

## TÉCNICA DE INDENTACIÓN ESFÉRICA EN RÉGIMEN ELÁSTICO MEDIANTE EL MEF

### SPHERICAL INDENTATION TECHNIQUE IN ELASTIC REGIME THROUGH FEM

Ruben D. Güiza<sup>1</sup>, Manuel Martínez<sup>1</sup>, Ricardo A. Jaimes<sup>1</sup>, Ramón Sánchez<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad Industrial de Santander, Colombia.

<sup>2</sup> Escuela de Ingeniería Mecánica, Universidad de Carabobo, Venezuela.

(Recibido: 12/2019. Aceptado: 06/2020)

#### Resumen

En los últimos años se han desarrollado nuevas técnicas para el estudio de materiales, entre las cuales se destaca la técnica de indentación. Los datos experimentales logrados por esta técnica permiten la evaluación del comportamiento mecánico del material a distintos niveles microestructurales. Recientemente, los avances informáticos han permitido la evolución de herramientas que permiten evaluar y predecir el comportamiento de distintos fenómenos físicos con el desarrollo de los métodos matemáticos, entre los cuales se encuentran los llamados métodos numéricos. El presente trabajo estudia el modelado numérico por elementos finitos de la técnica de indentación para su aplicación en la estimación de la curva carga vs desplazamiento; se revisan los fundamentos de la técnica con el objeto de establecer condiciones de borde a las cuales deberá estar sujeto el modelo numérico propuesto, donde un modelo computacional representativo a la técnica de indentación esférica cumple la finalidad de validar al modelo geométrico propuesto a partir de las ecuaciones analíticas de Hertz.

**Palabras clave:** Indentación esférica, ecuaciones analíticas de Hertz, método de elementos finitos.

## Abstract

In recent years new techniques have been developed for the study of materials, among which the indentation technique stands out. The experimental data obtained by this technique allow the evaluation of the mechanical behavior of the material at different microstructural levels. Recently, computer advances have allowed the evolution of tools that allow evaluating and predicting the behavior of different physical phenomena with the development of mathematical methods, among which are the so-called numerical methods. The present work studies the numerical modeling by finite elements of the indentation technique for its application in the estimation of the load vs. displacement curve; reviews the basics of the technique in order to establish the boundary conditions which must be subject the numerical model proposed. Where a computational model representative of the spherical indentation technique fulfills the purpose of validating the proposed geometric model based on the Hertz analytical equations.

**Keywords:** Spherical indentation, Hertz analytical equations, finite element method.

## Introducción

En los últimos años se han desarrollado nuevas técnicas para el estudio de materiales, entre las cuales se destaca la técnica de indentación. El objetivo primordial de la indentación es la obtención de la dureza superficial de los materiales. Esta técnica se realiza haciendo penetrar un indentador sobre la superficie a estudiar. La técnica de indentación es una técnica de contacto mecánico [1, 2]. Este concepto tiene lugar cuando las superficies de dos piezas o dos materiales ocupan tangencialmente una misma región o punto del espacio.

La importancia de estudiar la dureza en materiales sólidos, es que permite determinar la capacidad que tienen de resistir una deformación o abrasión en su superficie, esto ayuda a establecer

su comportamiento bajo la acción de las influencias externas. En general, el factor económico juega un rol de importancia en el campo de la fabricación, ya que se puede obtener un mayor desempeño de los elementos de máquinas si se conoce el comportamiento de los materiales que los conforman.

Trabajos previos demuestran cómo la modelación numérica se ha utilizado con resultados satisfactorios, como en [3] donde se realizó el estudio del contacto entre un indentador puntiagudo y materiales que desarrollan endurecimiento por deformación. Otro estudio basado en la simulación numérica de la técnica de indentación esférica permitió la determinación de la zona plástica curva esfuerzo-deformación uniaxial a través de las ecuaciones empíricas de Tabor [4]. Otro ejemplo en la simulación de la técnica de indentación por MEF, fue el análisis para el contacto elástico de un material recubierto con un indentador esférico rígido utilizando el paquete comercial ANSYS [5].

Este trabajo desarrolla una metodología para realizar análisis de indentación esférica la cual es validada y comparada con las ecuaciones analíticas de Hertz. A continuación se explica el proceso y las variables involucradas en el análisis de indentación. La figura 1 muestra de forma esquemática el contacto que exhiben los dos cuerpos elásticos, el plano y la esfera, donde  $a$  es el radio de contacto,  $d$  es la profundidad alcanzada por la esfera y  $P$  la carga aplicada.

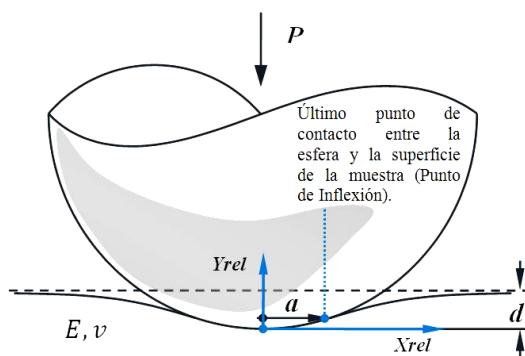


FIGURA 1. Representación esquemática del contacto esfera-plano.

La solución analítica para la carga en función del radio de contacto viene dada por la siguiente relación

$$P = \frac{4}{3} E^* R^{*1/2} d^{3/2} \quad (1)$$

Donde  $R^*$  y  $E^*$  son el radio y módulo de elasticidad reducidos, determinados por las siguientes relaciones

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (3)$$

Los subíndices 1 y 2 representan al plano y la esfera respectivamente.

Los estudios de Hertz proveen soluciones analíticas para el campo de los esfuerzos elásticos en el contacto esfera-plano para cualquier posición ubicada a una distancia  $z$  del punto de contacto [6], véase la figura 2.

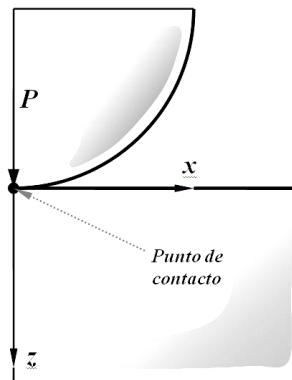


FIGURA 2. Sistema de referencia para las ecuaciones analíticas del esfuerzo.

Las soluciones propuestas se cumplirán bajo las siguientes suposiciones [7, 8]:

La esfera es rígida, el material del plano semi-infinito es homogéneo, las ecuaciones de comportamiento del material, está regida por la ley de Hooke generalizada (pequeñas deformaciones), las superficies en contacto son suficientemente lisas como para suponer que la

fricción es tan pequeña que puede despreciarse, y la superficie de contacto para el campo de presiones se supone elíptico.

Quedando las soluciones de la siguiente manera:

1. Campo de presiones

$$P(x) = P_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} \quad (4)$$

2. Esfuerzo en dirección del eje  $x$

$$\sigma_x = P_0 \left\{ - (1 + \nu) \left( 1 - \frac{z}{a} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{a}{z} \right) \right) + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1} \right\} \quad (5)$$

3. Esfuerzo en dirección del eje  $z$

$$\sigma_z = -P_0 \left( 1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1} \quad (6)$$

4. Esfuerzo cortante

$$\tau_{zx} = \frac{1}{2} (\sigma_z - \sigma_x) \quad (7)$$

Donde  $P_0$  representa la presión máxima en el punto de contacto entre la esfera y el plano,  $a$  es el radio de la superficie de contacto,  $z$  es la coordenada del punto y  $\nu$  es el módulo de Poisson del material del plano semi-infinito.

## Metodología

Para llevar a cabo la investigación se crea un modelo computacional del proceso de indentación normal, con indentador esférico, usando el método de elementos finitos (FEM). Mediante este método se plantea el proceso de indentación en 2D del cual se determina la curva carga vs desplazamiento. Finalmente, se validan los resultados obtenidos con las ecuaciones analíticas de Hertz y la distribución de presiones obtenida numéricamente. La herramienta computacional usada para realizar la simulación fue ABAQUS ®.

## El modelo

El proceso de indentación esférica presenta un eje de simetría geométrico y de cargas [9, 10]. Aprovechando esta condición se consideró un modelo axi-simétrico con el fin de minimizar los cálculos y el gasto computacional. Para una muestra con propiedades idénticas a la de un acero de la serie 4000 [11], se restringen los desplazamientos en los nodos del eje de axisimetría en la dirección 1 así como también la rotación

respecto a las direcciones 1, 2 y 3. Para el indentador las condiciones de borde fueron colocadas sobre el punto de referencia de la superficie rígida (indentador), restringiendo el desplazamiento en la dirección 1, y evitando la rotación respecto en cualquier eje. La aplicación de la carga fue colocada sobre el mismo punto, con componente vertical igual a la magnitud de la fuerza, generando compresión entre el indentador y la muestra. Entre Superficies, se consideró una interacción de contacto sin fricción. Véase la figura 3.

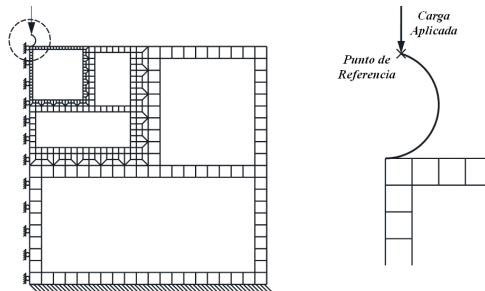


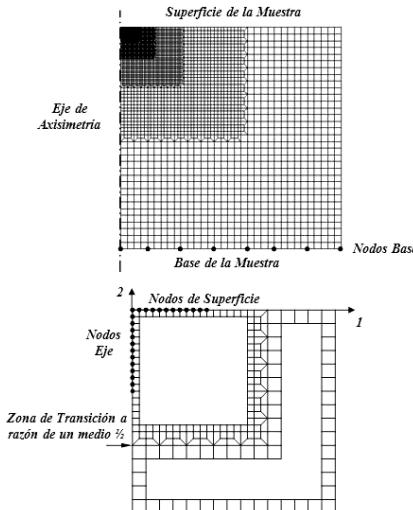
FIGURA 3. *Modelado geométrico de la indentación esférica.*

Las propiedades mecánicas del sustrato son las de un acero con un módulo de elasticidad de 200 GPa y un módulo de Poisson igual a 0,3 [11]. El indentador se consideró como analíticamente rígido, y con un radio igual a 50  $\mu\text{m}$ . La carga máxima aplicada fue de 100N.

La figura 4 muestra la malla estructurada que se utilizó. Para el mallado del sustrato se usó el elemento CAX4 (4 nodos, cuadrilátero linear y axisimétrico), ya que este elemento tiene la capacidad de representar grandes deformaciones y poseer una simetría axisimétrica [10, 12].

Cada elemento queda definido por cuatro nodos y cuatro puntos de integración y la formulación que define el comportamiento del problema corresponde con la habitual formulación Lagrangiana de los problemas de tensión-deformación donde se supone que el elemento se deforma conjuntamente con el material [13]. El método matemático que se emplea para llegar a la resolución del problema es el método de interpolación Gaussiana. Se realiza un refinamiento de la malla en el sector adyacente al contacto del indentador a razón de un medio (1/2). El objeto de los resultados es buscar la malla que mejor se adapte a las ecuaciones analíticas.

La convergencia numérica para la malla es llevada a cabo mediante el estudio de la estabilidad de los resultados obtenidos en comparación

FIGURA 4. *Modelado de la malla estructurada.*

a las ecuaciones analíticas disponibles, y observando además el comportamiento de la distribución del esfuerzo normalizado.

Las ecuaciones analíticas que serán comparadas con los resultados numéricos son las de la distribución de esfuerzos de Hertz normalizada:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r}{P_0} &= -(1 + \nu) \left[ 1 - \frac{z}{a} \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{a}{z} \right) \right] + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1}; \\ \frac{\sigma_z}{P_0} &= - \left( 1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1}; \quad \frac{\tau}{P_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_z}{P_0} - \frac{\sigma_r}{P_0} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Donde  $P_0$  es la presión máxima en el centro de la zona de contacto,  $z$  es la cota sobre la línea de axisimetría y  $a$  es el radio del área proyectada de la zona de contacto. La convergencia numérica del mallado para esta simulación es llevada a cabo por la comparación entre los resultados del MEF y las soluciones analíticas de Hertz.

## Simulaciones

Primero se determina la curva típica de indentación mediante simulación numérica y se compara con los resultados analíticos. Posteriormente se determina la distribución de presiones. En esta última aproximación será necesario obtener la variable indirecta  $a$  (radio de contacto) necesario en las expresiones analíticas de Hertz. Este dato es determinado extrayendo la curva que describe a la superficie deformada de la malla. A través de

la recopilación de datos se establece el punto de inflexión de la curva definida por la superficie deformada, es decir, el último punto de contacto entre la esfera y la superficie de la muestra, véase la figura 2.

Las simulaciones fueron llevadas a cabo para cuatro diferentes mallados del modelo, que van desde los 1022 nodos (malla con menos elementos), hasta 23529 nodos (malla con más elementos), esto con el fin de determinar la convergencia en el valor del error y seleccionar el mayado más óptimo para trabajos posteriores.

## Resultados

### Carga vs desplazamiento

Recordando la expresión analítica del contacto hertziano tenemos:

$$P = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{E\sqrt{D}}{1-\nu^2} h_s^{3/2} \quad (9)$$

El levantamiento de la curva analítica permite el estudio de la convergencia numérica de los resultados, al compararlos con los resultados numéricos. La tabla 1 muestra los valores de los resultados numéricos para la indentación esférica:

Profundidad de indentación para las diferentes mallas ensayadas profundidad $h$ [mm]				
Carga P [N]	1022 Nodos	4269 Nodos	13290 Nodos	23529 Nodos
10	0,002813798	0,002715592	0,002710942	0,002698649
20	0,004421661	0,004292822	0,004280558	0,004271634
30	0,006029628	0,005621034	0,005594577	0,005592422
40	0,007637705	0,006776469	0,006772918	0,006769059
50	0,008501162	0,007884809	0,007862053	0,007854981
60	0,009333423	0,008894535	0,008889326	0,008867232
70	0,010166178	0,009848793	0,009845607	0,009831650
80	0,010999449	0,010803390	0,010770338	0,010747940
90	0,011833261	0,011682832	0,011666205	0,011629695
100	0,012667640	0,012524944	0,012520018	0,012481437

TABLA 1. *Resultados numéricos para la profundidad de indentación para las diferentes mallas ensayadas.*

A continuación se presentan las curvas de Carga vs Desplazamiento del indentador a partir de los resultados de la tabla 1 comparados con los obtenidos mediante las ecuaciones de Hertz.

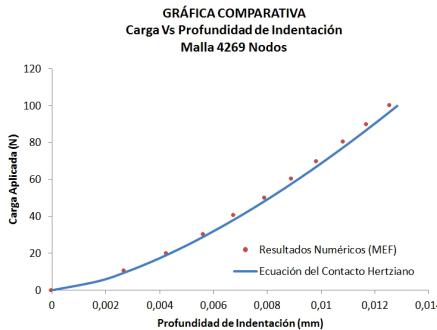


FIGURA 5. *Carga vs profundidad de indentación Brinell.*

El análisis de convergencia para el estudio se elaboró calculando el error entre los resultados analíticos y numéricos. Estos fueron graficados como se muestra a continuación.

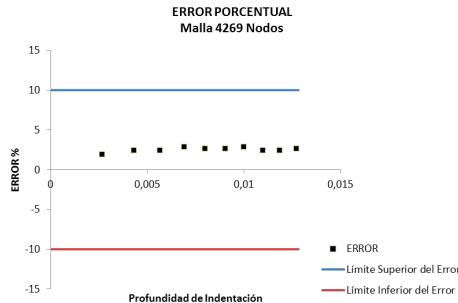


FIGURA 6. *Error porcentual para la profundidad de indentación.*

En las gráficas del error se puede observar que la solución converge rápidamente, logrando alcanzar un valor entre una banda aceptable desde un punto de vista numérico, donde para una malla de 4269 nodos el error se comporta estable en un valor promedio del 2,355 %. Bajo el mismo criterio de análisis la malla de 13290 nodos alcanza un error promedio de 2,536 % para la profundidad de indentación.

### Distribución normalizada de esfuerzos

Como se ha descrito en la metodología se recopilan datos para la superficie deformada. A continuación se presentan los resultados para los radios de contacto calculados a partir de las coordenadas de los nodos de la superficie deformada, los cuales servirán para la determinación de las curvas normalizadas de la distribución del esfuerzo.

Graficando las curvas de la distribución normalizada del esfuerzo, utilizando las ecuaciones 8 se obtienen las siguientes curvas:

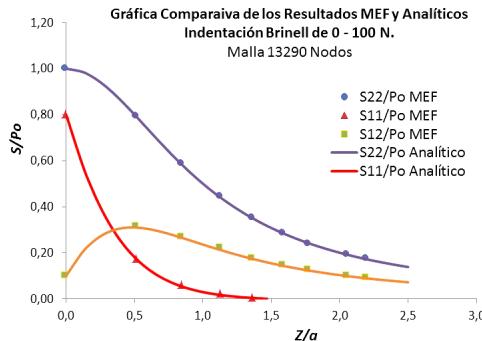


FIGURA 7. Distribución normalizada del esfuerzo.

Se observa una buena distribución de los puntos sobre la curva de la distribución normalizada del esfuerzo para la malla de 4269 nodos. Si bien el error alcanzado en la malla de 13290 es similar que para la malla de 4269 nodos en la curva de carga vs profundidad de indentación, se observa como los valores para la distribución normalizada del esfuerzo mejoran, esto se debe a que los valores para el radio de contacto calculados toman valores crecientes para cada carga como es de esperarse, no siendo así en la malla de 4269 nodos, donde para la carga de 100 N se obtuvo el mismo radio de contacto que para 90 N, (véase la tabla 2).

RADIO DE CONTACTO CALCULADO PARA LA SUPERFICIE DEFORMADA DE LAS DIFERENTES MALLAS ENSAYADAS				
Carga $P[N]$	MALLAS			
	1022 NODOS	4269 NODOS	13290 NODOS	23529 NODOS
10	0,0157	0,0122	0,0122	0,0114
20	0,0188	0,0152	0,0148	0,0144
30	0,0218	0,0169	0,0167	0,0166
40	0,0254	0,0182	0,0182	0,0181
50	0,0263	0,0195	0,0197	0,0195
60	0,0271	0,0212	0,0211	0,0213
70	0,028	0,0212	0,0212	0,0223
80	0,0288	0,0232	0,0227	0,0232
90	0,0297	0,0242	0,0237	0,024
100	0,0308	0,0242	0,0242	0,0247

TABLA 2. Radios de Contacto Calculados.

La figura 8 muestra el resultado del modelo de indentación Brinell.

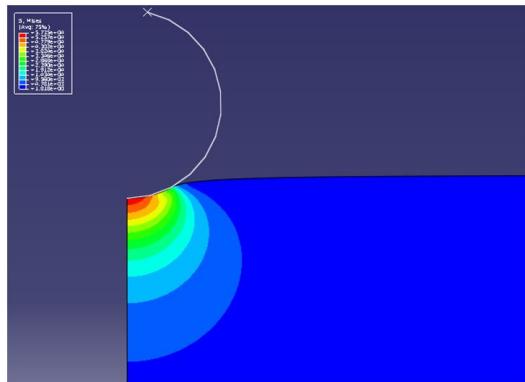


FIGURA 8. Campo de esfuerzos para malla de 13290 nodos.

## Discusión

De la convergencia en los resultados de las curvas de carga vs profundidad de indentación, se observa que el modelo logra una buena tendencia en todas las mallas ensayadas, aunque un análisis con un mallado pobre o con pocos elementos presenta cierta inestabilidad en el error, como en el caso de la malla con 1022 nodos, que presenta cierta inestabilidad en el error alcanzándose un valor máximo para los ensayos, de 9,645 %.

Se logra establecer que la malla de 13290 nodos es la que mejor se adapta a las ecuaciones analíticas del contacto hertziano, ya que aunque el error alcanzado es similar que para la malla de 4269 nodos en la curva de carga vs profundidad de indentación, se observa como los valores para la distribución normalizada del esfuerzo mejora, debido a que los valores para el radio de contacto calculados toman valores crecientes para cada carga como es de esperarse.

Este trabajo propone una metodología para determinar la dureza de los materiales de una forma más práctica en términos de tiempo y dinero ya que no se necesita de un laboratorio y materiales para ensayar. Además se puede entender mejor lo que sucede dentro del material ya que aparte de tener una interfaz gráfica el programa permite extraer el valor de cualquier variable [12] en cualquier posición para revisar algún dato que pueda ser de interés.

Este método puede extenderse para ser aplicado en otros tipos de ensayos de indentación, ya que solo cambiando la geometría del indentador se pueden realizar ensayos tipo Vickers, o Rocwell [14] en los que se esperaría una exactitud similar en los resultados que los llevados a cabo en este estudio.

Otra ventaja del método propuesto en este trabajo es que permite realizar análisis de muestras o sustratos recubiertos, que son usados en muchas aplicaciones donde se necesita mejorar las propiedades superficiales del material [15] ya que el programa permite definir diferentes tipos de materiales para diferentes grupos de elementos del modelo de estudio.

## Conclusiones

La utilización del MEF en la reproducción de la técnica de indentación esférica ha permitido modelar de manera satisfactoria a la curva típica de indentación (carga vs desplazamiento) y la distribución de esfuerzos, lográndose establecer las condiciones de borde para un análisis cuantitativo del problema y obtener la comparación con el modelo analítico.

De la convergencia en los resultados de la curva típica de indentación (carga vs profundidad de indentación), se observa que el modelo logra una buena tendencia, confirmando el comportamiento de la distribución normalizada del esfuerzo propuesta por Hertz.

La metodología presentada en este trabajo puede ser aplicada en otros tipos de ensayos de indentación (Vickers, o Rocwell). Además permite analizar muestras conformadas por más de un material, donde las ecuaciones de Herzt no pueden ser aplicadas; todo esto con igual exactitud en los resultados que los llevados a cabo en este estudio.

Finalmente es de gran importancia resaltar la practicidad de la metodología propuesta para realizar ensayos de indentación de manera virtual, y predecir así el comportamiento que tendrá determinado material en una prueba en laboratorio.

## Referencias

- [1] K. Jhonson, *Contact Mechanics* (Cambridge University Press, 1985) pp. 84–106.

- [2] A. Fischer, *Introduction to Contact Mechanics* (Springer, 2007) pp. 101–199.
- [3] M. Mata, M. Anglada, and J. Alcalá, Memorias del VIII Congreso Nacional de Propiedades Mecánicas de Sólidos , 513 (2002).
- [4] B. Kang, Z. Yao, and E. Barbero, Mech. Adv. Mater. and Struct. **13**, 129 (2006).
- [5] Y. Bao, G. Chai, X. Lou, and W. Hao, *Multiscaling Associated with Structural and Material Integrity under Elevated Temperature, International Fracture Mechanics Proceedings* (East China University of Science and Technology Publishing House, 2006) pp. 397–404.
- [6] R. Budynas and K. Nisbett, *Diseño en ingeniería mecánica de Shigley* (McGraw-Hill, 2008) pp. 117 – 121.
- [7] J. He and S. Veprek, Surf. Coat. Technol. **163-164**, 374 (2003).
- [8] J. M. Meza, C. A. Chaves, and J. M. Vélez, Dyna **73** (2006).
- [9] W. Yan, Q. Sun, and H.-Y. Liu, Mat. Sci. Eng. A **425**, 278 (2006).
- [10] D. Esqué de los Ojos, *Una ecuación de dureza unificada para ensayos de indentación esférica.*, Master's thesis, Universitat Politècnica de Catalunya (2006).
- [11] MATWEB, “Overview of materials for aisi 4000 series steel.” (Consultada el 10 de mayo de 2020).
- [12] ABAQUS, “Abaqus analysis user’s manual (v 6.6),” (Consultada el 8 de mayo de 2020).
- [13] Z. A. da Fonseca Lopes, *El Método de los elementos finitos: Una introducción* (Fondo Editorial Biblioteca Universidad Rafael Urdaneta, 2011).
- [14] M. R. VanLandingham, J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. **108**, 249 (2003).
- [15] J. He and S. Veprek, Surf. Coat. Technol. **163-164**, 374 (2003).