: Octubre/2015. Aceptado: Abril/2016)

Resumen

En este artículo se estudian diferentes tipos de soluciones de la ecuación fraccionaria unidimensional no lineal de Burgers con un término no homogéneo asociado a fuerzas externas. Esta ecuación es una generalización de la ecuación de difusión no homogénea en la que se incluye una derivada fraccionaria de Caputo que describe una no linealidad no local. Por medio de la transformación de Cole-Hopf generalizada, la ecuación de Burgers fraccionaria no homogénea se convierte en una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales, lo que permite obtener soluciones analíticas. Se exploran los efectos asociados al término no homogéneo y al orden de la derivada fraccionaria.

Palabras clave: Ecuación de Burgers, cálculo fraccionario.

Abstract

In this article we study solutions of the nonlinear fractional Burgers equation with a nonhomogeneous term associated with external forces. This equation is a generalization of the nonhomogeneous diffusion equation with an additional term that describes a nonlocal nonlinearity by means of a fractional order derivative of Caputo type. By using a generalized Cole-Hopf transformation,

the fractional Burgers equation is mapped to a linear partial differential equation, this formalism allows to deduce analytical solutions. We explore the effects related to the nonhomogeneous term and the order of the fractional derivative.

Keywords: Burgers equation, fractional calculus.

1. Introducción

Desde su introducción en 1939 por el científico Danés J.M. Burgers, la ecuación de Burgers, constituye el modelo no lineal más simple en el estudio de la dinámica de fluidos y ha sido estudiada con el fin de modelar gran cantidad de fenómenos en diversos sistemas físicos [1]. La ecuación de Burgers presenta diferentes tipos de soluciones matemáticas, en particular, paquetes de ondas que se propagan sin cambiar de forma debido a la compensación entre efectos no lineales y dispersivos [2]. Adicional a esto, la ecuación de Burgers puede tener términos extra asociados a fuerzas externas, lo que permite definir la ecuación de Burgers no homogénea [1].

Recientemente se ha propuesto la ecuación fraccionaria de Burgers en la que la parte no lineal se modela por medio de un término con derivadas de orden fraccionario [3]. La razón para extender el tratamiento de la ecuación de Burgers al caso fraccionario se debe a la existencia de diferentes fenómenos de carácter no local [3, 4] que se presentan cuando las propiedades de un sistema en un cierto punto de configuración o espacio de fase no solo dependen de las propiedades del sistema en este punto, sino también de las propiedades del entorno y, como consecuencia, se usa el cálculo fraccionario para describir dichos fenómenos [5, 6].

En este trabajo se estudia la ecuación fraccionaria de Burgers con un término no homogéneo. En la primera parte se analiza la ecuación de Burgers no homogénea. En la sección 2 se utiliza la transformación de Cole-Hopf para establecer una ecuación lineal por medio de la cual se obtienen en forma analítica soluciones solitónicas, también se discute el efecto del término no homogéneo en las soluciones. En la segunda parte del trabajo se analiza la ecuación fraccionaria de Burgers no homogénea. En la sección 3

se presenta brevemente el concepto de derivada fraccionaria, en particular la derivada fraccionaria de Caputo. En la sección 4 se utiliza una versión modificada de la transformación de Cole-Hopf en función de una derivada fraccionaria para usarla en la solución de la ecuación fraccionaria de Burgers no homogénea. Se analizan diversos casos con soluciones con pulsos localizados y soluciones disipativas de la ecuación fraccionaria de Burgers no homogénea.

2. Ecuación de Burgers no homogénea

En esta sección se introducen algunos resultados que son la base para el análisis de la ecuación fraccionaria de Burgers. Se parte de la ecuación de Burgers unidimensional no homogénea para $\phi(x, t)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = F(x, t) \quad (1)$$

siendo $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$ y la condición inicial $\phi(x, 0) = \phi_0(x)$. El término $F(x, t)$ se encuentra asociado a fuerzas externas y $\phi_0(x)$ es el perfil al tiempo $t = 0$ de $\phi(x, t)$. Para el caso homogéneo $F(x, t) = 0$ se conocen soluciones solitónicas [7] y otro conjunto de soluciones obtenidas mediante la transformación de Cole-Hopf [8, 9]. En lo siguiente se aplica esta transformación con el fin de estudiar el caso no homogéneo.

2.1. Transformación de Cole-Hopf

En la ecuación (1) la transformación de Cole-Hopf [8, 9] describe $\phi(x, t)$ por medio de una función $\psi(x, t)$ a través de la relación:

$$\phi(x, t) = -\frac{2}{\psi(x, t)} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}. \quad (2)$$

Cuando se introduce (2) en la ecuación (1) se obtiene la relación:

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\psi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right] = F(x, t). \quad (3)$$

Luego se define $F(x, t)$ en términos de un *potencial* $V(x, t)$ que cumple con $F(x, t) = -2 \frac{\partial V}{\partial x}$. La ecuación (3) permite establecer

para $\psi(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x, t)\psi = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, t \geq 0, \quad (4)$$

con condición inicial $\psi(x, 0) = g(x) \equiv \exp\left[-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \phi_o(x') dx'\right]$, donde $g(x)$ es obtenida aplicando (2) a la condición inicial $\phi_0(x)$. En consecuencia, la transformación de Cole-Hopf convierte la ecuación no homogénea de Burgers (1) en la ecuación de difusión (4) con términos de fuente, asociados al potencial $V(x, t)$, de la forma $V(x, t)\psi(x, t)$. La importancia de este tipo de transformación radica en que establece una correspondencia entre un problema no lineal donde no es evidente un principio de superposición y un problema lineal donde el principio de superposición permite utilizar el método de la función de Green.

2.2. Soluciones de la ecuación homogénea

Cuando se considera $V(x, t) = 0$ en la ecuación (4) resulta el caso particular de la ecuación de Burgers homogénea resuelta usando la transformación de Cole-Hopf [8]. En este caso, por medio de la ecuación (4), $\psi_0(x, t)$ satisface:

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi_0}{\partial t} \quad -\infty < x < \infty, t \geq 0, \quad (5)$$

con la condición inicial $\psi_0(x, 0) = g(x)$. A partir de $\psi_0(x, t)$ se obtienen dos tipos de resultados para $\phi(x, t)$: soluciones disipativas y soluciones solitónicas. Teniendo en cuenta que la expresión (5) es una ecuación de difusión cuya solución toma la forma:

$$\psi_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4t}\right] g(x') dx', \quad (6)$$

las soluciones disipativas de la ecuación de Burgers homogénea se obtienen reemplazando (6) en (2). Por otra parte, con el fin de buscar soluciones de (5) en forma de pulso que se propaga a velocidad v , se introduce el cambio de variables $z = x - vt$ y en consecuencia $\psi(x, t) = \psi(z)$ satisface $\frac{d^2 \psi}{dz^2} = -v \frac{d\psi}{dz}$. Las soluciones

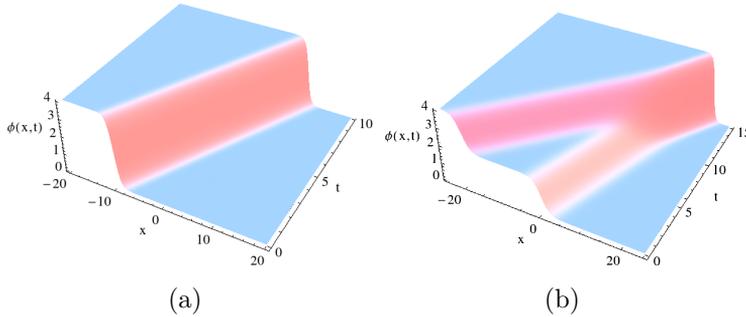


FIGURA 1. Soluciones viajeras de la ecuación de Burgers homogénea. En (a) $\psi(x, t) = e^{-2((x+10)-2t)} + 1$. En (b) se grafica la solución obtenida para la interacción de dos pulsos descritos por $\psi(x, t) = e^{-((x+4)-t)} + e^{-2((x+10)-2t)} + 1$.

de esta ecuación toman la forma $\psi(z) = a_1 e^{-vz} + b_1$ donde a_1, b_1 son constantes. Por lo tanto:

$$\psi(x, t) = a_1 e^{-v(x-vt)} + b_1. \quad (7)$$

Mediante (2) y (7) se obtiene la solución solitónica de la ecuación de Burgers:

$$\phi(x, t) = \frac{2a_1 v e^{-v(x-vt)}}{a_1 e^{-v(x-vt)} + b_1}. \quad (8)$$

Teniendo en cuenta que (5) es una ecuación lineal, es posible superponer N soluciones $\psi(x, t) = \sum_{i=1}^N [a_i e^{-v_i(x-v_i t)} + b_i]$, donde a_i, b_i, v_i para $i = 1, \dots, N$ son constantes que describen a cada uno de los solitones. De esta manera $\phi(x, t) = -\frac{2}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ permite obtener la solución con N pulsos. En la Figura 1(a) se presenta una solución solitónica y en la Figura 1(b) se presenta la interacción de dos solitones. Se nota que la velocidad del solitón resultante después de la interacción es diferente a la de los dos solitones iniciales. Las soluciones presentadas en esta sección son dos grupos de soluciones que se conocen para la ecuación de Burgers homogénea [7, 8]. En la siguiente sección se estudia la forma en la que varían estas soluciones al introducirse la fuerza $F(x, t)$ en (1).

2.3. Soluciones de la ecuación no homogénea

En esta sección se analiza el efecto que tiene $F(x, t)$ en la ecuación de Burgers no homogénea sobre soluciones solitónicas. Cuando $F(x, t) = F_e \delta(x - x_e)$ se presentan solitones. Los valores F_e , x_e son, respectivamente, constantes asociadas a la magnitud de la fuerza externa y a la posición donde es aplicada. Para este caso el potencial está dado por: $V(x, t) = -\frac{F_e}{2} H(x - x_e)$. La función $\delta(x)$ denota a la delta de Kronecker y $H(x)$ es la función de Heaviside. Para este potencial, la ecuación (4) toma la forma:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{si } x < x_e, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{F_e}{2} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{si } x \geq x_e. \quad (10)$$

Tal como se estudió en la sección anterior, la ecuación (9) posee soluciones solitónicas en $x < x_e$. Para la ecuación (10), existen soluciones viajeras que dan lugar a solitones en la región $x \geq x_e$. Así, buscando soluciones de la forma $\psi(x, t) = \psi(z)$ con $z = x - \beta t$, la ecuación (10) requiere:

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \beta \frac{d\psi}{dz} - \frac{F_e}{2} \psi = 0. \quad (11)$$

En la región $x \geq x_e$ se presenta un solitón transmitido cuando $F_e^2 > 16\beta$, en este caso la solución de (11) está dada por:

$$\psi(x, t) = C_1 e^{-\frac{1}{2}(\beta + \bar{F})(x - \beta t)} + d_1 e^{-\frac{1}{2}(\beta - \bar{F})(x - \beta t)}, \quad (12)$$

donde $\bar{F} = \sqrt{\beta^2 + 2F_e}$. Por medio de la transformación de Cole-Hopf se obtiene $\phi(x, t) = \beta - \bar{F} + \frac{2C_1 \bar{F}}{C_1 + d_1 e^{\bar{F}(x - \beta t)}}$, que es un solitón transmitido. Las constantes C_1 , d_1 , β se deducen a partir de las condiciones de continuidad que establece (4) en $x = x_e$. Cuando $\beta^2 + 2F_e \leq 0$ se obtienen soluciones para (10) que no son solitones transmitidos. En este caso el solitón es reflejado y en $x > x_e$ $\phi(x, t) = 0$, resultado que se obtiene al exigir que $\psi(x, t)$ sea independiente de x y de esta manera, la solución de (10) está dada por $\psi(x, t) \propto e^{-F_e t/2}$. En la Figura 2 se ilustran estas situaciones

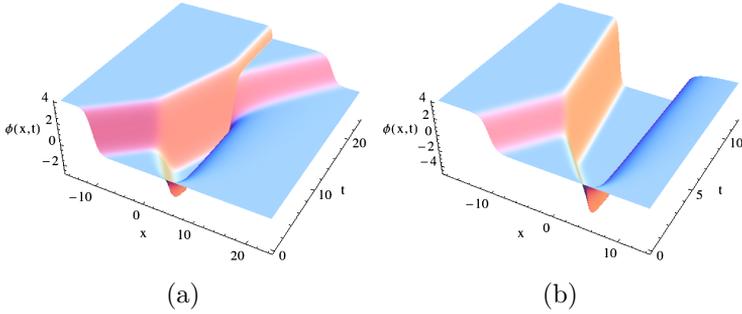


FIGURA 2. Soluciones de la ecuación no homogénea de Burgers con $F(x, t) = -F_e\delta(x-5)$. En (a) el pulso incidente es descrito por $\psi(x, t) = e^{-4((x+10)-4t)} + 1$, además $F_e = -16$. Se obtiene un pulso transmitido y uno reflejado. En (b) $F_e = -36$ y solo se observa reflexión.

para un caso donde hay un solitón transmitido y otro en el que no hay transmisión.

En la siguiente parte del trabajo se considera la ecuación fraccionaria de Burgers no homogénea teniendo en cuenta el formalismo planteado hasta el momento. En este sentido se utiliza la ecuación de Burgers fraccionaria propuesta en [10] y se adiciona un término $F(x, t)$ asociado a fuerzas externas. Se utiliza una transformada de Cole-Hopf generalizada que relaciona a la ecuación de Burgers fraccionaria con una ecuación diferencial en derivadas parciales. Luego se analizan soluciones de la ecuación fraccionaria de Burgers.

3. Derivadas fraccionarias

Una derivada es una operación que cumple con las propiedades de linealidad y la regla de Leibniz del producto. De esta manera, en diversos contextos se pueden definir derivadas y en el caso de funciones de una variable la derivada tradicional de la función $f(t)$ dada por $\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$, se generaliza con el fin de extender el carácter local de esta definición. Esto lleva a establecer la derivada fraccionaria de Riemman-Liouville de orden real α [6]: ${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau$, donde a y t son valores

reales que denotan los límites en los que se debe incluir información de $f(t)$ con el fin de evaluar la derivada, n es el mayor entero que satisface $n - 1 \leq \alpha < n$ y $\Gamma(z)$ denota a la función Gamma [6].

También se define la derivada fraccionaria de Caputo [11]:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau, \quad (13)$$

en esta definición $f^{(n)}(\tau)$ denota la n -ésima derivada de $f(\tau)$. Es conveniente señalar que existen otros tipos de derivada fraccionaria y en general éstas definiciones no son equivalentes e incluso algunas de sus propiedades difieren. Por ejemplo, la derivada de Caputo de una constante es nula, algo que no ocurre para el caso de la derivada fraccionaria de Riemman-Liouville [6]. En física, ecuaciones diferenciales con derivadas fraccionarias se han utilizado para modelar procesos en diversos sistemas [6, 11]. Una revisión del concepto de derivada fraccionaria, de las diferentes formas de definir estas derivadas y los métodos utilizados en este campo de las matemáticas, son presentados en [5, 6].

4. Ecuación fraccionaria de Burgers no homogénea

En esta sección se estudia la ecuación fraccionaria de Burgers no lineal planteada en [3, 10] con un término adicional $F(x, t)$:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} {}_a D_x^\alpha ({}_a D_x^{1-\alpha} \phi(x, t))^2 - \gamma \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = F(x, t). \quad (14)$$

En esta ecuación, ${}_a D_x^\alpha \phi(x, t) = \lambda^{\alpha-1} {}_a^C D_x^\alpha \phi(x, t)$ es la derivada fraccionaria, donde ${}_a^C D_x^\alpha \phi(x, t)$ es la derivada fraccionaria de Caputo dada por la ecuación (13) y el factor $\lambda^{\alpha-1}$ es una constante que se introduce con el fin de que la ecuación sea correcta en sus unidades, de esta manera λ define una longitud característica del problema [3, 10], en la siguiente parte se toma como $\lambda = 1$. Por otra parte, $F(x, t)$ está asociado a fuerzas externas y γ es el coeficiente de viscosidad. Adicional a esto, la ecuación (14) está sometida a la condición inicial:

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad (15)$$

en donde $\phi(x, t)$ y $\phi_0(x)$ son funciones definidas en el conjunto de los números reales. El problema está bien definido en la región $a \leq x < \infty$ y $0 \leq t$, donde a es una constante real que define a las derivadas fraccionarias de la ecuación (14).

4.1. Transformación generalizada de Cole-Hopf

Para simplificar la ecuación (14) existe una transformación que es la generalización de la transformación de Cole-Hopf clásica al caso fraccionario y está definida por la expresión [3, 10]:

$$\phi(x, t) = -2\gamma {}_a D_x^\alpha \log y(x, t), \quad (16)$$

donde γ es el coeficiente de viscosidad del medio. Reemplazando la ecuación (16) en (14) y teniendo en cuenta que ${}_a D_x^\alpha$ conmuta con el operador de derivación entera, se obtiene:

$$-2\gamma {}_a D_x^\alpha \left[\frac{1}{y(x, t)} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) \right] = F(x, t). \quad (17)$$

Además, si el término de fuerza externa $F(x, t)$ se describe mediante un potencial $V(x, t)$ que satisface:

$$F(x, t) = -2\gamma {}_a D_x^\alpha V(x, t), \quad (18)$$

al reemplazar (18) en (17) resulta:

$${}_a D_x^\alpha \left[\frac{1}{y(x, t)} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) - V(x, t) \right] = 0. \quad (19)$$

Debido a que la derivada de Caputo de una constante es cero, la ecuación (19) implica que:

$$\frac{1}{y(x, t)} \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) - V(x, t) = C_1(t), \quad (20)$$

donde la función $C_1(t)$ depende únicamente del tiempo ya que la derivada fraccionaria de Caputo se calcula con respecto a x . Para lo que sigue se define la función:

$$u(x, t) = V(x, t) + C_1(t), \quad (21)$$

de tal manera que la ecuación (20) satisfice:

$$\gamma \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - u(x, t)y(x, t) = 0. \quad (22)$$

La condición inicial se obtiene reemplazando (15) en (16) y despejando $y(x, 0)$:

$$y(x, 0) = q(x) = \exp \left[-\frac{1}{2\gamma} {}_a D_x^{-\alpha} \phi_o(x) \right]. \quad (23)$$

En la siguiente parte se utilizan diferentes tipos de $u(x, t)$ para hallar la fuerza asociada a estos términos y obtener numéricamente la solución de la ecuación de Burgers. En la sección 4.2 se hace un estudio de las consecuencias de la ecuación (22) cuando $y(x, t) = y(x - vt)$.

4.2. Ecuación fraccionaria de Burgers homogénea

Se obtienen pulsos localizados a partir de la ecuación (22) cuando $y(x, t) = y(x - vt) = y(z)$ donde v es la velocidad del pulso. De esta manera, la ecuación (22) se expresa como:

$$\gamma \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + v \frac{dy(z)}{dz} - u(z, t)y(z) = 0, \quad (24)$$

que es una ecuación diferencial lineal homogénea. El término $u(z, t)$ está relacionado con la fuerza externa $F(x, t)$ mediante la expresión (18). Con el fin de analizar el caso homogéneo de (24), se considera $F(x, t) = 0$, como consecuencia $u(z, t) = 0$. Para este caso se obtiene la solución:

$$y(z) = C_1 \exp \left[-\frac{v}{\gamma} z \right] + C_2, \quad (25)$$

donde $z = x - vt$. Para continuar se utiliza la ecuación (16) que está definida en términos de la derivada de Caputo, donde $0 < \alpha < 1$ implica $n = 1$, como consecuencia:

$$\phi(x, t) = -2\gamma \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^x (x - x')^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial x'} \log[y(x', t)] dx'. \quad (26)$$

En la ecuación (26) aparece la expresión $\Psi_0(x, t) \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \log y(x-vt)$ que está dada por:

$$\Psi_0(x, t) = \frac{v}{\gamma} \frac{\exp\left[-\frac{v}{\gamma}(x-vt-b)\right]}{1 + \exp\left[-\frac{v}{\gamma}(x-vt-b)\right]} \quad (27)$$

con $b = -\frac{v}{\gamma} \log(C_1/C_2)$ para $C_2 \neq 0$, el caso $C_2 = 0$ da como resultado $\Psi_0(x, t) = \frac{v}{\gamma}$ que no es una onda viajera. La ecuación (27) es la solución de un solitón de la ecuación de Burgers normal obtenida en la ecuación (8); se nota que el efecto de las constantes C_1, C_2 es establecer el desfase b del pulso. Al incorporar el resultado (27) en el análisis de la ecuación fraccionaria de Burgers se obtiene:

$$\phi(x, t) = \frac{2\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{\Psi_0(x', t)}{(x-x')^\alpha} dx'. \quad (28)$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi_0(x, t) = v/\gamma$, se encuentra que en el límite $a \rightarrow -\infty$ diverge haciendo que la solución localizada no sea posible en ese caso. Como consecuencia, tomar a finito hace que $\phi(x, t)$ en (28) cambie su valor con una relación proporcional al tamaño de a .

Por otra parte, cuando $u(z, t) = c$ es una constante diferente de cero la ecuación (24) tiene por solución:

$$y(z) = C_1 \exp[\lambda_+ z] + C_2 \exp[\lambda_- z], \quad (29)$$

con $\lambda_{\pm} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4\gamma c}}{2\gamma}$. Teniendo en cuenta $\Psi(x, t) = -\frac{\partial \log y(x-vt)}{\partial x}$:

$$\Psi(x, t) = -\lambda_+ - \frac{\partial}{\partial x} \log(1 + \exp[-\kappa(x-vt-b)]), \quad (30)$$

siendo $\kappa = \lambda_+ - \lambda_- = \frac{\sqrt{v^2 + 4\gamma c}}{\gamma}$ y $b = \frac{1}{\kappa} \log \frac{C_2}{C_1}$. Al buscar la solución de la ecuación fraccionaria de Burgers se obtiene:

$$\phi(x, t) = \frac{2\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (\lambda_+ + \Psi_0(x', t)) \frac{1}{(x-x')^\alpha} dx'. \quad (31)$$

donde $\Psi_0(x, t)$ es similar a lo encontrado en el caso $u(z, t) = c = 0$ con una redefinición de las constantes. En esta expresión la integral

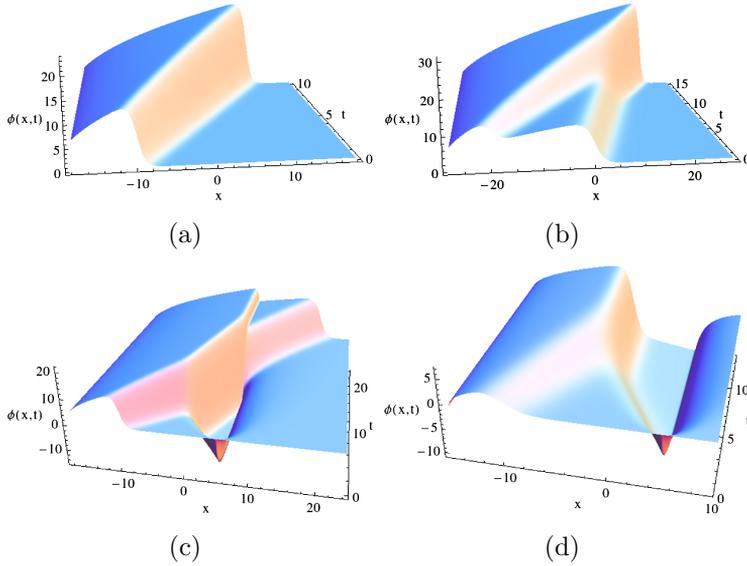


FIGURA 3. Soluciones de la ecuación (14). En (a) y (b) se considera el caso $F(x, t) = 0$, $\gamma = 1$ y $\alpha = 0,5$; en (b), (c) se consideran fuerzas externas descritas por $F(x, t) = F_e(x - x_e)^{-\alpha}H(x - x_e)$, $x_e = 5$, $F_e = 1$ y $\gamma = 1$. En (a) $y(x, t) = e^{-2((x+10)-2t)} + 1$ con $a = -20$, en (b) $y(x, t) = e^{-((x+4)-t)} + e^{-2((x+10)-2t)} + 1$, siendo $a = -30$. Por otra parte, en (c) $\alpha = 0,1$, $y(x, t) = e^{-2((x+10)-2t)} + 1$ y $a = -20$ y en (d) $\alpha = 0,5$, $y(x, t) = e^{-((x+10)-t)} + 1$ y $a = -15$.

$\int_a^x \frac{\lambda_+}{(x-x')^\alpha} dx'$ resulta en algo que aumenta de tamaño conforme x aumenta, este no es el tipo de comportamiento de los pulsos localizados.

Por lo tanto soluciones localizadas requieren que $\lambda_+ = 0$ lo que implica que $c = 0$. Las soluciones obtenidas en este caso también son soluciones de la ecuación fraccionaria, sin embargo, en estas soluciones la no linealidad es mayor que la dispersión del pulso haciendo que el pulso aumente su amplitud con la dinámica del sistema. Tal como en el caso ordinario, teniendo en cuenta que (24) es una ecuación diferencial lineal, es posible superponer soluciones de la forma $y(z) = \sum_{i=1}^N y_i(z)$, donde $i = 1, \dots, N$ determina las constantes que describen a cada uno de los pulsos dados por $y_i(z)$. De esta manera, $\phi(x, t) = -2\gamma_a^C D_z^\alpha \log[y(z)]$ permite obtener la solución con N pulsos para el caso fraccionario.

En la Figura 3(a) se presenta una solución con una onda localizada. Por otra parte, en la Figura 3(b) se presenta la interacción de dos pulsos. Dichos pulsos interaccionan de la misma manera que en el caso ordinario, sin embargo, el valor de α modifica la forma del pulso respecto al que se presenta en el caso ordinario. En la siguiente parte se busca estudiar la forma en la que varían estas soluciones al introducirse la fuerza $F(x, t)$ en (14).

4.3. Ecuación fraccionaria no homogénea

En esta sección se busca entender lo que sucede cuando el término $F(x, t)$ que aparece en la ecuación (14) representa una barrera de potencial. Para este caso, la ecuación (22) implica que $u(x, t) = F_e \Gamma(1 - \alpha) H(x - x_e)$ de tal manera que la fuerza externa es de la forma $F(x, t) = -2\gamma F_e (x - x_e)^{-\alpha} H(x - x_e)$, siendo F_e , x_e , c constantes y el potencial $V(x, t) = F_e \Gamma(1 - \alpha) H(x - x_e) - c$. Por lo tanto la ecuación (20) toma la forma:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - cy(x, t) = 0 \quad \text{si } x < x_e, \quad (32)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} - F_e \Gamma(1 - \alpha) y(x, t) = 0 \quad \text{si } x \geq x_e. \quad (33)$$

La ecuación (32) posee soluciones localizadas en $x < x_e$ cuando la constante c es nula. Para la ecuación (33), al buscar soluciones de la forma $y(x, t) = y(z)$ con $z = x - \beta t$, la ecuación (33) requiere:

$$\beta \frac{dy(z)}{dz} + \gamma \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + F_e \Gamma(1 - \alpha) y(z) = 0. \quad (34)$$

En la región $x \geq x_e$ la solución de (34) está dada por:

$$y(x, t) = d_1 e^{-\frac{1}{2\gamma}(\beta + \bar{F})(x - \beta t)} + d_2 e^{-\frac{1}{2\gamma}(\beta - \bar{F})(x - \beta t)}, \quad (35)$$

donde $\bar{F} = \sqrt{\beta^2 - 4\gamma c - 4\gamma F_e \Gamma(1 - \alpha)}$. La solución (35) es equivalente a la que se obtuvo en la sección 4.2 si se considera $\lambda_{\pm} = \frac{-1}{2\gamma}(\beta \pm \bar{F})$, de tal manera que $u(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \log y(x - \beta t)$ es:

$$\Psi(x, t) = -\lambda_+ - \frac{\partial}{\partial x} \log(1 + \exp[-\kappa(x - \beta t - b)]), \quad (36)$$

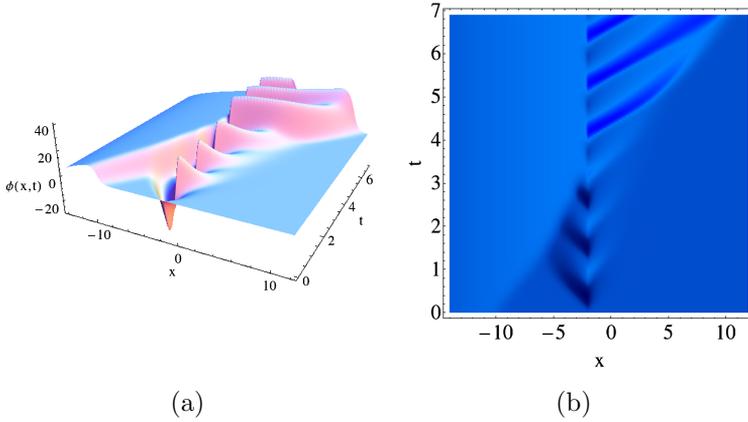


FIGURA 4. Soluciones de la ecuación (14) con $F(x, t) = F_e \sin(1,8\pi t)(x - x_e)^{-\alpha} H(x - x_e)$, $x_e = -2$, $F_e = 8$, $\gamma = 1$ y $\alpha = 0,5$. En este caso $y(x, t) = e^{-3((x+10)-3t)} + 1$ y $a = -15$.

siendo, en este caso, $\kappa = \lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{-\bar{F}}{\gamma}$ y $b = \frac{1}{\kappa} \log \frac{d_2}{d_1}$, con $d_1 \neq 0$ y $\frac{d_2}{d_1} > 0$. Por lo dicho en la sección 4.2 para obtener soluciones que mantengan su forma es necesario que $\lambda'_+ = 0$, lo cual es equivalente a quitar la barrera de potencial y en consecuencia la ecuación (33) no tiene soluciones solitónicas. En la Figura 3(c) se grafica la interacción de un pulso con una barrera de fuerza donde se presenta el pulso incidente pero en la interacción con la barrera no hay pulsos transmitidos. No obstante, si se compara con el resultado presentado en la Figura 2(a) se observa una similitud dado que los resultados del caso fraccionario deben coincidir con los del caso ordinario en el límite cuando el orden de la derivada tiende a un valor entero. En la Figura 3(d) la onda es reflejada e interacciona con la onda incidente tal como sucede en el caso ordinario. En este caso también se puede hacer que la barrera sea variable en el tiempo, tomando $F(x, t) = f(t)(x - x_e)^{-\alpha} H(x - x_e)$, donde la solución numérica es presentada en la Figura 4 y muestra como mediante una fuerza oscilatoria con $f(t) = F_e \sin(\omega t)$ el pulso incidente genera un pulso transmitido que pierde las características de pulso localizado y es dispersado.

5. Conclusiones

En este trabajo se parte de los resultados conocidos para el estudio de la ecuación de Burgers no homogénea y se amplían con el fin de analizar un problema no lineal con ecuaciones diferenciales fraccionarias. Se presenta la ecuación de Burgers no homogénea y se resuelve con el uso de la transformación de Cole-Hopf. Con esto es posible obtener soluciones localizadas, analizar la interacción de pulsos y estudiar las consecuencias de la inclusión de una barrera de potencial tanto constante como una que oscila en el tiempo. A partir de ello se procede al estudio de la ecuación de Burgers fraccionaria no homogénea que se resuelve con el uso de una versión modificada de la transformación de Cole-Hopf. También se obtienen soluciones localizadas y se hace un estudio análogo al llevado a cabo con la ecuación de Burgers clásica. Los resultados de los casos clásico y fraccionario presentan similitud, sin embargo, en el caso fraccionario aparecen características que alteran las predicciones del cálculo ordinario, revelando como las fuerzas externas y la no localidad distorsionan la forma de las ondas viajeras en las soluciones.

6. Agradecimientos

Los autores de este artículo agradecemos el apoyo de la Vicerrectoría de Investigaciones y Postgrados de la Universidad de Nariño por la ayuda financiera para el desarrollo de este trabajo mediante el proyecto titulado: “Métodos variacionales y de cálculo fraccionario en teoría de solitones”.

Referencias

- [1] J. Bec and K. Khanin, *Phys. Rep.* **447**, 1 (2007).
- [2] P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Solitons : an introduction*, Cambridge texts in applied mathematics (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [3] P. Miškinis, *SIGMA* **9**, 016 (2013).
- [4] K. Deng, M. K. Kwong, and H. A. Levine, *Quart. Appl. Math* **50**, 173 (1992).

-
- [5] M. D. Ortigueira, *Fractional Calculus for Scientists and Engineers*, Lecture Notes in Electrical Engineering, Vol. 84 (Springer, 2011) pp. 1–152.
 - [6] S. Das, *Functional Fractional Calculus*, 2nd ed. (Springer Publishing Company, Incorporated, 2014).
 - [7] E. Hesameddini and R. Gholampour, *Int. J. Contemp. Math. Sciences* **5**, 1541 (2010).
 - [8] J. D. Cole, *Quart. Appl. Math* **9**, 225 (1951).
 - [9] E. Hopf, *Comm. Pure Appl. Math.* **3**, 201 (1950).
 - [10] P. Miškinis, *Math. Model. Anal.* **7**, 151 (2002).
 - [11] K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, Vol. 2004 (Springer Verlag, New York, NY, USA, 2010).