

INTERCONEXIÓN ENTRE LAS FUNCIONES DE ONDA EN REPRESENTACIONES DE COORDENADAS, IMPULSOS Y ESTADOS COHERENTES

D. Campos

Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá, Colombia, S.A.

Resumen

Encontramos una expansión natural para la representación de estados coherentes de un estado mecánico cuántico, en la cual la función de onda en representación de coordenadas y sus derivadas intervienen como coeficientes desconocidos de la expansión. Por aplicación de una regla apropiada es posible deducir resultados similares para la función de onda en representación de impulsos y sus derivadas.

Abstract

We find a natural expansion for coherent-state representation of a quantum-mechanical state, in which position-space wave function and its derivatives appear as the unknown coefficients of the expansion. By application of a suitable rule, it is possible to deduce similar results for momentum-space wave function and its derivatives.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de lo que hoy en día se denomina “estado coherente” aparece por primera vez en un trabajo de Schrödinger en 1926 relacionado con la evolución temporal de paquetes de onda del oscilador armónico. Sin embargo, las aplicaciones modernas de esta idea sólo comenzaron cuando Glauber [1] construyó en 1963 los estados propios del operador destrucción e introdujo en la óptica cuántica el término de “estados coherentes”. En las últimas décadas estos estados y sus generalizaciones han sido estudiadas de manera intensiva por muchos autores [2, 3]. El objetivo principal de este artículo consiste en utilizar los estados coherentes para definir funciones de onda en el espacio de fase y establecer relaciones de conexión de ellas con las representaciones tradicionales de coordenadas e impulsos.

Consideramos en general un sistema mecánico cuántico de f grados de libertad (ver apéndice), pero usaremos en el cuerpo del artículo una notación directamente aplicable al caso de un grado de libertad ($f = 1$). Designamos por \hat{q} y \hat{p} los operadores de posición e impulso, los cuales obedecen las relaciones de conmutación de Heisenberg y permiten definir operadores destrucción y creación, según las relaciones $\hat{a} := \kappa_0 \hat{q} + i \chi_0 \hat{p}$, $\hat{a}^+ := \kappa_0 \hat{q} - i \chi_0 \hat{p}$. Aquí

$$\kappa_0 := \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{q_0}, \quad \chi_0 := \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{p_0}$$

son cantidades auxiliares, donde q_0 y p_0 representan unidades de longitud e impulso restringidas por la condición $q_0 p_0 = \hbar$. El estado coherente de Glauber [4], que se designa como $|z\rangle$, representa el estado propio del operador destrucción \hat{a} correspondiente al valor propio z . Al calcular los valores esperados de los operadores posición e impulso obtenemos las relaciones

$$q := \langle z | \hat{q} | z \rangle = \frac{q_0}{\sqrt{2}} (z + z^*), \quad p := \langle z | \hat{p} | z \rangle = -i \frac{p_0}{\sqrt{2}} (z - z^*) \quad (1)$$

las cuales permiten interpretar q y p como valores esperados de los operadores posición e impulso con respecto al estado coherente $|z\rangle$, donde z es el número complejo $z = \kappa_0 q + i \chi_0 p$.

Es conveniente definir estados coherentes pq y qp , ligados con los estados coherentes de Glauber por medio de las relaciones

$$|p, q\rangle := w\left(\frac{1}{2} q, p\right) |z\rangle, \quad (2a)$$

$$|q, p\rangle := w^*\left(\frac{1}{2} q, p\right) |z\rangle = w^*(q, p) |p, q\rangle, \quad (2b)$$

donde $w(q, p)$ es el factor de fase

$$w(q, p) := \exp\left(\frac{i}{\hbar} q p\right), \quad w^*(q, p) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} q p\right). \quad (2c)$$

Los estados coherentes forman un conjunto sobrecompleto que permite descomponer el operador unidad en la forma

$$\hat{1} = \int d\Gamma |p, q\rangle \langle p, q| = \int d\Gamma |q, p\rangle \langle q, p|, \quad (3)$$

donde $d\Gamma := dq dp / (2\pi\hbar)^f$. La expresión (3) es una forma alternativa a las descomposiciones convencionales realizadas con base en los kets propios de los operadores posición e impulso, los cuales satisfacen las ecuaciones de valores propios $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle, \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$

Como consecuencia de las relaciones de (3) arriba citadas, un estado arbitrario mecánico cuántico $|\Psi\rangle$ se puede expandir en términos de estados $|q\rangle, |p\rangle, |q, p\rangle$ o $|p, q\rangle$. Esto es, al mismo estado $|\Psi\rangle$, se le pueden asociar diferentes funciones de onda:

$$\Psi(q) = \langle q | \Psi \rangle \quad \text{representación } q \quad (4a)$$

$$\tilde{\Psi}(p) = \langle p | \Psi \rangle \quad \text{representación } p \quad (4b)$$

$$\Psi(p, q) = \langle p, q | \Psi \rangle \quad \text{representación } pq \quad (4c)$$

$$\Psi(q, p) = \langle q, p | \Psi \rangle = w(q, p) \Psi(p, q), \quad \text{representación } qp. \quad (4d)$$

Cada una de estas funciones contiene exactamente la misma información física, pero una representación particular puede ser especialmente apropiada para interpretar propiedades específicas de un sistema físico dado, o puede ofrecer ventajas para cálculos numéricos o analíticos. En el presente artículo, q y p son variables de posición e impulso. Las funciones de onda $\Psi(q, p)$ y $\Psi(p, q)$ se distinguen por sus argumentos y difieren entre si por el factor de fase $w(q, p)$.

En lo que sigue estudiaremos algunas propiedades de las representaciones qp y pq , las cuales denominaremos también como funciones de onda en el espacio de fase o representaciones de estados coherentes. Estableceremos algunas fórmulas de conexión de ellas con las representaciones de coordenadas y de impulsos.

2. RELACIONES FUNDAMENTALES

En primer lugar, queremos establecer relaciones bien conocidas que conectan las funciones de onda en el espacio de fase con las funciones de onda en representación de coordenadas e impulsos. Para esto, como punto de partida introducimos las funciones auxiliares

$$M(q) := \left(\sqrt{\pi} q_0\right)^{-f/2} \exp\left[-\left(\kappa_0 q\right)^2\right], \quad (5a)$$

$$\tilde{M}(p) := \left(\sqrt{\pi} \hbar \right)^{-f/2} \exp \left[- \left(\chi_0 p \right)^2 \right], \quad (5b)$$

las cuales están relacionadas entre si por medio de la transformada de Fourier

$$\tilde{M}(p) := \left(2\pi \hbar \right)^{-f/2} \int w^*(q', p) M(q') dq'. \quad (5c)$$

Los núcleos de las transformaciones que convierten de una representación a otra están dadas por [5]

$$\langle q | p \rangle = \langle q | p \rangle^* = \left(2\pi \hbar \right)^{-f/2} w(q, p), \quad (6a)$$

$$\langle p | q', p' \rangle = w^*(q', p') \langle p | p', q' \rangle = w^*(p, q') \tilde{M}(p - p'), \quad (6b)$$

$$\langle q | p', q' \rangle = w(q, p') M(q - q'), \quad (6c)$$

donde (6a) corresponde a la transformación entre impulsos y coordenadas. Las ecuaciones (6b, c) se obtienen al tener en cuenta (2a,b) y elegir en las ecuaciones 5(8.18) y 5(8.19) de [5] el factor de fase $\mu = -(1/2) qp$.

Si formamos el producto escalar de un estado arbitrario $|\psi\rangle$ con un bra de impulso o de posición, $\langle p |$ o $\langle q |$, y usamos las relaciones (3), encontramos

$$\tilde{\Psi}(p) = \int w^*(p, q') \tilde{M}(p - p') \Psi(q', p') d\Gamma', \quad (7)$$

$$\Psi(q) = \int w(q, p') M(q - q') \Psi(p', q') d\Gamma'. \quad (8)$$

Estas expresiones muestran que a partir de las funciones de onda en el espacio de fase podemos deducir las representaciones de impulsos y de coordenadas asociadas con el estado mecánico cuántico $|\psi\rangle$, las cuales están conectadas entre si por una transformación de Fourier con núcleo (4a).

Las fórmulas (7) y (8) exhiben un importante grado de simetría con respecto a la notación. Si tenemos en cuenta (2c), las expresiones (7) y (8) sólo difieren en el signo (+ o -) que precede a la unidad de los números imaginarios (i) en los exponentes de las funciones $w(q, p)$ y $w^*(q, p)$, y en el cambio del nombre de las variables: $i \leftrightarrow -i$, $q \leftrightarrow p$, $p \leftrightarrow q$, etc. En consecuencia, en caso de haber

determinado fórmulas asociadas con la representación de coordenadas $\Psi(q)$, podemos formalmente deducir fórmulas válidas para la representación de impulsos $\tilde{\Psi}(p)$, o viceversa. Para abreviar, designaremos este procedimiento como *transformación* $q \leftrightarrow p$.

3 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES DE ONDA

En esta sección presentamos los resultados fundamentales de este artículo. En primer lugar centramos nuestra atención en la evaluación de la función de onda en el espacio de fase, $\Psi(q, p) = w(q, p) \langle p, q | \hat{1} | \Psi \rangle$, empleando la resolución de la unidad con kets de posición:

$$\begin{aligned} \Psi(q, p) &= \int w^*(q' - q, p) M(q' - q) \Psi(q') dq' \\ &= \int w^*(q', p) M(q') \Psi(q' + q) dq'. \end{aligned} \tag{9}$$

Al usar un desarrollo de Taylor en la forma

$$\Psi(q' + q) = \exp\left(q' \frac{\partial}{\partial q}\right) \Psi(q) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (q')^m \Psi^{(m)}(q), \tag{10}$$

es evidente que la función de onda $\Psi(q, p)$ admite el desarrollo

$$\Psi(q, p) = (2\pi \hbar)^{f/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \Psi^{(m)}(q) \tilde{\mathbb{J}}_m(p), \tag{11}$$

donde

$$\Psi^{(m)}(q) := \left(\partial / \partial q\right)^m \Psi(q) \tag{12}$$

Las funciones $\tilde{\mathbb{J}}_m(p)$ que intervienen en (11) se definen como sigue:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{J}}_m(p) &:= (2\pi \hbar)^{-f/2} \int w^*(q', p) M(q') (q')^m dq' \\ &= (i \hbar \partial / \partial p)^m \tilde{\mathbb{J}}_0(p) = \left(-i \frac{q_0}{\sqrt{2}}\right)^m H_m(\chi_0 p) \tilde{\mathbb{M}}(p), \end{aligned} \tag{13}$$

donde $H_m(\chi_0 p)$ designa el polinomio de Hermite de orden m . Para obtener las expresiones anteriores hemos aplicado la relación

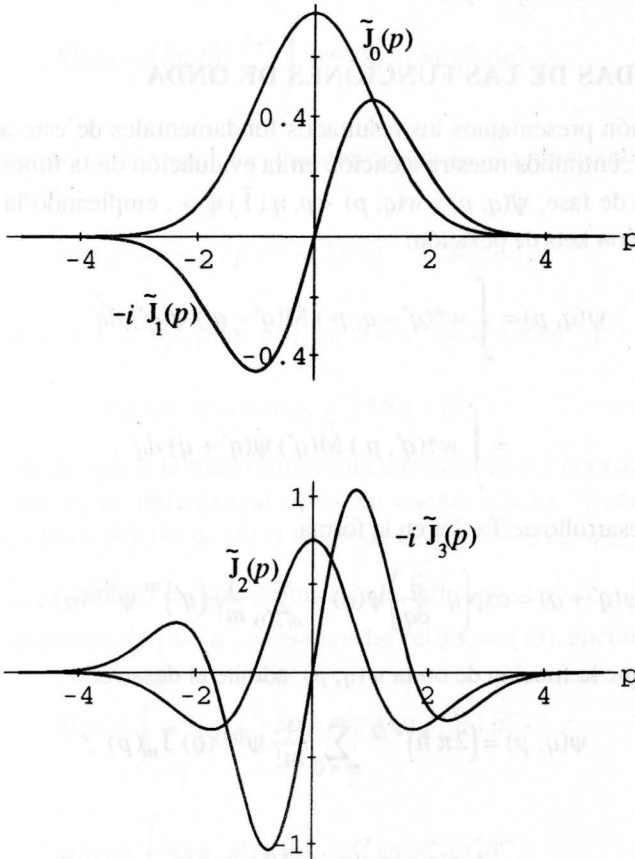


Figura 1. Gráfico de las funciones $\tilde{J}_m(p)$ definidas en (13), para valores de $m = 0, 1, 2, 3$. En el caso de subíndices impares, al multiplicar por $-i$ obtenemos la parte puramente imaginaria. Nótese que el subíndice identifica el número de nodos de la función $\tilde{J}_m(p)$.

$$H_m(y) = (-1)^m \exp(y^2) (\partial / \partial y)^m \exp(-y^2) \tag{14}$$

y la identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2 - \beta x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right), \quad (15)$$

válida para números complejos β y α , $\text{Re}(\alpha) > 0$. El comportamiento de las funciones $\tilde{J}_m(p)$ se muestra en la figura 1, donde se observa que el rótulo m está asociado con el número de nodos de esta función.

Una propiedad sobresaliente de la función de onda $\psi(q, p)$ está en el hecho de que cada término de la expansión (11) se forma como el producto de una función de p por una función de q ; esto es, cada sumando es de la forma $\psi^{(m)}(q) \tilde{J}_m(p)$. La función $\tilde{J}_m(p)$ se conoce perfectamente y desempeña el papel de un conjunto base, mientras que la función $\psi^{(m)}(q)$ actúa como coeficiente de la expansión asociada con el estado particular, $|\psi\rangle$. Este resultado es especialmente llamativo debido a que, en general, un conjunto base en el espacio de fase depende normalmente tanto de q como de p .

Con el fin de calcular los coeficientes de la expansión (11) aplicamos ahora procedimientos estándar. Empleamos las relaciones de ortogonalidad de los polinomios de Hermite,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) H_\eta(y) H_m(y) dy = 2^\eta \eta! \sqrt{\pi} \delta_{\eta m} \quad (16)$$

y encontramos que es posible utilizar la función de onda $\psi(q, p)$ para calcular las derivadas de la función de onda en representación de coordenadas, como sigue:

$$\psi^{(n)}(q) = A_\eta (2\pi\hbar)^{-f/2} \int \psi(q, p) H_\eta(\chi_0 p) dp, \quad (17)$$

donde A_η es la cantidad auxiliar

$$A_\eta := (2\sqrt{\pi} p_0)^{-f/2} (-i\sqrt{2} q_0)^{-\eta}. \quad (18)$$

Resultados completamente análogos se pueden deducir para la función de onda pq . Para obtenerlos es suficiente emplear la transformación $q \leftrightarrow p$ descrita previamente. Se tiene

$$\psi(p, q) = (2\pi\hbar)^{f/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \tilde{\Psi}^{(m)}(p) \tilde{J}_m(q), \quad (19)$$

donde definimos

$$J_m(q) := \left(+i \frac{pb}{\sqrt{2}} \right)^m H_m(\kappa_0 q) M(q). \quad (20)$$

Similarmente, las derivadas de la función de onda en representación de impulsos se determinan por medio de las relaciones

$$\tilde{\psi}^{(\eta)}(p) = \tilde{A}_\eta (2\pi\hbar)^{-f/2} \int \psi(p, q) H_\eta(\kappa_0 q) dq, \quad (21)$$

donde

$$\tilde{A}_\eta := (2\sqrt{\pi} q_0)^{-f/2} (+i\sqrt{2} p_0)^{-\eta}. \quad (22)$$

Desde el punto de vista práctico, los resultados de esta sección sugieren que las funciones de onda en el espacio de fase son convenientes para calcular las derivadas de las funciones de onda q y p a cualquier orden (digamos, orden η -ésimo). En efecto, al integrar sobre el espacio de impulsos el producto del polinomio de Hermite $H_\eta(\chi_0 p)$ por $\psi(q, p)$, se obtiene la η -ésima derivada de la función de onda en representación de coordenadas. Un procedimiento completamente análogo, con la función de onda $\psi(p, q)$, permite calcular la η -ésima derivada de la función de onda en representación de impulsos. En el caso particular $\eta = 0$, el polinomio de Hermite toma el valor uno, de tal manera que las amplitudes de probabilidad para la posición y para el impulso (funciones de onda q y p) se obtienen por una “proyección” de $\psi(q, p)$ y de $\psi(p, q)$ sobre los subespacios respectivos.

3. UN COMENTARIO SOBRE EL FACTOR DE FASE $w(q, p)$

Para conectar los estados coherentes pq y qp , la elección en (1) de un factor de fase apropiado fue decisiva para obtener la transformación $q \leftrightarrow p$. Sin embargo, la misma regla de transformación se habría podido obtener, si hubiésemos elegido $|p, q\rangle = |z\rangle$ y $|q, p\rangle = w^*(q, p)|z\rangle$. Con el fin de entender la elección (1) para $|p, q\rangle$, observamos que el estado coherente de Glauber $|z\rangle$ se puede desarrollar en términos de los estados propios $|n\rangle$ del operador número [1, 4],

$$|z\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} z z^*\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (23)$$

Sólo cuando fijamos los estados $|p, q\rangle$ imponiendo la definición $|p, q\rangle := w(q/2, p)|z\rangle$, las ecuaciones (17) y (21), con $\eta = 0$, reproducen exactamente las funciones de onda del oscilador armónico en representaciones de coordenadas e impulsos, tal como lo demostró el autor en [6],

$$\varphi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} M(q) H_n(\kappa q), \quad (24)$$

$$\tilde{\varphi}_n(p) = (-i)^n \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \tilde{M}(p) H_n(\chi p). \quad (25)$$

La función de onda pq que describe el n -ésimo estado propio de este sistema es

$$\Phi_n(q, p) := \langle p, q | n \rangle$$

$$= \left[w^*(q, p) M(p, q) \right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q}{q_0} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{p}{p_0} \right]^n, \quad (26a)$$

donde $M(p, q)$ es la función auxiliar

$$M(p, q) := \exp(-z z^*) = (\pi \hbar)^{1/2} \tilde{M}(p) M(q). \quad (26b)$$

4. UN EJEMPLO: PARTÍCULA LIBRE EN UNA CAJA

En lo que sigue consideramos una partícula libre, de masa μ , dentro de una caja unidimensional $0 \leq q \leq a$, de tal manera que los valores propios están dados por

$$\epsilon_n = \left[\frac{\pi \hbar}{\sqrt{2 \mu} a} \right]^2 n^2, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots, \quad (27)$$

y las correspondientes funciones propias adoptan la forma

$$\varphi_n(q) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n \pi q}{a}\right), \quad 0 \leq q \leq a. \quad (28)$$

Se quiere determinar la función de onda qp , la cual representa en el espacio de fase el n -ésimo estado propio del sistema. Después del cambio $\psi(q, p) \rightarrow \varphi_n(q, p)$, separamos en (11) las contribuciones debidas a valores pares e impares del índice de suma, $(2m)$ y $(2m+1)$, y usamos las siguientes expresiones para calcular las derivadas de la función de onda en representación de coordenadas (para $m = 1, 2, 3, \dots$):

$$\varphi_n^{(2m)}(q) = (-1)^m \left(\frac{n\pi}{a}\right)^{2m} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi q}{a}\right), \quad (29a)$$

$$\varphi_n^{(2m+1)}(q) = (-1)^m \left(\frac{n\pi}{a}\right)^{2m+1} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{n\pi q}{a}\right). \quad (29b)$$

Al reemplazar estas expresiones en (11) y utilizar (13) obtenemos que la función de onda $\varphi_n(q, p)$ se expresa en términos de dos sumas infinitas, las cuales se pueden evaluar mediante las funciones generatrices 5.6.2 de [7] o la fórmula 4.9.3 de [8],

$$\exp(-z^2 + 2xz) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(x)}{m!} z^m, \quad (30a)$$

$$\exp(-z^2) \cos(i2xz) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_{2m}(x)}{(2m)!} z^{2m}, \quad (30b)$$

$$-i \exp(-z^2) \sin(i2xz) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_{2m+1}(x)}{(2m+1)!} z^{2m+1}, \quad (30c)$$

donde el número real x y el número complejo z son arbitrarios, $|z| < \infty$, y $H_m(x)$ representa el polinomio de Hermite de orden m . En el presente ejemplo identificamos los parámetros x y z con los valores $x = \chi_0 p$, $z = n\pi q_0 / (\sqrt{2} a)$.

Ahora bien, al emplear las identidades $\sin(iz) = i \sinh z$, $\cos(iz) = \cosh z$ y $\sin(x - iy) = \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$, obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi_n(q, p) = (2\pi\hbar)^{1/2} \sqrt{\frac{2}{a}} \exp\left(-\left(\frac{n\pi q_0}{\sqrt{2} a}\right)^2\right) \tilde{M}(p) \times \\ \sin\left(\frac{n\pi q}{a} - i \frac{n\pi q_0}{a} \frac{p}{p_0}\right), \end{aligned} \quad (31)$$

donde $\tilde{M}(p)$ es la función gaussiana definida por (5b). La figura 2 muestra el comportamiento típico del módulo al cuadrado de esta función para los estados $n = 1$ y $n = 2$. La cantidad $|\varphi_n(q, p)|^2 d\Gamma$ representa la probabilidad de encontrar el sistema físico en un estado coherente $|z\rangle := |\kappa_0 q + i\chi_0 p\rangle$ tal que el correspondiente estado clásico pertenece al elemento de volumen $d\Gamma$ centrado alrededor del punto (q, p) del espacio de fase.

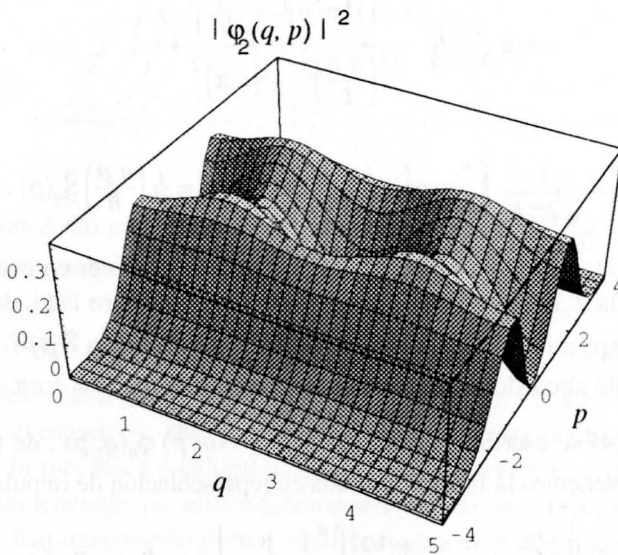
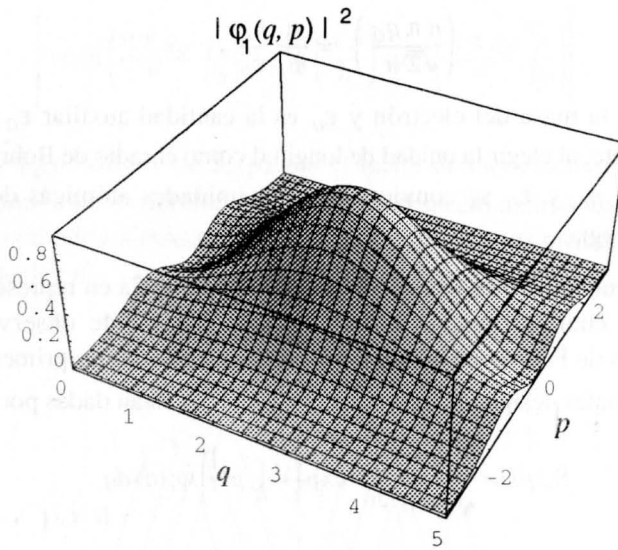


Figura 2. Módulo al cuadrado de $\varphi_n(q, p)$ para $n=1$ y $n=2$. Las gráficas se han generado para $m = m_e$ y $a = 5 a_0$. Las variables q y p se expresan en unidades atómicas.

Obsérvese que el argumento de la exponencial que precede en (31) a la función $\tilde{M}(p)$ se puede escribir en términos de la energía, en virtud de la identidad

$$\left(\frac{n \pi q_0}{\sqrt{2} a} \right)^2 = \frac{\mu}{m_e} \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_0},$$

donde m_e es la masa del electrón y ε_0 es la cantidad auxiliar $\varepsilon_0 := p_0^2 / m_e$. Incidentalmente, al elegir la unidad de longitud como el radio de Bohr ($q_0 = a_0$), entonces q_0 , p_0 y ε_0 se convierten en las unidades atómicas de longitud, impulso y energía.

En lo que sigue queremos determinar la función de onda en representación de impulsos, la cual se obtiene de (31), (21) y (4). Es de observar que las transformadas de Fourier de la función de onda $\varphi_n(q)$ y de su primera derivada $\varphi_n^{(1)}(q)$, las cuales designamos como $\mathfrak{S}_n(p)$ y $\check{\mathfrak{C}}_n(p)$, están dadas por

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n(p) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_0^a \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p q\right) \varphi_n(q) dq \\ &= n \pi \sqrt{\frac{a}{\pi\hbar}} \frac{(-1)^n \exp\left(-i \frac{a p}{\hbar}\right) - 1}{\left(\frac{a p}{\hbar}\right)^2 - (n \pi)^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\check{\mathfrak{C}}_n(p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_0^a \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p q\right) \varphi_n^{(1)}(q) dq = \frac{i}{a} \left(\frac{a p}{\hbar}\right) \mathfrak{S}_n(p), \quad (33)$$

donde la última igualdad surge de integrar por partes y tener en cuenta que la función de onda $\varphi_n(q)$ se anula en $q = 0$ y en $q = a$. Por otro lado, de (32) y de la identidad $\exp(\pm i n \pi) = (-1)^n$ se concluye que la función $\mathfrak{S}_n(p)$ tiene buen comportamiento alrededor de los impulsos p' tales que $a p' / \hbar = \pm n \pi$.

La ecuación (4) se escribe como $\varphi_n(p, q) = w^*(q, p) \varphi_n(q, p)$, de tal manera que de (21) obtenemos la función de onda en representación de impulsos,

$$\check{\Phi}_n(p) = \left(2\sqrt{\pi} q_0 (2\pi\hbar)\right)^{-1/2} \int_0^a \varphi_n(p, q) dq = \check{\mathfrak{F}}_n(p) \mathfrak{S}_n(p), \quad (34)$$

donde

$$\check{\mathfrak{F}}_n(p) := \left(\sqrt{\pi} p_0\right)^{1/2} \exp\left(-\left(\frac{n \pi q_0}{\sqrt{2} a}\right)^2\right) \check{\mathfrak{M}}(p) \times$$

$$\left[\cosh \left(\frac{n \pi q_0}{a} \frac{p}{p_0} \right) + \frac{1}{n \pi} \left(\frac{a p}{\hbar} \right) \sinh \left(\frac{n \pi q_0}{a} \frac{p}{p_0} \right) \right]. \quad (35)$$

La función $\tilde{\Phi}_n(p)$ difiere de $\tilde{S}_n(p)$ por el factor de modulación $\tilde{F}_n(p)$, el cual privilegia unos valores del impulso lineal con respecto a otros. En la figura 3 se muestra el comportamiento típico de esta función para los primeros valores del número cuántico n .

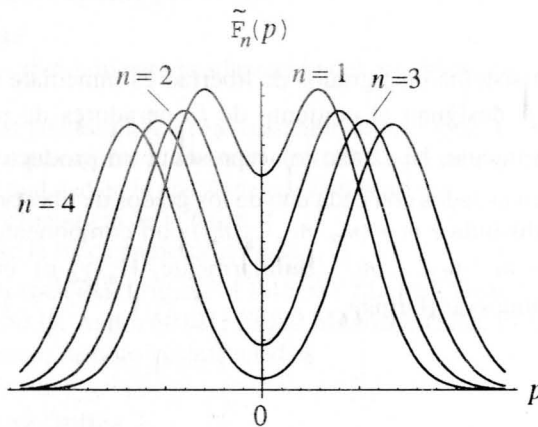


Figura 3. Comportamiento del factor de modulación $\tilde{F}_n(p)$ para los primeros valores del número cuántico n .

5. DISCUSIÓN

La mecánica clásica y la mecánica cuántica se basan en estructuras matemáticas diferentes: el espacio de fase y el espacio de Hilbert, respectivamente. Desde los inicios de la mecánica cuántica ha existido el interés de describir esta teoría mediante un lenguaje que utilice funciones definidas en el espacio de fase. Para este fin se han introducido pseudo distribuciones de probabilidad, tal como la función de Wigner y la función de Husimi [9], las cuales tienen la particularidad de ser funciones reales que se asemejan en algunos aspectos a la función de distribución de la mecánica estadística clásica.

A diferencia de las funciones de distribución arriba mencionadas, en el presente trabajo hemos empleado la representación de estados coherentes, la cual permite trabajar con amplitudes de probabilidad definidas en el espacio de fase, tal como $\psi(q, p)$ o $\psi(p, q)$. En este artículo, un resultado importante está en el hecho de

haber demostrado las relaciones (11) y (19), las cuales ponen de manifiesto la manera como las funciones de onda citadas están relacionadas con las representaciones habituales de coordenadas e impulsos. Por otra parte, si por un método independiente (por ejemplo, solucionando una ecuación de movimiento) se logra determinar la función de onda $\psi(q, p)$ o $\psi(p, q)$, entonces las ecuaciones (17) y (21) se convierten en procedimientos eficientes para evaluar las derivadas de las funciones de onda en representaciones de coordenadas e impulsos, cantidades indispensables para determinar valores esperados.

APÉNDICE

La extensión a un sistema de f grados de libertad es inmediata si se tiene en cuenta que \hat{q} y \hat{p} designan el conjunto de f operadores de posición y de impulso, respectivamente. El estado $|z\rangle$ representa un producto directo de f estados coherentes asociados con cada uno de los grados de libertad. El índice de suma m es un multi-índice $m = (m_1, m_2, \dots, m_f)$ con componentes enteras no negativas y $m! = m_1! m_2! \dots m_f!$. Similarmente, $H_m(\chi_0 p)$ en (13) es un producto de polinomios de Hermite.

6. Bibliografía

- [1] Glauber R J 1963 "Coherent and Incoherent States of the Radiation Field", *Phys. Rev.* **131** 2766.
- [2] Klauder J R y B S Skagerstam, ed. 1985 *Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics*, World Scientific, Singapore
- [3] Zhang W M, D H Feng y R Gilmore 1990 "Coherent states: Theory and some applications", *Rev. Mod. Phys.* **62** 867.
- [4] Klauder J R y E C G Sudarshan 1968 *Fundamentals of Quantum Optics*, Benjamin, New York.
- [5] Campos D 1989 *Teoría de Sistemas Cuánticos*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.
- [6] Campos D 1992 "Funciones de onda en el espacio de fase", *Momento* **6** 3.
- [7] Magnus, W, F Oberhettinger y R J Soni 1966 *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, Springer, New York.
- [8] Lebedew N N 1973 *Spezielle Funktionen und ihre Anwendung*, B I Wissenschaftsverlag, Zürich.
- [9] Hillery M *et al* 1984 "Distribution Functions in Physics: Fundamentals", *Phys. Rep.* **106** (3) 121.