

MOMENTO 57  
Julio-diciembre 2018

**Influencia de las colisiones atómicas en las resonancias sub-Doppler de la espectroscopia de reflexión selectiva en la línea  $D_2$  del cesio**  
*Influence of atomic collisions in the sub-Doppler resonances of selective reflection spectroscopy on the line  $D_2$  of cesium*  
Reynaldo Reyes, Marcos Oriá, Luis Mosquera ..... 1

**Acondicionamiento del campo magnético ultra bajo en un equipo de IRM para uso híbrido en medicina nuclear**  
*Low field MRI set up and design for nuclear medicine hybrids purposes*  
Esteban D. Posada-Díaz, Andrea Abril, Eduardo A. Mójica-Nava, Luis Agulles-Pedrós... 6

**Confirmación diagnóstica de la evaluación del trazado del monitoreo fetal electrónico a partir de la probabilidad y la relación S/k de la entropía**  
*Diagnostic confirmation of the evaluation of the tracing of electronic fetal monitoring based on probability and the S/k ratio of entropy*  
Yolanda Soracipa, Javier Rodríguez, Marcos Castillo ..... 27

**Implementation of an algorithm for square root computation in an FPGA array by using fixed point representation**  
*Implementación del algoritmo para el cálculo de la raíz cuadrada en un arreglo FPGA usando representación de punto fijo*  
Jorge H. López, Johans Restrepo, Jorge E. Tobón ..... 41

**Caracterización de películas delgadas de AlGaAs obtenidas por magnetron sputtering RF**  
*Characterization of AlGaAs thin films prepared by RF magnetron sputtering*  
Juan D. Losada Losada, Álvaro Pulzara Mora ..... 50

**Numerical solution of Mathisson-Papapetrou-Dixon equations for spinning test particles in a Kerr metric**  
*Solución numérica de las ecuaciones de Mathisson-Papapetrou-Dixon para partículas de prueba con espín en una métrica de Kerr*  
Nelson Velandia, Juan M. Tejeiro..... 60



Publicación admitida en:

SciELO Colombia

Fuente Académica Premier (EBSCO)

Índice Nacional de Publicaciones Seriadas, Científicas y Tecnológicas de Colciencias PUBLINDEX

Latindex Sistema Regional de Información en línea para revistas Científicas de América Latina, Caribe, España y Portugal.

Julio-diciembre 2018

MOMENTO - Revista de Física

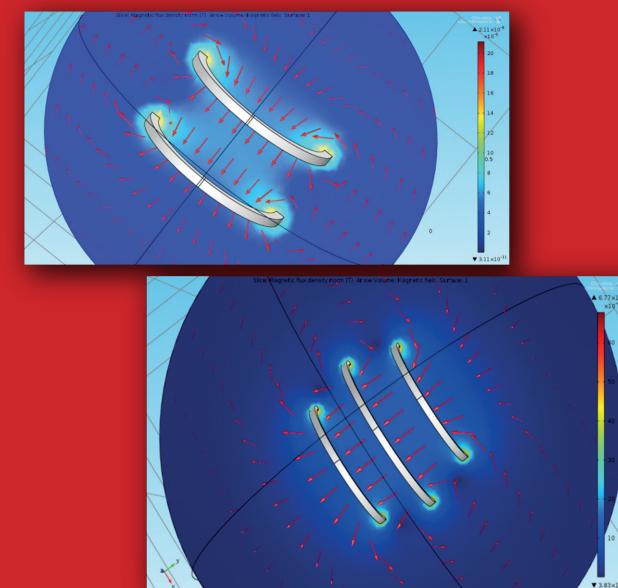
Número 57

ISSN 0121-4470

# MOMENTO

Revista de Física

No. 57  
JUL-DIC  
2018



Simulación de la densidad de flujo magnético en el arreglo de Helmholtz y Maxwell

Facultad de Ciencias  
Sede Bogotá



# MOMENTO

*Revista de Física*

Departamento de Física  
Universidad Nacional de Colombia  
Bogotá, Colombia

La revista MOMENTO publica semestralmente resultados originales inéditos de investigación básica y aplicada en diversas áreas de la física, así como artículos de reflexión, revisión y cortos acerca del estado actual de los problemas más activos de la física, tales como:

- Ciencia e Ingeniería de Materiales.
- Física del Estado Sólido.
- Física de altas energías.
- Óptica.
- Física Médica y Biofísica.
- Geofísica.
- Física Nuclear.
- Fisicoquímica.
- Caos y complejidad.
- Epistemología y Filosofía de la Física.
- Nanociencias y Nanotecnología

MOMENTO se puede recibir:

- A través de canje con publicaciones similares.

Más información en <http://www.revistas.unal.edu.co/index.php/momento>



MOMENTO Revista de Física de la Universidad Nacional de Colombia se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución - Sin derivar 4.0 Internacional. Ésta licencia permite la redistribución, comercial o no comercial, siempre y cuando la obra circule íntegra y sin cambios, donde indique su autor y su primera publicación en esta revista..

ISSN 0121-4470

# MOMENTO

Revista de Física

No. 57

JUL-DIC  
2018

#### Editor

Alvaro Mariño, Dr. rer. nat. *Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.*

#### Comité Editorial

Noboru Takeuchi, Ph.D. *Departamento de Nanoestructuras, Centro de Nanociencias y Nanotecnología, Universidad Nacional Autónoma de México. Ensenada, México.*

Andrés Rosales, Dr. Sc. *Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia. Manizales, Colombia.*

Eval Baca Miranda, Dr. Sc. *Departamento de Física, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Universidad del Valle, Colombia.*

Diego Restrepo Quintero, Dr. Sc. *Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Antioquia, Colombia.*

#### Comité Científico

Ángela Camacho, Dr. rer. nat. *Departamento de Física, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.*

Hernán Sánchez, Dr. rer. nat. *Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.*

Diógenes Campos, Dr. rer. nat. *Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, Bogotá, Colombia.*

Fernando Cristancho, Dr. rer. nat. *Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.*

Germán Pérez, Dr. Sc. *Departamento de Física, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Universidad del Valle, Cali, Colombia.*

María Teresa Malachevsky, Dr. Sc. *Centro atómico Bariloche. Instituto Balseiro. CNEA. Argentina.*

Pablo Hernández, Dr. Sc. *Departamento Electricidad y Electrónica, Universidad de Valladolid, España.*

Manuel Vázquez, Dr. Sc. *Departamento de Física da Materia Condensada, Universidade de Santiago de Compostela, España*

Eduardo Padrón, Dr. Sc. *Departamento de Física, Universidad Federal de Pernambuco, Brasil.*

Facultad de Ciencias  
Sede Bogotá



UNIVERSIDAD  
NACIONAL  
DE COLOMBIA

Esta edición contó con el apoyo de:

- Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá.
- Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá.

ISSN 0121-4470 (Impreso)

ISSN 2500-8013 (En línea)

doi:10.15446/mo

Edición:

- Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá, Colombia.

**Cubierta:** Imagen seleccionada de la página 22 del presente número.

Diagramación en  $\text{\LaTeX}$ :

Mónica López

Asistente editorial

© MOMENTO - Revista de Física. Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia

Página web: <http://www.revistas.unal.edu.co/index.php/momento>

Correo electrónico: [momento\\_fcbog@unal.edu.co](mailto:momento_fcbog@unal.edu.co)

Dirección Postal: Carrera 30 No 45 03, Edif. 404 (Departamento de Física), Bogotá, Colombia.

Teléfono: (57 1) 3165000 ext.13009

Preprensa y prensa:

Proceditor Ltda.

Calle 1C No.27 A - 01

Teléfonos: 757 92 00 - 313 251 54 98

Bogotá, D.C., Colombia

*proceditor@yahoo.es*

# CONTENIDO

MOMENTO 57 (Julio-Diciembre, 2018)

**Influencia de las colisiones atómicas en las resonancias sub-Doppler de la espectroscopia de reflexión selectiva en la línea  $D_2$  del cesio**

*Influence of atomic collisions in the sub-Doppler resonances of selective reflection spectroscopy on the line  $D_2$  of cesium*

Reynaldo Reyes, Marcos Oriá, Luis Mosquera.....1

**Acondicionamiento del campo magnético ultra bajo en un equipo de IRM para uso híbrido en medicina nuclear**

*Low field MRI set up and design for nuclear medicine hybrids purposes*

Esteban D. Posada-Díaz, Andrea Abril, Eduardo A. Mójica-Nava, Luis Agulles-Pedrés.....16

**Confirmación diagnóstica de la evaluación del trazado del monitoreo fetal electrónico a partir de la probabilidad y la relación  $S/k$  de la entropía**

*Diagnostic confirmation of the evaluation of the tracing of electronic fetal monitoring based on probability and the  $S/k$  ratio of entropy*

Yolanda Soracipa, Javier Rodríguez, Marcos Castillo.....27

**Implementation of an algorithm for square root computation in an FPGA array by using fixed point representation**

*Implementación del algoritmo para el cálculo de la raíz cuadrada en un arreglo FPGA usando representación de punto fijo*

Jorge H. López, Johans Restrepo, Jorge E. Tobón.....41

**Caracterización de películas delgadas de AlGaAs obtenidas por magnetron sputtering RF**

*Characterization of AlGaAs thin films prepared by RF magnetron sputtering*

Juan D. Losada Losada, Álvaro Pulzara Mora.....50

**Numerical solution of Mathisson-Papapetrou-Dixon equations for spinning test particles in a Kerr metric**

*Solución numérica de las ecuaciones de Mathisson-Papapetrou-Dixon para partículas de prueba con espín en una métrica de Kerr*

Nelson Velandía, Juan M. Tejeiro.....60



# INFLUENCIA DE LAS COLISIONES ATÓMICAS EN LAS RESONANCIAS SUB-DOPPLER DE LA ESPECTROSCOPIA DE REFLEXIÓN SELECTIVA EN LA LÍNEA $D_2$ DEL CESIO

## INFLUENCE OF ATOMIC COLLISIONS IN THE SUB-DOPPLER RESONANCES OF SELECTIVE REFLECTION SPECTROSCOPY ON THE LINE $D_2$ OF CESIUM

Reynaldo Reyes<sup>1</sup>, Marcos Oriá<sup>2</sup>, Luis Mosquera<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Ingeniería Química y Textil, Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru 210, Rímac, Lima, Perú.

<sup>2</sup> Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa 58051 - 900, Caixa. Postal 5086, Paraíba, Brasil.

<sup>3</sup> Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Ingeniería, Av. Túpac Amaru 210, Rímac, Lima, Perú.

(Recibido: 01/2018. Aceptado: 04/2018)

### Resumen

Reportamos un estudio de la reflectividad de una interface vidrio-vapor atómico de cesio cerca de la línea de resonancia  $D_2$  del cesio para densidades del vapor de cesio desde  $0.9 \times 10^{14}$  hasta  $3.2 \times 10^{14}$  átomos/cm<sup>3</sup>. Los resultados experimentales se compararon con cálculos basados sobre una teoría en la cual primero se tienen en cuenta solamente las colisiones átomo-átomo y luego tomando en cuenta también las colisiones átomo-pared. También detectamos un desplazamiento  $\delta$  hacia el azul de la frecuencia del pico de la resonancia  $4 \rightarrow 5$  que depende aproximadamente en forma lineal de la densidad  $N$ .

**Palabras clave:** Reflexión selectiva, Cesio, Espectroscopia, Física atómica.

## Abstract

We report a study of the reflectivity of a glass-cesium vapor interface near the cesium  $D_2$  resonance line for cesium vapor densities from  $0.9 \times 10^{14}$  up to  $3.2 \times 10^{14}$  atoms/cm<sup>3</sup>. The experimental results are compared with calculations based on a theory on which are taken into account first only the atom–atom collisions and then also taking into account the atom–wall collisions. We also detect a shift for the blue of the frequency of the peak of the resonance  $4 \rightarrow 5$  that approximately depends linearly on the density  $N$ .

**Keywords:** Selective reflection, Cesium, Spectroscopy, Atomic physics.

## 1. Introducción

Cuando un haz de luz incide sobre una interface entre un medio dieléctrico y un vapor atómico, la intensidad de la luz reflejada exhibe comportamiento resonante cuando la frecuencia de la luz es sintonizada en torno de una frecuencia de transición atómica. La espectroscopia de reflexión selectiva (RS), está basada en este tipo de fenómeno resonante.

En contraste con la espectroscopia de absorción convencional que mide la intensidad de la luz transmitida, en la espectroscopia de RS es monitoreado el campo reflejado, siendo así especialmente atractiva para el estudio de medios ópticamente espesos donde las técnicas de transmisión no son viables. A partir de un punto de vista estrictamente espectroscópico se muestra que la señal lineal de la RS es sub-Doppler, y permite que se tenga acceso al ancho homogéneo de la transición atómica. Ese hecho, asociado a su alcance espacial intrínseco en el medio gaseoso permite que la espectroscopia de RS sea apropiada para el estudio de la interacción átomo-superficie: la contribución a la reflexión es esencialmente debida a los átomos desplazándose a menos de una longitud de onda de distancia de la superficie. Entre las aplicaciones de la espectroscopia de RS están [1]: la determinación de ensanche homogéneo, en particular el auto-ensanche colisional y desplazamiento de líneas de resonancia atómicas; estudio de interacciones de Van der Waals de átomos



con superficies dieléctricas; estudio de procesos coherentes y magneto-ópticos; estabilización de la frecuencia de un diodo laser a una línea de resonancia atómica, entre otras aplicaciones.

En este trabajo se analizará la influencia de las colisiones inter-atómicas en los espectros realizando experimentos de espectroscopia de RS. Para esto utilizamos un sistema de diodo laser de bajo costo descrito previamente [2]. Con un diodo laser como fuente de excitación, sintonizado en la línea  $D_2$  del cesio, hacemos incidir la luz sobre una celda que contiene vapor de cesio y obtenemos espectros de RS experimentales para diferentes densidades de vapor atómico, y lo comparamos con espectros obtenidos teóricamente.

## 2. Modelos Teóricos

A continuación, vamos a presentar dos modelos para la descripción de la reflexión selectiva. En ambos casos trataremos a los átomos como dipolos atómicos clásicos. Esta aparente limitación no es importante visto que esta suposición es suficiente para explicar los efectos de presión observados experimentalmente en los espectros de RS.

La idea de la RS es observar un haz reflejado en una interface dieléctrico-vapor, del lado del dieléctrico con índice de refracción  $n$ , estando la frecuencia del haz próxima a la resonancia del vapor. La reflectividad  $R$  varia con la frecuencia por causa de la variación del índice de refracción  $n_\nu$  del vapor, y para incidencia normal es dada por la relación [3]:

$$R = \left| \frac{n - n_\nu(\omega)}{n + n_\nu(\omega)} \right|^2 \quad (1)$$

### 2.1. Teoría convencional de la reflexión selectiva

En la teoría convencional se toma en cuenta solamente las colisiones inter-atómicas pero no las colisiones de los átomos con la pared de la celda.

Consideremos un vapor atómico con densidad atómica  $N$  confinado en una celda de vidrio, irradiada por luz monocromática con

frecuencia en torno de una resonancia con una transición atómica. La luz incidente es supuesta ser suficientemente débil para que el número de átomos excitados sea mucho menor que el número de átomos que permanecen en el estado fundamental. Los átomos del vapor son considerados como sistemas de dos niveles, con estado fundamental  $\phi_g$  y estado excitado  $\phi_e$  ambos no degenerados. La frecuencia de la transición es  $\omega_0$  y el tiempo de vida natural es denotado por  $\tau_n$ .

En esta situación, la respuesta del vapor al campo incidente es descrita por el índice de refracción complejo  $n_\nu(\omega)$  y satisface una relación implícita, la cual para bajas densidades,  $|n_\nu(\omega) - 1| \ll 1$ , se reduce a [3]:

$$n_\nu(\omega) - 1 = \frac{e^2 f N}{4m\omega_0\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(u)du}{\Delta\omega + ku - i\gamma} \quad (2)$$

donde la distribución  $V(u)$  de las componentes  $x$  de la velocidad es dada por la distribución de Maxwell:

$$V(u) = \frac{1}{u_{th}\pi^{1/2}} \exp\left(-\frac{u^2}{u_{th}^2}\right) \quad (3)$$

siendo  $u_{th}$  la velocidad más probable de los átomos de masa  $m_A$  del vapor con temperatura absoluta  $T$ , dado por:

$$u_{th} = \sqrt{\frac{2KT}{m_A}} \quad (4)$$

Además,  $e$  es la carga del electrón,  $m$  su masa,  $\omega$  la frecuencia del campo óptico incidente,  $k$  el número de onda ( $\omega = ck$ ),  $\epsilon_0$  la constante dieléctrica del vacío,  $f$  la “fuerza” del oscilador, y  $\gamma$  es el ancho espectral homogéneo de la transición atómica.

La diferencia en la reflectividad  $\Delta R = R - R_0$  tal como es comparado con la reflectividad dieléctrico-vacío:

$$R_0 = \frac{(n - 1)^2}{(n + 1)^2} \quad (5)$$

esto es:

$$\Delta\bar{R} = \frac{\Delta R}{R_0} \quad (6)$$

es proporcional a la dispersión  $-D(\omega)$ .

## 2.2. Teoría modificada

La modificación de la teoría convencional por la inclusión de colisiones átomo-pared requiere conocimiento acerca de la naturaleza de estas colisiones. En relación a las velocidades atómicas, se puede distinguir entre colisiones especulares y difusas. Las primeras son colisiones elásticas y las últimas son colisiones en que las velocidades de los átomos son redistribuidas de acuerdo con la distribución de Maxwell según la temperatura del vapor. La polarización atómica inducida por la radiación puede ser totalmente perdida o parcialmente conservada en una colisión átomo-pared.

En vista de las grandes fuerzas que actúan sobre el átomo cuando colisiona con la pared, es razonable asumir que la polarización es perdida en una colisión átomo-pared. Las mudanzas de velocidad en una colisión no necesitan entonces ser especificadas ya que toda la memoria acerca del pasado es perdida en la colisión.

Así, considerando que tanto los átomos se mueven en la dirección de la interface como los que parten de ella contribuyen igualmente para la reflexión, y usándose directamente la teoría convencional para átomos con  $u < 0$ , se tiene que  $n_\nu(\omega)$  es dado por [3, 4]:

$$n_\nu(\omega) - 1 = \frac{e^2 f N}{4m\omega_0 \epsilon_0} \left\{ 2 \int_{-\infty}^0 \frac{V(u) du}{\Delta\omega + ku - i\gamma} \right\} \quad (7)$$

De ahí se tiene para  $\Delta\bar{R}$ , obtenida a partir de (1), (6) y (7), de acuerdo con la teoría modificada:

$$\Delta\bar{R} = -\frac{n}{n^2 - 1} \frac{e^2 f N}{m\omega_0 \epsilon_0} \left\{ 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^0 \frac{V(u) du}{\Delta\omega + ku - i\gamma} \right\} \quad (8)$$

La reflectividad extra  $\Delta R = R - R_0$  es proporcional a la convolución del perfil de dispersión lorentziano de un simple átomo  $(\Delta\omega + ku)/[(\Delta\omega + ku)^2 + \gamma^2]$  con una distribución de velocidades que es la siguiente: igual a  $2V(u)$  para  $u < 0$ , tiene una discontinuidad en  $u = 0$  y se anula para  $u > 0$ .

Para  $\Delta\omega^2 + \gamma^2 \ll \gamma_D^2$ , con  $\gamma_D$  como el ancho Doppler, la contribución dominante en (8) viene de los átomos con  $0 \leq |u| \ll$

$u_{th}$ . Entonces, escribiendo:

$$V(u) = \frac{1}{u_{th}\pi^{1/2}} \quad (9)$$

se puede encontrar, para  $\Delta\omega^2 + \gamma^2 \ll \gamma_D^2$  (y así  $\gamma \ll \gamma_D$ ), que:

$$\Delta\bar{R} = -\frac{4n}{n^2 - 1} \frac{K'}{\pi^{1/2}} \ln \left[ \frac{\gamma^2 + \Delta\omega^2}{\gamma_D^2} \right] \quad (10)$$

donde:

$$K' = \frac{e^2 f N}{4m\omega_0 \epsilon_0 \gamma_D} \quad (11)$$

Para  $\Delta\omega^2 + \gamma^2 \gg \gamma_D^2$ , todos los átomos contribuyen para la reflectividad y se puede escribir  $u = 0$  en el denominador de (8), encontrándose así el resultado asintótico dado por la expresión:

$$\Delta\bar{R} = -\frac{4n}{n^2 - 1} K' \frac{\gamma_D}{\Delta\omega} \quad (12)$$

La teoría convencional predice una expresión para  $\Delta\bar{R}$  que se diferencia de la expresión (8) por el factor 2 y por la integración de  $u$  que va de  $-\infty$  a  $\infty$ . Se puede observar también que para  $\gamma \ll \gamma_D$ , la reflectividad modificada comparada a la reflectividad convencional contiene una contribución extra que es de naturaleza logarítmica, centrada en la resonancia, simétrica en frecuencia y tiene un ancho espectral del orden de  $\sqrt{\gamma k u_{th}}$ .

Siguiendo el modelo presentado arriba para la teoría de la reflexión selectiva, procedemos ahora a la presentación de espectros calculados numéricamente donde utilizamos la teoría modificada.

Para comparar con los resultados obtenidos experimentalmente vamos a calcular espectros numéricos de reflexión selectiva para el caso específico de la línea  $D_2$  del cesio, cuyo diagrama de niveles de energía es mostrado en la figura 1 evidenciando su estructura hiperfina.

Para los cálculos numéricos de las formas de línea fue utilizado el valor del índice de refracción del vidrio tipo pírex  $n = 1.45$  y  $f = 0.81$  [5]. Tenemos además que  $\gamma_D = 2\pi\Delta\nu_D/\sqrt{\ln 2}$ , donde el

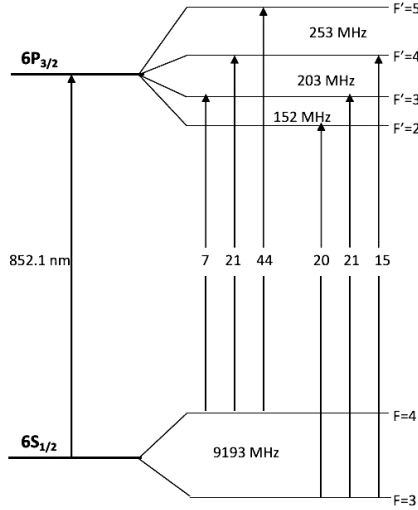


FIGURA 1. Estructura hiperfina y las probabilidades de transición relativas de la línea  $D_2$  del cesio.

factor  $\sqrt{\ln 2}$  es debido a la forma gausseana de ancho Doppler [3],  $\gamma = \gamma_{nat} + \gamma_{col} = 2\pi(\Delta\nu_{nat} + \Delta\nu_{col})$  y  $\Delta\omega = 2\pi(\nu_0 + \nu)$ . El ancho natural es  $\gamma_{nat}$  y el ensanchamiento por colisiones es  $\gamma_{col}$ . El ancho natural  $\Delta\nu_{nat}$  para la línea  $D_2$  del cesio es igual a 5.3 MHz y el ancho Doppler es dado por  $\Delta\nu_D = 21.8\sqrt{T}$  MHz. El ensanchamiento por colisiones  $\Delta\nu_{col}$  es entonces dado por la relación [6]:

$$\Delta\nu_{col} = 12 \times 10^{-14} N \text{ MHz} \quad (13)$$

Considerando entonces estos valores calculamos la forma de línea para la contribución logarítmica dado por la relación (10) y su contribución asintótica, dada por la relación (12). Obtenemos así los espectros numéricos de la reflexión selectiva para la transición hiperfina  $F = 4 \rightarrow F' = 3, 4, 5$  de la línea  $D_2$  del cesio mediante la relación:

$$\Delta\bar{R} = P_{4-3}\Delta\bar{R}_{4-3} + P_{4-4}\Delta\bar{R}_{4-4} + P_{4-5}\Delta\bar{R}_{4-5} \quad (14)$$

donde  $P_{4-j}$  son las probabilidades relativas de cada transición considerada y  $\Delta\bar{R}_{4-j}$  son las contribuciones a la reflectividad de cada resonancia hiperfina.

En la figura 2 se presenta un espectro calculado con la teoría de dispersión convencional junto con un espectro calculado con la teoría modificada. Tenemos que en el espectro calculado con la teoría modificada se puede observar las resonancias correspondientes a las transiciones hiperfinas  $F = 4 \rightarrow F' = 3, 4, 5$ . Estas resonancias no aparecen en el espectro calculado con la teoría de dispersión convencional.

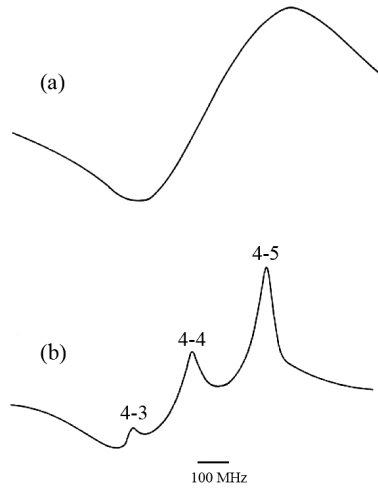


FIGURA 2. (a) Espectro de reflexión selectiva calculado con la teoría de dispersión convencional. (b) Espectro de reflexión selectiva calculado con la teoría modificada. Los cálculos fueron realizados para un vapor de densidad  $0.9 \times 10^{14}$  átomos/cm<sup>3</sup>.

### 3. Experimental

Utilizando el sistema de diodo láser descrito en un artículo previo [2], se hace incidir el haz del láser en la ventana de la celda con el vapor de cesio y se detecta la intensidad de luz reflejada. Para tener una referencia en frecuencia, simultáneamente se obtienen espectros de absorción saturada (AS) [2].

El ángulo de incidencia del haz del láser en la celda de cesio, era del orden de 10 mrad, esto es, un ángulo de incidencia cerca de la normal. La intensidad del haz del láser utilizado fue de aproximadamente 0,2 mW/cm<sup>2</sup>.

En la figura 3 se muestra la disposición experimental de la reflexión selectiva hecha simultáneamente con el experimento de absorción saturada para referencia en frecuencia.

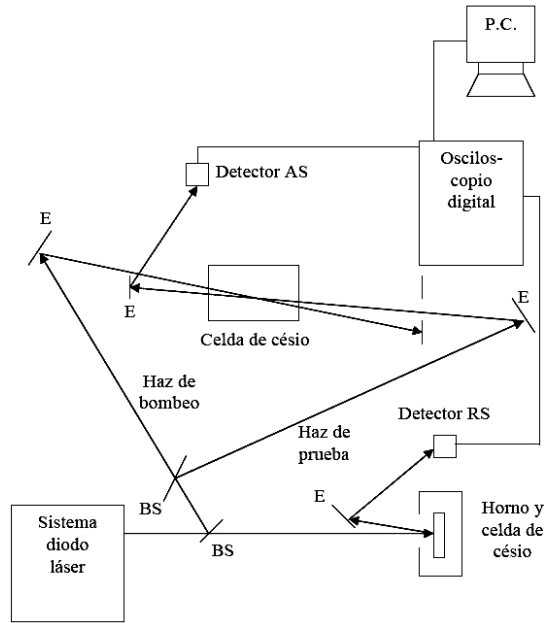


FIGURA 3. Esquema de la disposición experimental de la reflexión selectiva (RS), hecha simultáneamente con la absorción saturada (AS). E: espejo, BS: divisor de haz.

El diodo láser utilizado fue un modelo SDL-5401-G1, con una longitud de onda nominal de 853 nm. La corriente umbral de operación láser está en torno de 17 mA. El área típica de incidencia fue de  $0.5 \text{ cm}^2$ . La celda conteniendo los átomos del cesio 133 estaba a una temperatura inicial de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ , siendo así su densidad de  $\sim 2 \times 10^{10} \text{ átomos/cm}^3$ . El haz del láser fue sintonizado en una frecuencia próxima a la línea  $D_2$  del cesio ( $\lambda=852.1 \text{ nm}$ ), con la transición de resonancia  $6S_{1/2} \rightarrow 6P_{3/2}$  (figura 1). El estado fundamental  $6S_{1/2}$  consiste de estados hiperfinos con  $F = 3$  y  $4$ ; el estado  $6P_{3/2}$  consiste de cuatro estados hiperfinos con  $F' = 2, 3, 4$  y  $5$ .

## 4. Resultados y Discusión

### 4.1. Comparación de espectros teóricos y experimentales de la reflexión selectiva

En la figura 4 se muestran espectros de reflexión selectiva tanto teóricos como experimentales de la línea  $D_2$  del cesio, en las resonancias hiperfinas  $F = 4 \rightarrow F' = 3, 4, 5$ . Estos espectros son obtenidos considerando bajas densidades del vapor atómico, o sea cuando  $\gamma_{col} \ll \gamma_D$ , y por lo tanto el ancho del espectro es dominada por el ancho Doppler  $\gamma_D$ . En nuestro caso, tenemos que un vapor a baja densidad cuando  $N$  es relativamente menor que  $4 \times 10^{14}$  átomos/cm<sup>3</sup>. Los espectros experimentales son obtenidos con una intensidad del láser de  $\sim 0.2$  mW/cm<sup>2</sup>, por tanto, menor que la intensidad de saturación.

Los espectros experimentales mostrados en la figura 4 tuvieron sus escalas ajustadas debido al hecho que por la disposición experimental no fue posible hacer una medición absoluta de la señal reflejada y normalizada en relación a la reflexión no resonante. Sin embargo, se observó experimentalmente que la amplitud de la señal reflejada crece con la densidad, lo que teóricamente está descrito por la expresión (8) de la reflectividad. Este hecho es reportado también en experimentos de reflexión selectiva con vapor atómico de sodio [4] donde se muestra que las amplitudes de los espectros teóricos y experimentales están en buena concordancia, y en ambos casos la reflectividad aumenta tal como aumenta la densidad del vapor atómico.

Por otra parte, se puede ver a partir de los espectros teóricos presentados en la figura 4, que los resultados de la teoría modificada describen bien la forma de línea de los espectros experimentales. Quiere decir que la teoría modificada claramente predice la aparición de una estructura sub-Doppler en los espectros de reflexión selectiva. En un análisis más detallado de las formas de líneas se puede notar que existe una diferencia en lo que respecta a la anchura de los picos: el ancho de las resonancias correspondientes a las transiciones hiperfinas de los espectros teóricos son menores que las correspondientes en los espectros experimentales; por ejemplo



para una densidad de  $2.1 \times 10^{14}$  átomos/cm<sup>3</sup> el ancho teórico del pico de la transición  $4 \rightarrow 5$  es de  $\sim 115$  MHz en cuanto que el ancho experimental para esta misma transición es de  $\sim 47$  MHz, y esto puede deberse a la influencia del ancho del láser utilizado que es de  $\sim 30$  MHz. Una discrepancia similar entre el ancho de los perfiles teóricos y experimentales fue observada para el sodio fue reportado en la referencia [4] y en [6] para el caso del cesio.

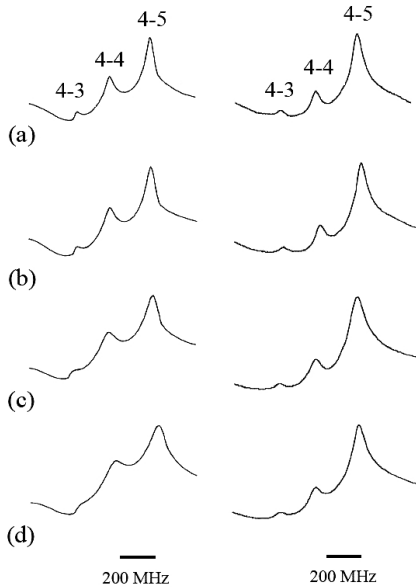


FIGURA 4. Espectros de reflexión selectiva teóricos (izquierda) y experimentales (derecha), para densidades: (a)  $0.9 \times 10^{14}$ , (b)  $1.3 \times 10^{14}$ , (c)  $2.1 \times 10^{14}$ , (d)  $3.2 \times 10^{14}$ , átomos/cm<sup>3</sup>.

Para una densidad de  $3.2 \times 10^{14}$  átomos/cm<sup>3</sup> se puede ver que existe una mayor diferencia entre el espectro teórico y experimental; en el espectro teórico prácticamente la resonancia de la transición  $4 \rightarrow 3$  desapareció, en cuanto que en el espectro experimental todavía se puede apreciar esta resonancia. Sin embargo, debemos recordar también que el cálculo del espectro teórico a esta densidad se torna cuestionable, debido al hecho de que la densidad no es mucho menor que  $4 \times 10^{14}$  átomos/cm<sup>3</sup>, límite de bajas densidades. Así, finalmente podemos decir que para vapores atómicos de baja densidad los resultados de la teoría modificada dan resultados

que son consistentes cuando son comparados con los resultados experimentales.

#### 4.2. Análisis del desplazamiento del perfil espectral de la reflexión selectiva en función de la densidad del vapor atómico

En nuestros resultados experimentales, en los espectros de reflexión selectiva para densidades con valores aproximadamente mayores a  $5.5 \times 10^{14}$  átomos/cm<sup>3</sup>, se hace evidente un desplazamiento del perfil espectral de la reflexión selectiva, tal como se puede apreciar en la figura 5, donde se observa el desplazamiento del pico de la resonancia correspondiente a la transición  $4 \rightarrow 5$  para el azul, en relación al espectro de absorción saturada de referencia, para una densidad de  $5.5 \times 10^{14}$  átomos/cm<sup>3</sup>.

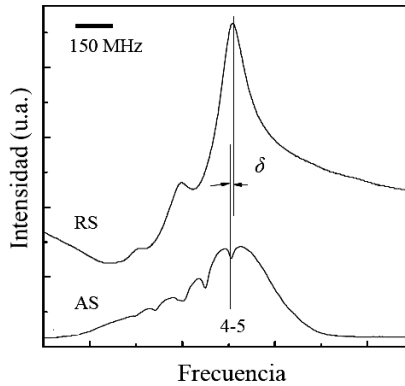


FIGURA 5. Observación de desplazamiento de la frecuencia del pico correspondiente a la transición  $4 \rightarrow 5$ . Densidad del vapor atómico:  $5.5 \times 10^{14}$  átomos/cm<sup>3</sup>.

En este caso medimos el desplazamiento  $\delta$  de la frecuencia del pico de la resonancia  $4 \rightarrow 5$ , desde una densidad  $5.5 \times 10^{14}$  átomos/cm<sup>3</sup> hasta  $63 \times 10^{14}$  átomos/cm<sup>3</sup>, es decir desde densidades moderadas hasta relativamente altas densidades del vapor atómico.

En la figura 6 mostramos un gráfico del desplazamiento de la frecuencia del pico correspondiente a la transición  $4 \rightarrow 5$  en función de la densidad del vapor atómico.

Observamos que la dependencia del desplazamiento con la densidad atómica es aproximadamente lineal. Esta función lineal se puede expresar como:

$$\delta = \delta_0 + \alpha N \quad (15)$$

donde,  $\delta_0 = (-2.2 \pm 1.6)$  MHz es el desplazamiento que permanece cuando la densidad  $N \rightarrow 0$  y  $\alpha = (1.1 \pm 0.1) \times 10^{-8}$  Hz.cm<sup>3</sup> es el coeficiente del desplazamiento para el azul en este caso.

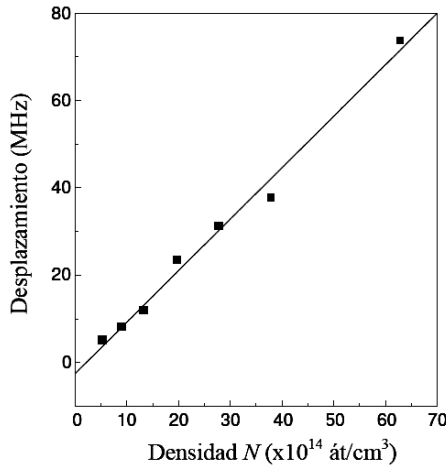


FIGURA 6. *Desplazamiento para el azul de la frecuencia del pico de la transición 4 → 5 en función de la densidad del vapor atómico de cesio.*

Uno de los mecanismos debido al cual se tiene un desplazamiento de línea son las colisiones entre los átomos [7]. En adición a este mecanismo existe otra contribución al desplazamiento que está conectada con la corrección de campo local o corrección de Lorentz-Lorenz [8]. En un vapor atómico denso, un átomo no sólo es expuesto al campo incidente en el vacío, sino también a la radiación generada por los otros átomos en la muestra. Una descripción aproximada de esta situación es posible con el concepto del campo local, definido como el campo efectivo que actúa sobre un átomo típico en el vapor. La diferencia del campo local con el campo incidente introduce una modificación de la constante dieléctrica

que da lugar a un desplazamiento de la línea, el desplazamiento de Lorentz-Lorenz [9, 10]. Por otra parte, la interacción átomo-pared de tipo Van der Waals conduce a una distorsión y también a un desplazamiento de la frecuencia del perfil de la reflexión selectiva, la cual puede ser medida para determinar las características de la interacción átomo-superficie [9, 11–14].

## Conclusiones

En este trabajo utilizamos diodos láser en experimentos de espectroscopia de reflexión selectiva observando la línea  $D_2$  del cesio. Usando una formulación teórica que lleva en consideración tanto las colisiones entre átomos como las colisiones de los átomos del vapor con la pared de la celda, podemos hacer obtener espectros teóricos que están en buen acuerdo con nuestras medidas experimentales, cuya principal limitación era el ancho de línea del láser utilizado, varias veces más ancho que el ancho natural de la transición.

En el caso del vapor con moderada a relativamente alta densidad, verificamos que la contribución de las resonancias hiperfinas prácticamente desaparece, dando lugar a un espectro de tipo puramente dispersivo. Por otra parte, observamos un desplazamiento en frecuencia del espectro de reflexión selectiva, en relación a un espectro de absorción saturada utilizado como referencia. Medimos el desplazamiento de la frecuencia del pico de la transición  $4 \rightarrow 5$ , encontrando un desplazamiento para el lado azul del espectro, y con dependencia lineal con la densidad.

Finalmente, a partir de los resultados presentados, podemos decir que la espectroscopia de reflexión selectiva es una buena herramienta para el estudio de sistemas atómicos, en particular bastante adaptable para el estudio de efectos de presión como es evidenciado en este trabajo.

## Agradecimientos

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Pesquisas (CNPq) del Brasil y al IGI-UNI del Perú.

## Referencias

- [1] W. S. Martins, M. Oriá, M. Chevrollier, and T. P. de Silans, *Appl. Opt.* **52**, 6074 (2013).
- [2] R. Reyes, G. Altuna, and C. Carhuancho, *Rev. Cient. TECNIA* **24**, 69 (2017).
- [3] M. H. Schuurmans, *Contem. Phys.* **21**, 463 (1980).
- [4] Burgmans, A.L.J. and Woerdman, J.P., *J. Phys. France* **37**, 677 (1976).
- [5] A. M Akul'shin, V. L Velichanskit, A. Zibrov, V. V Nikitin, V. Sautenkov, E. K Yurkin, and N. V Senkov, *JETP Lett.* **36**, 247 (1982).
- [6] V. A. Sautenkov, V. L. Velichanskiĭ, A. S. Zibrov, V. N. Luk'yanov, V. V. Nikitin, and D. A. Tyurikov, *Sov. J. Quantum Electron.* **11**, 1131 (1981).
- [7] W. Demtröder, *Laser Spectroscopy: Basic Concepts and Instrumentation*, Advanced Texts in Physics No. v. 2 (Springer, 1996).
- [8] M. Klein and T. Furtak, *Optics*, Wiley series in pure and applied optics (Wiley, 1986).
- [9] J. Guo, J. Cooper, and A. Gallagher, *Phys. Rev. A* **53**, 1130 (1996).
- [10] V. Vuletić, V. Sautenkov, C. Zimmermann, and T. Hänsch, *Opt. Commun.* **99**, 185 (1993).
- [11] M. Fichet, F. Schuller, D. Bloch, and M. Ducloy, *Phys. Rev. A* **51**, 1553 (1995).
- [12] H. Failache, S. Saltiel, M. Fichet, D. Bloch, and M. Ducloy, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 5467 (1999).
- [13] A. Laliotis, I. Maurin, M. Fichet, D. Bloch, M. Ducloy, N. Balasanyan, A. Sarkisyan, and D. Sarkisyan, *Appl. Phys. B* **90**, 415 (2008).
- [14] P. Chaves de Souza Segundo, I. Hamdi, M. Fichet, D. Bloch, and M. Ducloy, *Laser Phys.* **17**, 983 (2007).

# ACONDICIONAMIENTO DEL CAMPO MAGNÉTICO ULTRA BAJO EN UN EQUIPO DE IRM PARA USO HÍBRIDO EN MEDICINA NUCLEAR

## LOW FIELD MRI SET UP AND DESIGN FOR NUCLEAR MEDICINE HYBRIDS PURPOSES

Esteban D. Posada-Díaz<sup>1</sup>, Andrea Abril<sup>2</sup>, Eduardo A.  
Mójica-Nava<sup>1</sup>, Luis Agulles-Pedrós<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ingeniería, Bogotá, Colombia.

<sup>2</sup> Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Física,  
Grupo de Física Médica, Bogotá, Colombia.

(Recibido: 09/2017. Aceptado: 04/2018)

### Resumen

Los equipos de IRM en campo magnético ultra bajo (cercano al terrestre) pueden ser un complemento para formar equipos híbridos con los de Medicina Nuclear. Este trabajo presenta el diseño y la construcción de un campo magnético homogéneo, con el fin de mantener las condiciones requeridas para el funcionamiento de un equipo de IRM de campo ultra bajo en ambientes con campos nominales débiles o heterogéneos. Esto facilita su implementación como complemento a un equipo de Medicina Nuclear y así tener un equipo híbrido. La homogenización del campo se logra con un arreglo de bobinas de Maxwell, minimizando el ruido externo en el equipo de resonancia. Por medio de simulaciones en GEANT4 se analiza el efecto del arreglo de bobinas sobre la detección del material radiactivo. Se muestra que la atenuación del sistema homogeneizador de campo magnético tiene una atenuación del orden del 0.5 %, lo que apenas afecta la calidad de la imagen de la PET ya que es del orden del error en estos sistemas de detección.

**Palabras clave:** Bobinas de Maxwell, IRM, GENAT4.

### **Abstract**

Low field MRI can be used as potential hybrid complement with Nuclear Medicine devices. This paper presents the design and construction of an experimental set up based on Maxwell coils. The coil arrangement will perform a homogeneous magnetic field as condition required for an ultra low field MRI operation. The homogenization minimize the external noise on the MRI device, while keeping the imaging conditions. GEANT4 simulations were performed to analyze the effect of the coils array over the radioactive material detection. A radiation attenuation of ca. 0.5 % is observed due to the coil arrangement, which practically does not affect the PET quality image since it is close to the error estimation for these kinds of detectors.

**Keywords:** MRI, Maxwell coil, GEANT4.

### **Introducción**

El campo de las imágenes médicas se puede dividir en 2 modalidades de imagen: por un lado, aquellas técnicas que generan la información desde fuera del cuerpo (básicamente todas las combinaciones de rayos x) y las que envían la información de la imagen desde el interior del cuerpo (medicina nuclear, US. y la RM). La ventaja de estas últimas es que son capaces de dar información funcional (mejor contraste y sensibilidad ante procesos metabólicos), sin embargo, carecen de la resolución espacial en comparación con las primeras.

La Resonancia Magnética Nuclear (RMN) es una técnica ampliamente usada en diferentes campos de aplicación, destacando en imágenes diagnósticas gracias a la posibilidad de obtener imágenes de tejido blando, además de poder la observar diferentes procesos metabólicos. Esta técnica se denomina Imágenes por Resonancia Magnética (IRM).

Para obtener un diagnóstico más preciso, actualmente se han desarrollado equipos híbridos con Tomografía por Emisión de Positrones (PET, por sus siglas en inglés). Estos equipos funcionan integrando equipos de IRM operados en campos magnéticos altos, del orden del tesla.

Sin embargo, estos equipos tienen algunos inconvenientes ya que la instrumentación requerida por cada uno de estos sistemas puede interferir con el otro: en la adquisición de señal por parte del equipo MRI o en la detección de los radifármacos por parte de la PET [1] [2]. En el caso de PET/IRM, hay diferentes maneras de combinar las IRM y la PET, pero todas tienen el mismo enfoque: insertar el anillo de detectores de PET en el equipo de IRM, por lo que es necesario adaptar la parte PET a la resonancia magnética [3]. Hay estudios de equipos híbridos con campos bajos, del orden de 100  $mT$  [4] pero siguen la misma idea de acoplar el equipo de detección de radiación al de IRM.

Hoy en día existen equipos de resonancia que funcionan con un campo magnético bajo o ultra bajo, del orden del militesla ( *Ultra Low Field MRI*) [5] [6]. Incluso, se han desarrollado equipos de IRM en campos magnéticos terrestre (*Earth Field MRI*), es decir del orden del microtesla [7], como es el equipo al cual se aplica este trabajo [8].

En el caso de campo ultra bajo, se puede combinar a la inversa; adaptar la resonancia magnética a la PET (o cualquier equipo de Medicina Nuclear, ya sea PET, SPECT o gammacámara). Esto se realizaría colocando el anillo PET fuera del equipo de IRM. Esta configuración tiene algunas restricciones ya que el equipo de IRM podría atenuar y dispersar los fotones en su camino hacia el anillo de detectores.

La configuración inversa, tendría ciertas ventajas:

- Reduce los costos y el mantenimiento del campo magnético.
- Aumenta la poca versatilidad que ofrece el equipo comercial: no es la mejor opción para la investigación básica que requiere el desarrollo de este tipo de alternativas.
- Mejora las alternativas de combinación de detectores.

En este trabajo se propone como alternativa de bajo costo y versatilidad, desarrollar un equipo de resonancia en campos ultra bajos, que a la vez sea homogéneo y estable, para poder adaptarse a diferentes sistemas de detección propios de Medicina Nuclear. Este trabajo muestra el diseño e implementación del campo principal



de un equipo de resonancia de campo ultra bajo, además de la viabilidad para que sea compatible con equipos de Medicina Nuclear a través de simulaciones realizadas en GEANT4 [9–11].

## Imágenes por Resonancia Magnética

El principio de la resonancia magnética nuclear es la interacción del espín nuclear con un campo magnético externo  $\vec{B}$ ; en el caso de espines  $\frac{1}{2}$ , tienen dos estados energéticos de acuerdo a la intensidad de  $\vec{B}$ , el llamado desdoblamiento Zeeman. La frecuencia  $\omega_0$  describe la transición de los espines entre los estados energéticos, la llamada *Frecuencia de Larmor*, la cual a su vez depende de la constante giromagnética  $\gamma$ , propia de cada núcleo. La diferencia de energía entre los dos estados será entonces proporcional a la constante de Planck ( $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ) y vendrá dada por:

$$\Delta E = \hbar\omega_0 \text{ tal que } \omega_0 = \gamma B. \quad (1)$$

En la práctica a temperatura ambiente, se tendrá una nueva distribución de las poblaciones de espines dada por  $P_B = \frac{\gamma\hbar B_0}{2k_B T}$ , donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura. Esto se debe a que los espines tenderán a ocupar los estados de menor energía en relación a la ambiente ( $k_B T$ ) siguiendo una distribución de Boltzmann. Para el caso de un equipo común de IRM clínico se obtiene una polarización de 20 partes por millón. En el caso de equipos de con campos magnéticos del orden de decenas de microtesla sería 5 órdenes de magnitud menos, por lo que requieren mayores tiempos de adquisición y homogeneidad de campo magnético [12].

La interacción de los espines con  $\vec{B}$  se hace a través del acople del momento angular  $\vec{\mu} = \gamma\hbar\hat{I}$ . Si sumamos todos los momentos magnéticos de una región del espacio tendremos una magnetización dada por

$$\vec{M}_0 = \frac{\rho_0\gamma^2\hbar^2}{4k_B T}\vec{B}_0. \quad (2)$$

Como en la práctica el campo aplicado no es totalmente homogéneo en todo volumen de la muestra, la frecuencia de resonancia en las

diferentes regiones será diferente, por lo que existe un desfase entre los vectores de magnetización. Así, el vector resultante será cada vez menor provocando un decaimiento en la señal generada por los espines. Esto es llamado el decaimiento inductivo libre o FID, por sus siglas en inglés (cap. 11 y 12 de [12]).

El decaimiento de la proyección transversal de la magnetización, y por tanto de la señal, será más rápido a mayor heterogeneidad del campo. Al evaluar la señal en el dominio de la frecuencia, a través de la transformada de Fourier, se puede apreciar que el ancho de banda de la señal resultante es directamente proporcional a la rapidez del decaimiento en el tiempo (cap. 5 de [12]).

## Tomografía por Emisión de Positrones

El principio básico de la PET es la desintegración de una fuente radiactiva –isótopo radiactivo– que decae emitiendo positrones ( $\beta+$ ). Estos  $\beta+$ , por colisión con electrones ( $\beta-$ ) circundantes, se desintegrarán emitiendo dos fotones con energías de 0.511 MeV en direcciones casi opuestas: a este proceso se le llama aniquilación positrónica.

Los fotones resultantes, al interactuar con la materia entre la posición de emisión y el detector, disminuirán su intensidad  $I$  dependiendo de la densidad de la materia  $\rho$ , el coeficiente de atenuación másico  $\mu_m$  de cada elemento que encuentren en su trayectoria y el grosor de cada elemento  $x$  [13]:

$$I = I_0 e^{-\mu_m \rho x}. \quad (3)$$

De acuerdo con la ecuación 3, es importante tener en cuenta el uso de materiales de alta densidad porque disminuye la cantidad de fotones a detectar, por lo que baja la relación señal ruido. Además también habrá fenómenos de dispersión de la radiación que, junto con la atenuación, afectarán la calidad de la imagen de la PET.

## Procedimiento

### *Diseño de bobinas*

Se realizó una comparación entre los diferentes métodos para producir el campo magnético del equipo. Claramente las dos formas más comunes que existen son: por medio de una corriente continua o por medio de imanes permanentes. En la primera opción, los arreglos más conocidos son las bobinas de Helmholtz y las bobinas de Maxwell [14]. En los segundos el más notable es el arreglo de imanes de Halbach [15, 16]. Tras varias simulaciones en GEANT4, estos arreglos fueron descartados en este trabajo por producir demasiada atenuación y dispersión de la radiación.

Luego de comparar el arreglo de Helmholtz con el de Maxwell fue claro que el segundo presentaba una mejora notoria en la homogeneidad del campo, por lo que se diseñó e implementó entonces un arreglo de bobinas de Maxwell que mejoraban la uniformidad del campo sobre la superficie, como se observa en la figura 1.

Se tiene que para cualquier punto sobre el eje perpendicular al plano de una bobina circular, la densidad de flujo magnético está expresada como [17]:

$$B_z = \frac{Ni\mu_0 R^2}{2} \left[ \frac{nC^2}{((K+z)^2 + C^2 R^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{nC^2}{((K-z)^2 + C^2 R^2)^{3/2}} \right], \quad (4)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética en el vacío,  $N$  el número de espiras de la bobina,  $i$  la corriente por cada espira y  $n$ ,  $C$  y  $K$  son las respectivas constantes:  $49/64$ ,  $\sqrt{3/7}$  y  $\sqrt{4/7}$ . Se procedió a realizar una simulación en elementos finitos a través de COMSOL de la densidad de flujo de campo sobre el arreglo de las bobinas, mostrando que no existe una caída notable de la magnitud del flujo de campo, por lo que el campo es aproximadamente homogéneo en una región de 20 cm sobre el centro del arreglo como se observa en la figura 1 (derecha).

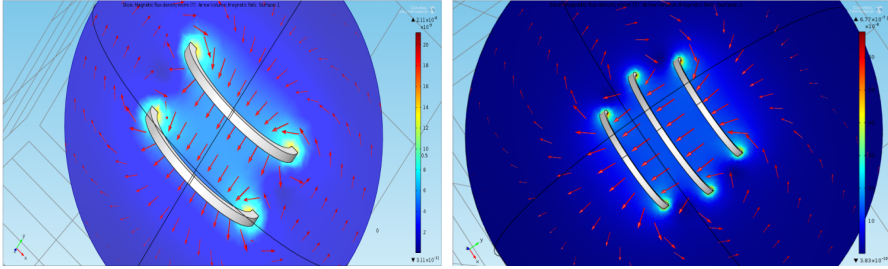


FIGURA 1. Simulación de la densidad de flujo magnético en el arreglo de Helmholtz (izquierda) y Maxwell (derecha): imágenes obtenidas utilizando el software COMSOL.

### Diseño del controlador

El primer reto que se debe afrontar es la medición de la variable a controlar, es decir la medición del campo magnético neto sobre el equipo. Esto fue logrado implementando cuatro sensores de efecto hall sobre los puntos que lo limitan. Como este campo es muy pequeño, se utilizó amplificadores de instrumentación para manipular mejor los datos. Utilizando una tarjeta de adquisición de datos se muestrearon los voltajes de salida del amplificador. Una vez digitalizadas estas señales, se promedian para obtener una sola señal de salida para el controlador. El control se diseñó utilizando modelo un modelo PID en lazo cerrado con *anti-windup* y filtro derivativo como se aprecia en la figura 2 [18].

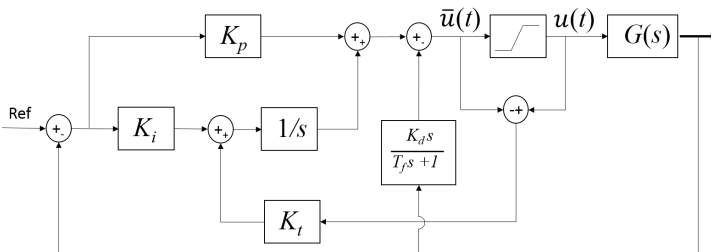


FIGURA 2. Modelo de controlador implementado.

Este fue diseñado con el software MATLAB e implementado más tarde en el software LABVIEW. Para escribir la señal de control en la planta implementada, se utilizó una topología de Step-down [19]. En este caso fue con un convertidor buck.

## ***Simulación y compatibilidad PET***

La simulación de compatibilidad con equipos de medicina nuclear, se realizó con la herramienta GEANT4, la cual simula los procesos relacionados con la interacción radiación materia mediante el Método Montecarlo.

La simulación consiste en desarrollar la geometría requerida con el arreglo del equipo de resonancia magnética incluyendo el arreglo de bobinas de Maxwell, dentro de un PET conformado por un arreglo de 9 anillos cada uno con 32 detectores de NaI. Al posicionar una fuente de positrones de  $^{18}\text{F}$  en el centro de resonador, se determinó si el arreglo de bobinas permite la correcta deposición de energía en los detectores. Esto permitirá determinar la compatibilidad del arreglo de bobinas con equipos de Medicina Nuclear para determinar cómo se ve afectado el proceso físico principal por el cual se realiza una imagen por emisión de positrones en el arreglo propuesto, como se observa en la figura 5.

## **Resultados**

Al acondicionar el arreglo de bobinas de Maxwell al equipo de resonancia se logró obtener una mejor señal de FID. Se observa por tanto una reducción en la relación señal ruido de  $26.4 \pm 1.3 \mu\text{V}$  a  $5.7 \pm 0.6 \mu\text{V}$ . La disminución en la relación señal ruido permitió obtener la señal de una muestra de un cilindro de agua en el dominio de la frecuencia (ver figura 3) y la imagen en 2D de la misma muestra (ver figura 4).

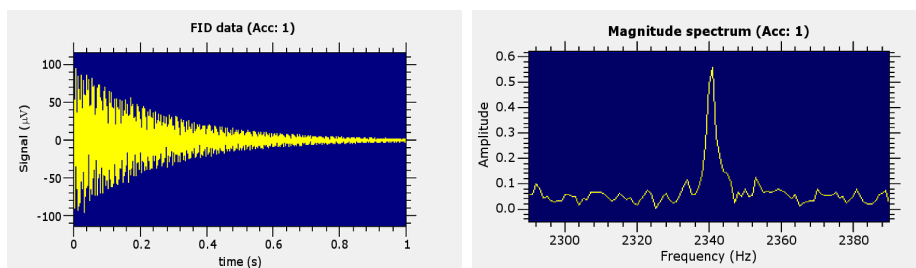


FIGURA 3. Señal obtenida en el dominio del tiempo (izq) y la frecuencia (der) de las primeras muestras de agua. Mediciones realizadas utilizando el software PROSPA del equipo Magritek.

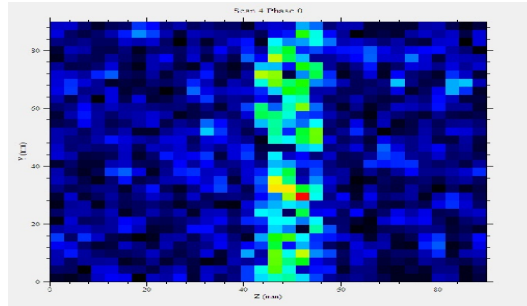


FIGURA 4. Imagen obtenida de las primeras muestras de agua. Mediciones realizadas utilizando el software PROSPA del equipo Magritek.

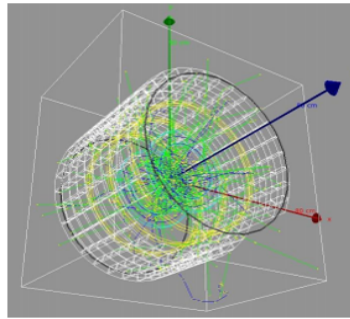


FIGURA 5. Representación espacial de la distribución de elementos de la simulación en GEANT4. El volumen de la fuente de  $^{18}\text{F}$  es de  $5\text{ cm}^3$ , ubicado en el centro del equipo MRI con una actividad de  $40\text{ kBq}$ .

En la figura 5 se observa la trayectoria de las partículas resultantes del decaimiento del  $^{18}\text{F}$ . Destaca el gran número de fotones (en verde) frente algunos electrones (azul), como se espera de este tipo de fuentes. Se utilizó un volumen de fuente emisora de  $5\text{ cm}^3$ , ubicado en el centro del equipo MRI con una actividad de  $40\text{ kBq}$ . Se puede observar por los resultados obtenidos, que no se presenta atenuación significativa debida al arreglo de bobinas, ya que sin el arreglo llegan al volumen sensible del detector cerca del  $49.95\% \pm 0.35\%$  de las partículas emitidas haciendo alguna interacción, mientras que con el arreglo llega el  $49.70\% \pm 0.35\%$ .

## Conclusiones

En este trabajo se estudia la compatibilidad de equipos de IRM de campo bajo como con equipos de Medicina Nuclear. El diseño

fue adaptado para un equipo de IRM ya existente y de uso didáctico e investigativo. La implementación de diferente software para lograr el control y la adquisición de señales permite optimizar la homogeneidad del campo magnético de forma directa y por ende de la señal en diferentes aplicaciones. A partir de la minimizaciones de los niveles de ruido respecto a los obtenidos anteriormente, se pueden obtener las primeras imágenes de calidad suficiente.

Se observa que la diferencia porcentual del número de fotones que llegan al anillo de detectores en el arreglo de detección con y sin bobinas de Maxwell es de 0.5 %, estando dentro del orden de la desviación estándar de las medidas. Por lo tanto no existe una variación significativa entre los eventos de aniquilación detectados con o sin bobinas, debido al arreglo. Lo que implica que el arreglo de bobinas es compatible con equipos de Medicina Nuclear ya que permite el paso de radiación sin afectar la calidad de la imagen obtenida por la PET.

## Referencias

- [1] S. Vandenberghe and P. K. Marsden, *Phys. Med. Biol* **60**, R115 (2015).
- [2] A. Rosenkrantz, K. Friedman, H. Chandarana, A. Melsaether, L. Moy, Y.-S. Ding, K. Jhaveri, L. Beltran, and R. Jain, *Am. J. Roent. Genol* **206**, 162 (2015).
- [3] S. R. Cherry, A. Louie, and R. Jacobs, *P. IEEE* **96**, 416 (2008).
- [4] C. Goetz, E. Breton, P. Choquet, V. Israel-Jost, and A. Constantinesco, *J. Nucl. Med.* **49**, 88 (2008).
- [5] M. Sarracanie, C. D. LaPierre, N. Salameh, D. E. J. Waddington, T. Witzel, and M. S. Rosen, *Sci. Rep.* , 1472 (2015).
- [6] R. Kraus, Jr., M. Espy, P. Magnelind, and P. Volegov, *Ultra-Low Field Nuclear Magnetic Resonance* (Oxford, 2014).
- [7] M. E. Halse, A. Coy, R. Dykstra, C. Eccles, M. Hunter, R. Ward, and P. T. Callaghan, *J. Magn. Reson.* **182**, 75 (2006).

- 
- [8] Magritek, “Terranova-mri: Eart’s Field MRI Teaching System” (Consultada el 21 de septiembre de 2017).
  - [9] S. Agostinelli and et al, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A **506**, 250 (2003).
  - [10] J. Allison, K. Amako, J. Apostolakis, H. Araujo, P. Arce, M. Asai, G. Barrand, R. Capra, S. Chauvie, R. Chytracek, P. Cirrone, G. Cooperman, G. Cosmo, G. Cuttone, G. Daquino, M. Donszelmann, M. Dressel, G. Folger, F. Foppiano, and H. Yoshida, IEEE. T. Nucl. Sci. **53**, 270 (2006).
  - [11] J. Allison and et al., Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A **835**, 186 (2016).
  - [12] M. Levitt, *Spin Dynamics: Basics of Nuclear Magnetic Resonance* (Wiley, 2008).
  - [13] G. Knoll, *Radiation Detection and Measurement* (Wiley, 2000).
  - [14] P. Mansfield and B. Chapman, J. Phys. E. Sci. Instrum. **19**, 540 (1986).
  - [15] P. Blümmler and F. Casanova, *CHAPTER 5: Hardware developments: Halbach magnet arrays* (2016) pp. 133–157.
  - [16] H. Raich and P. Blümmler, Concepts Magn. Reso. B **23B**, 16 (2004).
  - [17] J. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism: 2* (Clarendon Press, 1873).
  - [18] K. J. Altstrom and R. M. Murray, *Feedback systems. An introduction for scientist and engineers* (Princeton University Press, 2009).
  - [19] R. Mammano, Transactions S.A.I.E.E. , 25 (2001).



# CONFIRMACIÓN DIAGNÓSTICA DE LA EVALUACIÓN DEL TRAZADO DEL MONITOREO FETAL ELECTRÓNICO A PARTIR DE LA PROBABILIDAD Y LA RELACIÓN $S/k$ DE LA ENTROPIA

## DIAGNOSTIC CONFIRMATION OF THE EVALUATION OF THE TRACING OF ELECTRONIC FETAL MONITORING BASED ON PROBABILITY AND THE $S/k$ RATIO OF ENTROPY

Yolanda Soracipa<sup>1,2</sup>, Javier Rodríguez<sup>2</sup>, Marcos Castillo<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universidad Nacional Abierta y a Distancia. Colombia.

<sup>2</sup> Grupo Insight - Hospital Universitario Nacional de Colombia. Centro de Investigaciones -  
Clínica del Country. Bogotá, Colombia.

<sup>3</sup> Universidad de la Sabana. Grupo Salud Sexual y Procreativa de la Mujer. Bogotá,  
Colombia.

(Recibido: 12/2017. Aceptado: 03/2018)

### Resumen

La correcta interpretación del trazado del monitoreo fetal electrónico es un desafío para la clínica actual. Recientemente se desarrolló una metodología diagnóstica fundamentada en las teorías de probabilidad y la entropía, que logró evaluar de manera objetiva y reproducible el trazado de la monitoría fetal diferenciando normalidad de enfermedad y evolución entre estos estados. El objetivo del presente trabajo es aplicar dicha metodología para evaluar el trazado de la monitoría fetal y confirmar su aplicabilidad clínica y reproducibilidad. Para ello se evaluaron 25 monitorías fetales en 20 minutos divididas en dos grupos: 10 normales y 15 con pérdida de bienestar fetal, de acuerdo con la interpretación convencional de la monitoría y la evaluación clínica general. Se tomaron frecuencias cardíacas presentadas en intervalos discretos de tiempo a partir de los trazados, y se evaluó la probabilidad y la relación

$S/k$  de la entropía. Las relaciones  $S/k$  de la entropía para las monitorías evaluadas diferenciaron normalidad de enfermedad. Se confirmó la aplicabilidad clínica del diagnóstico físico y matemático para la evaluación del trazado de la monitoría fetal.

**Palabras clave:** Dinámicas no lineales, Entropía, Probabilidad, Monitoreo fetal.

### Abstract

The correct interpretation of the layout of fetal monitoring is a challenge for current clinical; recently a diagnostic methodology based on the theories of probability and entropy, which managed to assess in an objective and reproducible way the layout of differentiating normal fetal monitoring and evolution of disease between these states was developed. The aim of this paper is to apply this methodology to assess fetal monitoring tracing and confirm their clinical applicability and reproducibility. For this 25 fetal monitoring in 20 minutes divided into two groups were evaluated: 10 normal and 15 with loss of fetal well-being, according to the conventional interpretation of the monitoring, and general clinical evaluation. Heart rates presented in discrete time intervals from the paths they took, and the likelihood and the  $S/k$  ratio of entropy was evaluated. The  $S/k$  relations of entropy for normal differentiated evaluated by monitors disease. The clinical applicability of physical and mathematical diagnostic assessment of fetal monitoring tracing was confirmed.

**Keywords:** Nonlinear dynamics, Entropy, Probability, Fetal monitoring.

### Introducción

La Organización Mundial de la Salud (OMS), estima que mueren 2.7 millones de lactantes durante su primer mes de vida cada año, en igual número de casos se encuentra los mortinatos. Alrededor de la mitad de los fallecimientos acontece en las primeras 24 horas de vida, y un 75% durante la primera semana. Se considera las 48 horas posteriores al nacimiento, como el momento clave para realizar un seguimiento a la madre y al niño para evitar y tratar

enfermedades [1]. En Colombia, durante el periodo del 2005 al 2013 las afecciones originadas en el periodo perinatal produjeron el mayor número de las muertes en menores de cinco años, le siguieron las malformaciones congénitas, y los menores casos se presentaron en las enfermedades del sistema respiratorio durante este periodo [2].

La cuantificación de la posibilidad de ocurrencia futura de un evento determinado dentro de una gama de eventos posibles, es calculada con la probabilidad. Axiomáticamente los valores de la probabilidad toman valores siempre positivos entre cero y uno, de tal forma que la suma de la probabilidad de todos los hechos posibles será igual a uno [3]. Históricamente el concepto de entropía nace con los trabajos de Carnot, en el diseño de máquinas térmicas que lograran el movimiento continuo aplicando para ello un mínimo de energía [4]. Posteriormente, este concepto fue reformulado en el estudio de los gases ideales, la mecánica estadística y la termodinámica. La generalización de este concepto para los sistemas fuera del equilibrio, fue realizada por Boltzmann-Gibbs, definiendo formalmente la entropía equiprobable y no equiprobable [5].

Uno de los dispositivos electrónicos de uso más frecuente, que permite valorar el bienestar fetal, es el monitor eléctrico fetal (MEF); por medio de este dispositivo se evalúa la presencia o ausencia de aceleraciones y desaceleraciones de la frecuencia cardiaca (FC) fetal, así como sus características, en relación con los movimientos in útero del feto y la actividad uterina. La monitoría fetal durante el trabajo de parto permite evaluar la necesidad de realizar intervenciones oportunas [6].

Para las gestantes de alto o bajo riesgo la monitorización fetal electrónica ha demostrado como beneficio significativo la disminución en la incidencia de convulsiones neonatales, aunque sin influir en las tasas de mortalidad perinatal y a expensas de un aumento de los partos intervenidos [6]. La interpretación de los trazados de FC fetal, se ve influida por la variabilidad inter e intra observador, por lo cual su utilidad clínica continúa siendo tema de discusión [7]; esto ha sido la base para litigios respecto a lesiones en nacimientos [8]. Los primeros estudios hechos a

obstetras experimentados, consistían en interpretar 150 registros cardiotocográficos, los cuales fueron entregados sin datos clínicos, y cuyas valoraciones debían ser clasificadas conforme a las tres categorías propuestas por el National Institute of Child Health and Human Development; se encontró que sólo el 57.7% de estas valoraciones coincidieron [9]. En la práctica clínica actual se desconocen los valores predictivos del monitoreo fetal, que les permitan a los profesionales decidir la mejor conducta ante cualquier caso adverso [10]. Lo anterior revela que aún no se ha llegado a una concordancia entre los obstetras respecto a la evaluación clínica de la condición fetal con la monitoría, para el diseño de propuestas de manejo obstétrico [11], y se ha mostrado que con otras pruebas podría mejorar su capacidad diagnóstica [12]. Por esta razón, la monitoría en la actualidad no se considera una prueba diagnóstica, sino sólo un examen del cual se obtiene una interpretación, que debe ser analizada junto con el resto de información clínica para el establecimiento de un diagnóstico real.

Para estudiar el funcionamiento del corazón, muchas investigaciones recientes emplean el análisis de la variabilidad de la frecuencia cardíaca (VFC). Sin embargo, los métodos lineales clásicos utilizados no pueden explicar toda la información condensada en la variabilidad de latido a latido [13]. Entre los trabajos desarrollados en el contexto de métodos no lineales, se reveló que la dinámica cardíaca patológica del adulto se asocia a un comportamiento periódico, o bien a un comportamiento altamente irregular, en cambio un comportamiento normal se encuentra en medio de estos dos extremos [14]. Partiendo de esta nueva concepción de normalidad y enfermedad, se desarrolló una cuantificación de la FC fetal mediante un método físico y matemático fundamentado en la teoría de la probabilidad y la relación  $S/k$  de la entropía. Los valores de la relación  $S/k$  determinaron el rango de valores normales, que determinan la diferencia entre salud y enfermedad, así como todas las posibles dinámicas cardíacas fetales que podrían presentarse, independientemente de las enfermedades que se hayan diagnosticado durante el embarazo. Esta metodología diagnóstica aparte de diferenciar entre salud y enfermedad, evalúa eventos no perceptibles desde parámetros clínicos convencionales como lo

son, las taquicardias, bradicardias, intentos fallidos de inducción del parto, y Riesgo de Pérdida de Bienestar Fetal (RPBF). Adicionalmente proporciona a la práctica clínica una herramienta de ayuda diagnóstica más precisa que permite evaluar enfermedades crónicas, su evolución y los casos en que se agudizan, así mismo permite evidenciar los casos que ya tienen un comportamiento agudo [15].

El propósito del presente estudio es confirmar la aplicabilidad clínica de la metodología diagnóstica previamente desarrollada para evaluar el trazado del Monitoreo Fetal Electrónico (MFE), fundamentada en la probabilidad y la relación  $S/k$  de la entropía [15].

## Materiales y métodos

### *Definiciones*

**Probabilidad Laplaciana de la frecuencia cardíaca fetal:** es el número de veces en que aparece cada frecuencia cardíaca  $N_A$  en intervalos de 10 segundos, dividido entre el total de frecuencias cardíacas de todo el trazado ( $N$ ).

$$P_n = \frac{\text{Repeticiones del estado } A}{\text{Total de frecuencias cardíacas medidas}} = \frac{N_A}{N} \quad (1)$$

**Entropía y proporción  $S/k$  del trazado del MFE:** Para el caso de sistemas con distribuciones no equiprobables, como el hallado en este estudio se calculó con la ecuación de Boltzmann-Gibbs.

$$S = -k \sum_{n=0}^N P_n \ln(P_n) \quad (2)$$

El despeje algebraico de la constante de Boltzmann deja la ecuación 2 en términos de la relación  $S/k$ , así:

$$\frac{S}{k} = - \sum_{n=0}^N P_n \ln(P_n) \quad (3)$$

Siendo  $S$  la entropía de la monitoría,  $k$  la constante de Boltzmann ( $1.38 \times 10^{-23}$  Joules/kelvin), y  $P_n$  es la probabilidad del  $n$ -ésimo estado.

## Procedimiento

Este es un estudio físico matemático de tipo observacional de corte transversal para evaluar el trazado del MFE con y sin stress. Adicionalmente, se realizó un estudio ciego, para ello fueron seleccionados 25 trazados del MFE de 20 minutos de pacientes en el último trimestre de embarazo y enmascaradas la evaluación clínica convencional del trazado del MFE. Una parte de los trazados del MFE fueron seleccionados y evaluados bajo parámetros convencionales por obstetras de la Clínica de la Sabana, la otra parte proviene de bases de datos de investigaciones previas del grupo Insight, evaluadas de igual forma por obstetras expertos.

Los trazados del MFE seleccionados para el estudio corresponden a 10 trazados evaluados como ACOG I, con resultado reactivo provenientes de pacientes sin compromiso clínico, 15 como ACOG III, con resultado no reactivo asociado a Riesgo de Pérdida de Bienestar Fetal.

Los trazados provienen de un monitor fetal electrónico de marca Corometrics que registra la frecuencia cardíaca fetal en el papel con una velocidad de 3 centímetros por minuto y una escala de 30 latidos por minuto por cada centímetro de papel.

A continuación, los valores máximos y mínimos de la FC en intervalos de 10 segundos fueron tabulados y se realizó la medición de cuántas veces se repitió la FC en el trazado y se sumaron todas las apariciones de estas frecuencias para cada registro, para realizar el cálculo de probabilidades (ver ecuación 1). Calculada la probabilidad se halló el valor máximo, luego se halló la entropía y las relaciones  $S/k$  de la entropía (ver ecuación 2 y 3). Con base en estos valores, se estableció el diagnóstico físico y matemático y se comparó con la evaluación clínica convencional para establecer similitudes y diferencias entre la capacidad diagnóstica lograda.

Se calculó sensibilidad y especificidad, estas medidas se realizaron a través de una clasificación binaria donde los verdaderos positivos (VP) corresponden al número de trazados clasificados como no reactivos y que se encuentran dentro de los valores matemáticos correspondientes a anormalidad, falsos positivos (FP) es el número de trazados que matemáticamente se comportan como estudios dentro de la anormalidad y cuya evaluación clínica es reactiva, falsos negativos (FN) es el número de trazados evaluados clínicamente como no reactivos pero cuyos valores matemáticos se corresponden con normalidad y finalmente verdaderos negativos (VN) definidos como el número de trazados evaluados clínicamente como reactivos y cuyos valores matemáticos también se asocian con la normalidad.

Para evaluar la concordancia entre la evaluación físico-matemática y la evaluación clínica convencional se calculó el coeficiente Kappa a través de la siguiente fórmula:

$$K = \frac{Co - Ca}{To - Ca} \quad (4)$$

Donde  $Co$  es el número de pacientes con el mismo diagnóstico de acuerdo con la evaluación físico matemática y con el Gold Standard, que corresponde a la evaluación clínica convencional.  $To$  totalidad de observaciones, es decir, la totalidad de trazados analizados.  $Ca$  son las concordancias atribuibles al azar, que se calculan de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$Ca = \left[ \frac{(f_1 \cdot C_1)}{To} \right] + \left[ \frac{(f_2 \cdot C_2)}{To} \right] \quad (5)$$

Donde  $f_1$  es el número de trazados que presentan valores matemáticos dentro de los límites de normalidad,  $C_1$  es el número de trazados reactivos,  $f_2$  es el número de trazados que presentan valores matemáticos asociados a anormalidad,  $C_2$  es el número de trazados clasificados como no reactivos y  $To$  es el número total de trazados.

## Consideraciones éticas

El presente estudio cumple con los principios éticos de la Declaración de Helsinki de la Asociación Médica Mundial y, según la Resolución 8430 de 1993 del Ministerio de Salud colombiano se declara como una investigación con riesgo mínimo por lo que se realizan cálculos físicos y matemáticos sobre reportes de exámenes y paraclínicos no invasivos que han sido prescritos previamente según protocolos establecidos convencionalmente, protegiendo también, el anonimato e integridad de los participantes.

## Resultados

La probabilidad de las FC fetales (tabla 1) varió entre 0 y 0,9 para los trazados evaluados. Los trazados de MFE asociadas a normalidad presentaron probabilidades que variaron entre 0 y 0,3917, y las patológicas variaron entre 0 y 0,9. El valor de la relación  $S/k$  de la entropía osciló entre -0,4675 y -2,1383; para los trazados clínicamente normales estos valores se encontraron entre -1,7157 y -2,0528 y para los trazados anormales entre -0,4675 y -2,1383.

Con base en estos valores se estableció el diagnóstico matemático (tabla 2), encontrando que de las 10 monitorías clínicamente asociadas a normalidad, 8 presentaron un diagnóstico matemático de normalidad, mientras que 2 presentaron un diagnóstico de evolución a enfermedad. Por otro lado, de las 15 monitorías asociadas clínicamente a enfermedad, se encontró que 13 presentaron un diagnóstico matemático de enfermedad, mientras que 2 se encontraron en evolución entre ambos estados. Al realizar las medidas estadísticas se encuentra una sensibilidad de 0,87 y una especificidad de 0,8, y un coeficiente Kappa de 0,71.

## Discusión

Este es el primer trabajo en el cual se confirma la aplicabilidad clínica de la metodología diagnóstica diseñada previamente para evaluar el trazado del MFE a partir de los valores discretos de la FC fetal, calculando la probabilidad y las relaciones  $S/k$  de la



Rango	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
95	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
100	0	0,017	0	0,042	0	0	0	0	0	0
105	0	0,008	0	0	0	0	0	0	0	0,017
110	0	0,025	0	0,042	0,008	0,017	0	0	0	0,008
115	0	0,083	0,042	0,008	0	0,008	0,008	0	0	0,017
120	0,092	0,225	0,900	0,150	0,083	0,092	0,025	0,033	0,025	0,175
125	0,233	0,300	0,017	0,217	0,167	0,142	0,008	0,017	0,025	0,267
130	0,392	0,217	0,025	0,258	0,692	0,167	0,167	0,208	0,125	0,292
135	0,108	0,042	0	0,058	0,025	0,092	0,150	0,200	0,167	0,042
140	0,025	0,067	0,008	0,125	0,025	0,142	0,250	0,375	0,233	0,117
145	0,017	0,017	0,008	0,008	0	0,100	0,117	0,017	0,092	0,008
150	0,083	0	0	0,025	0	0,133	0,092	0,125	0,167	0,058
155	0,017	0	0	0,042	0	0,108	0,075	0,017	0,108	0
160	0,033	0	0	0,025	0	0	0,067	0,008	0,058	0
165	0	0	0	0	0	0	0,017	0	0	0
170	0	0	0	0	0	0	0,008	0	0	0
175	0	0	0	0	0	0	0,008	0	0	0
180	0	0	0	0	0	0	0,008	0	0	0
185	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLA 1. Las columnas representan los valores de la distribución de las probabilidades de 10 de los trazados de monitorías fetales seleccionadas.

No.	Evaluación convencional	Trazado	ACOG	$S/k$	Max P	Dx. matemático
1	Normal	Reactivo	I	-1,7157	0,3917	N
2	Normal	Reactivo	I	-1,8168	0,3000	N
3	Amenaza de parto pretérmino	No reactivo	III	-0,4675	0,9000	N
4	Normal	Reactivo	I	-2,0528	0,2583	E
5	Ruptura prematura de membranas	No reactivo	III	-0,9850	0,6917	P
6	Preeclamsia severa	No reactivo	III	-2,1383	0,1667	E
7	Intento de aborto	No reactivo	III	-2,1309	0,2500	E
8	Hipertensión arterial	No reactivo	III	-1,6344	0,3750	P
9	Normal	Reactivo	I	-2,0068	0,2333	N
10	Normal	Reactivo	I	-1,7820	0,2917	N

TABLA 2. Evaluación convencional de enfermedades y estados de interés en la práctica clínica presentados durante el embarazo, junto con la interpretación convencional del trazado del monitoreo fetal y la clasificación de la monitoría según las guías American College of Obstetricians and Gynecologists (ACOG), los valores  $S/k$ : de la proporción de la entropía, **Max P**: la probabilidad máxima encontrada dentro de la distribución de probabilidades de cada trazado, y **Dx. Matemático**: diagnóstico matemático, donde N: normal y E: evolución y P: patológico.

entropía en cada una de las monitorías fetales seleccionadas para el estudio. La metodología diferenció de forma objetiva y reproducible normalidad de enfermedad independientemente del origen de la alteración de la frecuencia cardíaca, detectando tanto bradicardias como taquicardias, a partir de los valores de probabilidad y la entropía, estableciendo además un rango especial para evolución entre normalidad y enfermedad, de importancia clínica a nivel preventivo.

Cabe resaltar que hubo casos evaluados clínicamente con categoría I (normal), donde el diagnóstico matemático arrojó un diagnóstico de evolución a la enfermedad, como es el caso del trazado 4 del MFE, dado que se encuentran dentro del rango [2.0290-2.1667], según los valores establecidos previamente [15]. Esto revela que la metodología puede detectar alteraciones leves subdiagnosticadas, por lo que se esperaba que las medidas estadísticas de sensibilidad, especificidad y coeficiente Kappa, no presentaran los valores máximos, como efectivamente sucedió. Los trazados del MFE 6 y 7 presentaron un diagnóstico matemático de evolución a la enfermedad, al ubicarse dentro del rango [2.0290-2.1667]. El valor máximo de probabilidad para los trazados del MFE 4, 6 y 7 revela que se encuentran dentro de los rangos de enfermedad [0,152-0,274], establecidos previamente [15]. Vale la pena resaltar que los trazados del MFE fueron evaluados con el fin de desarrollar un experimento teórico-práctico simplificador, pues al evaluar sus características matemáticas con base en una estructura teórica apropiada, en este caso la entropía y la relación  $S/k$ , es posible establecer diferencias matemáticas esenciales entre los dos estados evaluados y de este modo desarrollar predicciones que puedan ser comprobadas con los casos restantes.

La presente metodología evidencia la importancia de contar con un valor numérico para evaluar la dinámica, pues no sólo es posible establecer un estado de normalidad o enfermedad, sino observar objetivamente el nivel de gravedad, que se asocia a un aumento o una disminución importante de los valores y la relación  $S/k$  de la entropía, así como a probabilidades máximas muy altas o muy bajas. De este modo es posible determinar qué pacientes requieren

un seguimiento más estricto, y evaluar objetivamente los cambios de un mismo paciente en el tiempo.

Se han desarrollado diferentes estudios que evidencian la dificultad de establecer la monitoría fetal como una medida diagnóstica y predictiva a nivel clínico [6, 9]. Tal es el caso de un estudio realizado con el propósito de encontrar valores predictivos del monitoreo fetal en embarazos prolongados, a partir de la evaluación de la frecuencia cardíaca sin estrés NST (Non Stress Test) y con estrés OCT (Oxytocin contraction Test) donde se hallaron valores de especificidad del 76.25 % y con estrés con sensibilidad del 29.4 %. Sin embargo, estos resultados se alejan de manera significativa de los valores reportados en la literatura mundial que estima valores entre 82 – 94 % para NST y para OCT 41 % [10]. Las NSTs y OCT con reporte dudoso fueron incluidas en el grupo de monitorías no Reactivas, para evitar riesgo de hipoxia fetal o sufrimiento fetal agudo. No obstante, el estudio no encontró valores predictivos confiables de aplicación clínica, sugiriendo a cambio la necesidad de desarrollar pruebas más sensibles que disminuyan la tasa de falsos positivos en la prueba NST [10]; la MEF anteparto aislada no permite por sí sola predecir o no enfermedad, ni qué tipo de enfermedad, es por esto que es necesario analizar otras pruebas de bienestar fetal [16] para establecer un diagnóstico.

Este es un ejemplo de que sigue siendo un desafío dentro de la práctica clínica establecer los patrones normales y anormales de FC fetal, dadas las variaciones asociadas a la edad estacional y las respuestas fisiológicas de un feto prematuro en comparación con un feto a término. Por otra parte, la metodología desarrollada por Rodríguez para la evaluación del trazado de la monitoría fetal [15], evidenció que a partir de las distribuciones de las probabilidades de la frecuencia cardíaca es posible diferenciar un trazado de monitoría fetal normal, de una que no presenta aceleraciones o que presenta desaceleraciones pronunciadas de acuerdo con la observación médica convencional, en cualquier monitoría asociada a un feto con edad gestacional de 28 semanas o más, sin tener en cuenta criterios como la etiología del estado patológico, factores

de riesgo o análisis de tipo estadístico. Estas diferencias pueden ser cuantificadas con la relación  $S/k$  de la entropía, debido a que se están evaluando las diferentes formas de autoorganización de distribuciones de probabilidades. Dado que este es un examen no invasivo, de amplia cobertura y de bajo costo, su implementación en la práctica clínica puede traer muchas ventajas tanto a nivel clínico como económico.

En la medicina, en particular en el área de cardiología, la aplicación de teorías físicas y matemáticas ha contribuido en la creación de nuevos diagnósticos clínicos para la evaluación de la dinámica cardíaca fetal, neonatal y de adulto [15, 17–19]. Teorías como la de los sistemas dinámicos, la geometría fractal, la probabilidad y la entropía, en el estudio de la dinámica cardíaca, han contribuido a establecer diferencias entre dinámicas cardíacas agudas, crónicas y normales, así como su evolución a estados adversos o favorables, de manera objetiva y reproducible, todas ellas de aplicación clínica y de ayuda diagnóstica [15, 17–19]. También, se ha evaluado la dinámica cardíaca neonatal [18]. Recientemente se desarrolló una evaluación matemática de variables fisiológicas en pacientes de la unidad de cuidados intensivos logrando establecer predicciones de mortalidad objetivas y reproducibles, de aplicación clínica [19].

## Agradecimientos

Agradecemos a las directivas de la Universidad de la Sabana, en especial a la Dirección General de Investigación cuyo presente trabajo hace parte de los resultados alcanzados para el proyecto MED 203-2015, financiado por la Universidad de la Sabana.

También agradecemos al Hospital Universitario Nacional de Colombia, en especial al Dr. Javier Eslava, Vicedecano de Investigación, por su apoyo al Grupo Insight.

Extendemos además nuestros agradecimientos al Centro de Investigaciones de la Clínica del Country, en especial a los Doctores Alfonso Correa, Subdirector de Educación e Investigación, y Adriana Lizbeth Ortiz, epidemióloga.

Dedicación: A nuestros hijos.

## Referencias

- [1] OMS, “Reducción de la mortalidad en la niñez,” (2006).
- [2] MINSALUD, “Análisis de situación de salud,” (2015).
- [3] P. Laplace, *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* (INTEMAT, 1985).
- [4] S. Carnot, *Reflexiones sobre la potencia motriz del fuego y sobre las máquinas adecuadas para desarrollar esta potencia y otras notas de caracter científico* (Alianza, 1987).
- [5] A. Matvéev, *Física molecular*. (Mir. Moscow, 1987).
- [6] L. Heelan, J. Perinat. Educ. **22**, 156 (2013).
- [7] L. Devoe, S. Golde, Y. Kilman, D. Morton, K. Shea, and J. Waller, Am. J. Obstet. Ginecol. **183**, 361 (2000).
- [8] T. Sartwelle and J. Johnston, J. Child. Dev. Disord. **02**, 1 (2016).
- [9] C. Blackwell, W. Grobman, L. Antoniewicz, M. Hutchinson, and B. Gyamfi., Am. J. Obstet. Gynecol. **205**, 378.e1–378.e5 (2011).
- [10] D. Carrasco and C. Valladares, Rev. Med. Post. UNAH. **9**, 388 (2006).
- [11] D. K. Donker, H. P. van Geijn, and A. Hasman, Eur. J. Obstet. Gyn. R. B. **52**, 21 (1993).
- [12] T. Stampalija, M. Signaroldi, C. Mastroianni, E. Rosti, V. Signorelli, D. Casati, and et al., J. Matern. Neonatal Med. **25**, 1517–1520 (2012).
- [13] H. Kantz, J. Kurths, G. Mayer-Kress, and Editores, *Nonlinear Analysis of Physiological Data* (Springer, 1998).
- [14] A. Goldberger, L. Amaral, J. Hausdorff, P. Ivanov, C. Peng, and H. Stanley, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **99**, 2466 – 2472 (2002).
- [15] J. Rodríguez, MOMENTO , 49 (2012).
- [16] M. Preboth, “Guía del colegio americano de obstetricia y ginecología sobre la vigilancia fetal anteparto.” (2000).
- [17] J. Rodríguez, Rev. Fac. Med. Univ. Nac. Colomb. **54**, 96 (2006).

- [18] J. Rodríguez, S. Prieto-Rodríguez, M. Flórez-Cardenas, C. Alarcón-Ávila, R. López-Criuz, G. Aguirre-Dávila, L. Pinilla-Bonilla, O. Rovira-Cabrales, and L. Méndez-Pino, *Salud Uninorte Barranquilla*. **30**, 359 (2014).
- [19] J. Rodríguez, *J. Med. Med. Sci.* **6**, 102 (2015).

## IMPLEMENTATION OF AN ALGORITHM FOR SQUARE ROOT COMPUTATION IN AN FPGA ARRAY BY USING FIXED POINT REPRESENTATION

## IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DE LA RAÍZ CUADRADA EN UN ARREGLO FPGA USANDO REPRESENTACIÓN DE PUNTO FIJO

Jorge H. López<sup>1</sup>, Johans Restrepo<sup>2</sup>, Jorge E. Tobón<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Group of Scientific Instrumentation and Microelectronics. Institute of Physics, University of Antioquia, A.A. 1226, Medellín, Colombia.

<sup>2</sup> Group of Magnetism and Simulation. Institute of Physics, University of Antioquia, A.A. 1226, Medellín, Colombia.

<sup>3</sup> Group of Solid State Physics. Institute of Physics, University of Antioquia, A.A. 1226, Medellín, Colombia.

(Recibido: 01/2018. Aceptado: 05/2018)

### Abstract

The implementation of the square root computation in an FPGA device is presented in this work. The calculation is not one of convergence type, so the accuracy is very high and there are no conditions or restrictions for the operation to be fulfilled. It also consumes much less hardware surface than other algorithms for calculating the square root of a number. The number entered is of fixed-point representation, it is parameterizable, that is, two constants  $N$  and  $M$  can define the size of the number, where  $N$  defines the number of bits in the integer part of the number and  $M$  defines the number of bits of the fractional part.

**Keywords:** VHDL, FPGA, Operation, Square root, VLSI.

## Resumen

En este trabajo se presenta la implementación de la raíz cuadrada de un número en un dispositivo FPGA. El algoritmo usado no es un algoritmo de convergencia, por tanto, la exactitud del cálculo es muy alta, además no existen restricciones de ningún tipo para que la operación sea llevada a cabo. El uso de hardware en la FPGA es mucho menor que el usado por otros algoritmos que también calculan la raíz cuadrada de un número. Para representar el número se usa la representación de punto fijo, para ello se usan dos parámetros,  $N$  y  $M$ , donde  $N$  define el número de bits que representan la parte entera y  $M$  define el número de bits de la parte fraccional.  $M$  y  $N$  son definidos en la síntesis del módulo.

**Palabras clave:** VHDL, FPGA, Operación, Raíz Cuadrada, VLSI

## 1 Introduction

Square root is a very common mathematical function, used in statistical calculations, numerical analysis, digital processing of data, etc. However, in Hardware Description Language (HDL), it is not an easy function to implement, so the Field Programmable Gate Arrays (FPGAs) do not bring this function as a primitive or a built-in function.

However, there are modules capable of calculating the square root of a number. These modules are based on convergence algorithms such as the Newton Raphson method [1–4], redundant and non-redundant algorithms [5], some of them are based on Taylor series expansions [6] and other less common methods [7]. In particular, the convergence algorithms are approximations that depend on the number of iterations to minimize the error in the calculation, which implies longer processing time. Methods, such as the Taylor series expansion, allow to perform the calculation much faster, but a greater amount of logical resources or hardware surface are required. Besides, these algorithms use to include divisions, another operation that is also difficult to implement and which demands a larger area within the logical device [8].



In this paper we present a virtual HDL (or VHDL) language module that calculates the square root of a number. The computation method does not use convergence criteria or approximation algorithms, so it does not depend on how often the iteration is done to obtain a result with more accuracy. In the method presented we use the division by two, which in the binary system only consists of doing a binary shift to the right, therefore it is not necessary the implementation of another module responsible for division. Hence, our method requires much less computational cost and logical resources than other algorithms [9]. In addition, the result is almost exact with variation only in the last binary number.

Since we are dealing with HDL language, the number for which the square root operation is performed, it is a binary one in the fixed point representation [10], where the number of bits corresponding to the integer part is  $2(N - 1)$  whereas the fractional part is  $M$ , and where in turn the numbers  $N$  and  $M$  stand for integer numbers previously determined as inputs of the algorithm. Such a parameterization allow to the developer or user to tune the module according to the needs. Thus, the maximum number to which the square root can be determined is therefore:

$$2^{2(N-1)} - 1 \quad (1)$$

and the associated error, whenever is not the case of an integer root, is given by:

$$2^{-M} \quad (2)$$

Even though the module we introduce does not perform the square root operation with numbers under the float point representation, it is simple to carry out such a translation from the fixed point representation. To do so, first, the square root of the mantissa must be estimated (fractional part) and after that, to divide by two the part standing for the power. This last step simply means to move one bit to the left.

## 2 Algorithm

Basically, the algorithm consists of taking a number and subtracting or adding its half, always trying to reach that number for which, when being squared, it results in the number entered. In order to realize how the algorithm works, suppose that we enter the positive integer  $S$  to which we want to calculate the square root. Steps in the algorithm read as follows:

1. We initialize a variable  $Y$  with the largest possible number allowed by the module.
2. We square the variable  $Y$  and compare it with the input value  $S$ . Three cases may occur.
  - (a) If  $Y^2 = S$ , the calculation ends and the result is the number assigned to the variable  $Y$ .
  - (b) If  $Y^2 > S$ , we assign  $Y = Y - \frac{Y}{2}$ .
  - (c) If  $Y^2 < S$ , we assign  $Y = Y + \frac{Y}{2}$ . Iteration over the last step is performed until the exact solution is reached or until the highest resolution allowed by the module is achieved.

At the end of the calculation we obtain:

$$\sqrt{S} = Y \tag{3}$$

The reason for which each step is done by adding or subtracting the half of the number is because in binary representation, dividing by two represents simply a shift to the left. If the cycle is repeated  $P$  times, the error, in case of not having an integer root, is  $2^{-P}$ , i.e.

$$\sqrt{S} = Y \pm 2^{-P} \tag{4}$$

### 2.1 VHDL Description

The constants  $N$  and  $M$  are part of the generic description of the module allowing to define the size in bits of the number involved in the operation. More concretely,  $N$  is used to represent the positive

integer part of the number and  $M$  its fractional part. Let  $S$  be the number entered into the module, then  $2(N - 1)$  bits represent its integer part and  $M$  bits its fractional part, i.e.

$$S = \underbrace{011\dots101}_{\text{integer part } (2(N-1))} \quad \overbrace{011\dots101}^{\text{fractional part } M} \quad (5)$$

The constants  $M$  and  $N$  are not dynamic variables, so they can not be changed after the module is already implemented in the FPGA. The  $N$  constant, that defines the size of the integer part, also limits the maximum value that the input number can take. Thus, the largest number to which the square root can be calculated using this module is:

$$S_{max} = 2^{2N-2} - 1 \quad (6)$$

If  $S$  is equal to zero, the value zero is assigned to the result and the operation is terminated. If that's not the case, the following steps are carried out: first we consider a new pair of variables  $X$  and  $Y$  as well as an integer index  $i$  to be used as counter. Second, to the most significant bit of the variable  $Y$  a logical one is assigned, the other bits are set to logical zeros whereas the value  $2(N - 1) + M$  is initially recorded for the counter  $i$ . The calculation of the square number is then performed and the result is assigned to the variable  $X$ :

$$X \Leftarrow Y * Y \quad (7)$$

We compare  $X$  with the input value  $S$ . If  $X = S$ , the calculation is terminated and the result is the value of  $X$ . If  $X > S$ , then  $Y(i) \Leftarrow' 0'$  and  $Y(i - 1) \Leftarrow' 1'$ , the counter is then decreased by one, i.e.  $i \Leftarrow (i - 1)$  and the cycle is repeated.

On the contrary, if  $X < S$ , then  $Y(i - 1) \Leftarrow' 1'$ , the counter is decreased by one  $i \Leftarrow (i - 1)$  and the cycle is repeated. The calculation ends when  $i = 0$ , and the result is the value contained in the variable  $Y$ . The error associated to the operation depends on the number of bits represented by the fractional part  $M$  of the

number. Thus,

$$\sqrt{S} = Y \pm 2^{-M} \quad (8)$$

The latency time of the module to perform the operation depends on the  $N$  and  $M$  parameters, and it is given by  $N + M + 3$  clock cycles. This is a shorter time than that of most algorithms used [1]. Although the module is not of pipeline type, it is easily adaptable. In that way, we want to stress that in order to convert the module to pipeline, the use of area on the FPGA device becomes greater as long as it would be necessary to create two  $(N + M)$  square matrices for the  $S$  and  $Y$  variables. This fact in turns would multiply the resources in  $(N + M)$  times. Thus, in each clock cycle there will be a new result with a latency of  $(M + N + 3)$  clock cycles, increasing therefore the calculation speed considerably.

### 3 Implementation

The square root operation was implemented in a FPGA Spartan 3E of Xilinx. Because it is a parametrizable module, the resources used change depending on the size of the parameters  $M$  and  $N$  (they define the number of bits of the operands). On this respect, the dependence of the max frequency with the number of bits is shown in Figure 1.

As can be observed, such a dependence is not linear at all, and as the number of bits increases, the frequency at which the module works tends to be 40 MHz. It is necessary to clarify that what is shown in Figure 1 is the result of the synthesis of the module and has not used any of the time optimization tools of the XILINX software, therefore it is possible to make the module to operate at a higher frequency.

On the other hand, the dependence of hardware resources measured in Look-Up Tables (LUT) units with the number of bits is shown in Figure 2. The number of bits is that corresponding to the number for which the square root operation was performed. As can be observed, the relationship is closely linear and increasing. As in the analysis of time, the graph shows the result of the synthesis in a Spartan FPGA without any extra processing.

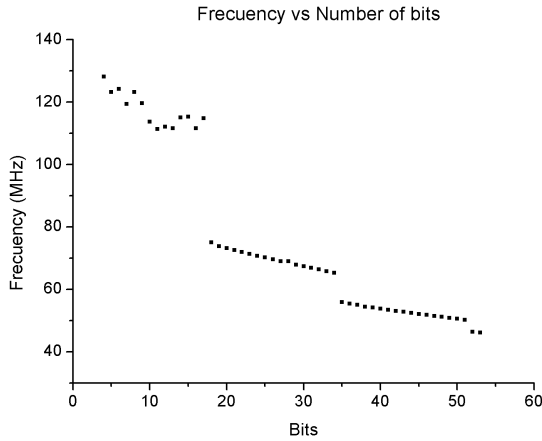


FIGURE 1. *Max frequency as a function of the number of bits. Square root operation implemented in a FPGA Spartan 3E.*

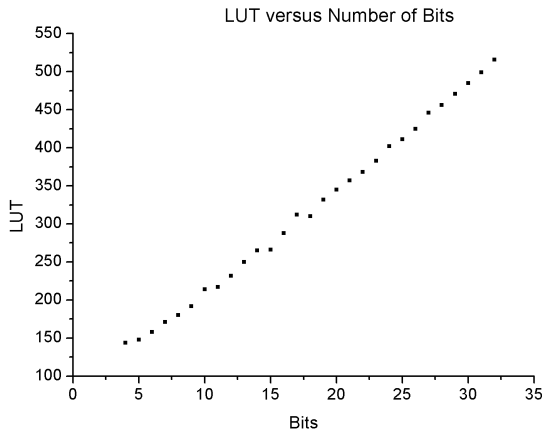


FIGURE 2. *Dependence of logical resources measured in Look-Up Tables (LUT) units with the number of bits.*

## Conclusions

The described module performs the square root of a number with a high precision without requiring more execution time or compromising more hardware resources compared to other modules based on algorithms of approximation such as Newton-Raphson,

redundant and non-redundant methods, etc. These last ones use division as part of the operations necessary to obtain the result of the square root, which requires a different module and it is not trivial to implement in VHDL language. The designed module was made in such a way that the operations involved are divisions by two or powers of two, which simplifies the process as long as such divisions simply imply a binary shift to the right.

Since the system is parametric, it can easily be adapted to the needs of the user or developer, without using more resources than necessary. Converting the system to a pipeline module is not difficult neither, although it is little used. In a pipeline system, the increase in hardware resources increases also in a closely linear fashion with the number of bits used, but with a slope much larger than that of our module shown in Figure 2. It is also concluded that the frequency of operation tends to stabilize reaching a plateau near the 40 MHz as the number of bits increases. Finally, a linear relationship of the latency of the calculus with the number of bits is also concluded.

## Acknowledgements

Support provided by the CODI-UdeA project 2016-10085 and the exclusive dedication UdeA program to one of the authors (J. R) is greatly acknowledged.

## References

- [1] Y. Li and W. Chu, in *Proceedings. The 5th Annual IEEE Symposium on Field-Programmable Custom Computing Machines Cat. No.97TB100186* (1997) pp. 226–232.
- [2] J. Kaur and N. Grewal, *Int. J. Inf. Comp. Tech.* **4**, 1131 (2014).
- [3] T.-J. Kwon and J. Draper, in *2008 51st Midwest Symposium on Circuits and Systems* (2008) pp. 954–957.
- [4] C. V. Ramamoorthy, J. R. Goodman, and K. H. Kim, *IEEE Transactions on Computers* **C-21**, 837 (1972).

- 
- [5] J. Bannur and A. Varma, in *1985 IEEE 7th Symposium on Computer Arithmetic (ARITH)* (1985) pp. 159–165.
  - [6] P. Soderquist and M. Leeser, *IEEE Micro* **17**, 56 (1997).
  - [7] E. Oberstar, *Fixed-Point Representation and Fractional Math, Report Oberstar Consulting* (Oberstar Consulting, 2007).
  - [8] H. Kabuo, T. Taniguchi, A. Miyoshi, H. Yamashita, M. Urano, H. Edamatsu, and S. Kunitobu, *IEEE Transactions on Computers* **43**, 43 (1994).
  - [9] W. Chu and Y. Li, in *Proceedings 5th Australasian Computer Architecture Conference. ACAC 2000 (Cat. No.PR00512)* (2000) pp. 9–16.
  - [10] K. Piromsopa, C. Apornthewan, and P. Chogsatitvataa, “An fpga implementation of a fixed-point square root operation,” (2002).

## CARACTERIZACIÓN DE PELÍCULAS DELGADAS DE AlGaAs OBTENIDAS POR MAGNETRON SPUTTERING RF

## CHARACTERIZATION OF AlGaAs THIN FILMS PREPARED BY RF MAGNETRON SPUTTERING

Juan D. Losada-Losada, Álvaro Pulzara-Mora

Laboratorio de Nanoestructuras Semiconductoras, Grupo de Investigación en Magnetismo y Materiales Avanzados, Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales. A.A.127.

(Recibido: 11/2017. Aceptado: 05/2018)

### Resumen

Las películas de AlGaAs fueron depositadas por pulverización catódica asistida por campo magnético sobre sustratos de vidrio y Si (100). Se mantuvo constante la temperatura del sustrato y se varió la relación de la potencia de los blancos de Al y GaAs. Para disminuir los efectos del desacople del parámetro de red entre la capa de AlGaAs y los sustratos, se depositó una capa buffer de GaAs. Los espectros de difracción de rayos X muestran que las películas son policristalinas con orientación preferencial (111). Los espectros Raman evidencian un comportamiento de dos modos, correspondiente a modos vibracionales TO y LO de GaAs y de AlAs, respectivamente.

**Palabras clave:** Pulverización catódica, AlGaAs.

### Abstract

AlGaAs layers were deposited by RF magnetron sputtering on glass and Si (100) substrates. The substrate temperature was kept constant and the power ratio of the Al and GaAs targets was varied. In order to decrease the effects of decoupling the lattice parameter between the AlGaAs layer and the Si substrate, a GaAs buffer layer was



deposited. The X-ray diffraction spectra show that the films are polycrystalline with preferential orientation (111). The Raman spectra show a behavior of two modes, corresponding to TO and LO vibrational modes of GaAs and AlAs, respectively.

**Keywords:** AlGaAs, Magnetron sputtering.

## Introducción

En los últimos años las aleaciones semiconductoras de la familia III-V se han estudiado ampliamente debido a sus múltiples aplicaciones en la optoelectrónica moderna [1]. El arseniuro de galio dopado con aluminio ( $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ ) ha generado un interés particular para aplicaciones en optoelectrónica, debido a que se puede variar el ancho de banda entre 1.42 eV para GaAs y 2.16 eV para AlAs, dependiendo de la concentración de Al. Por otra parte, dado que el parámetro de red de AlGaAs difiere solo en un 1% de la constante de red de GaAs, es ideal para la fabricación de pozos cuánticos, donde el AlGaAs se utiliza como barrera de potencial para confinar electrones en la capa activa de GaAs. Para concentraciones de Al menores al 4% la aleación ternaria de AlGaAs es un semiconductor de ancho de banda directo, cuyas propiedades semiconductoras se ven fuertemente modificadas en todas sus direcciones cristalográficas ( $\Gamma, X, L, \Sigma$ ). El crecimiento de AlGaAs generalmente se hace mediante técnicas epitaxiales, por ejemplo, epitaxia en haces moleculares (MBE) y epitaxia en fase gaseosa utilizando métodos químicos (MOCVD) [2–4]. Sin embargo, estas técnicas son muy costosas y solo están disponibles en unos pocos laboratorios de investigación en el mundo. Magnetron sputtering (MS) es una técnica de bajo costo en comparación con las técnicas epitaxiales, y ofrece la ventaja de crecer capas gruesas ( $\sim \mu\text{m}$ ) sobre sustratos aislantes (ej. vidrio) o semiconductores (ej. Si (100)) importantes para aplicaciones en celdas solares [5].

En este trabajo, nos enfocamos en preparar películas delgadas semiconductoras de AlGaAs sobre Si(100) y vidrio comercial. Con el fin de disminuir las tensiones durante el crecimiento de las películas de AlGaAs, se depositó una capa buffer de GaAs de

aproximadamente 300 nm. El análisis estructural se hizo mediante difracción de rayos X y espectroscopia Raman. El ancho de banda se obtuvo a partir de medidas de absorción en el visible-UV.

## Arreglo Experimental

Las capas de AlGaAs se depositaron por medio de pulverización catódica asistida por campo magnético RF (magnetron sputtering) en una atmósfera de argón, sobre sustratos de vidrio y Si (100) - oblea de 500 micras de espesor y con una resistividad  $> 10000$  ohm-cm. Las muestras se prepararon mediante Co-Sputtering a partir de blancos de GaAs y Al de alta pureza (99,95 %). Antes de introducir los sustratos a la cámara de deposición, los sustratos se sometieron a un tratamiento superficial en alcohol y acetona en una cubeta ultrasónica durante 15 minutos. Finalmente, los sustratos se secaron en un flujo de Nitrógeno gaseoso. Previo a la deposición de las capas de AlGaAs, la cámara de crecimiento fue evacuada hasta un vacío de  $2 \times 10^{-6}$  Torr. Posteriormente se introdujo gas argón de alta pureza, para generar plasma a una presión de  $5 \times 10^{-3}$  Torr. Luego, se depositó una capa buffer de GaAs durante 20 min ( $\sim 300$  nm) sobre vidrio o silicio (100) a una potencia de 30 Watts, y a una temperatura del sustrato de  $580$  °C. La velocidad de crecimiento fue de  $\sim 1 \mu\text{m}$  /hora. Finalmente, se bajó la temperatura del sustrato hasta  $550$  °C, para depositar una capa de AlGaAs durante 40 min. Las condiciones experimentales se muestran en la tabla 1.

Parámetro	Capa Buffer de GaAs	Capa de AlGaAs
Temperatura (°C)	580	550
Presión (Torr)	$5 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$
Potencia (W)	30	30 (Al) - 50 (GaAs)
Tiempo (min.)	20	40

TABLA 1. Condiciones de depósito de las películas de AlGaAs preparadas por magnetron sputtering.

Los difractogramas de rayos X se midieron a temperatura ambiente utilizando un difractor marca Rigaku, modelo MiniFlex II, provisto con un tubo de rayos X con una fuente de cobre, radiación

$k\alpha$ ,  $\lambda = 1.54\text{\AA}$ . Los difractogramas se midieron entre  $10^\circ$  y  $70^\circ$  en  $2\theta$  con un paso de  $0.02^\circ$  y una velocidad de barrido de  $5^\circ$  por minuto. El análisis vibracional para las capas de AlGaAs se realizó a través de espectroscopia Raman, utilizando un microscopio confocal de alta resolución LabRamHR Horiba Jobin Yvon, y un láser como fuente de excitación con una potencia menor a 50 mW con el fin de no sobrecalentar la muestra y una longitud de onda de 473 nm. El láser se enfocó en la muestra utilizando un objetivo óptico x10. Las medidas de absorbancia se realizaron en un espectrofotómetro UV/VIS Pelkin Elmer 20, dotado con esfera integradora en el rango de 100 hasta 1100 nm ( $\Delta\lambda = 1$  nm).

## Resultados

### Rayos X

En la figura 1 se muestra el patrón de difracción de las películas delgadas de AlGaAs. Se encontró que para las muestras de AlGaAs crecidas sobre Si (100) hay estructuras cubicas multifase reportadas como  $Al_{0.95}Ga_{0.05}$  (tarjeta 98-010-7815), Al (tarjeta 98-015-0692), GaAs (tarjeta 98-061-0543), fases AlAs (tarjeta 98-065-6315) [6].

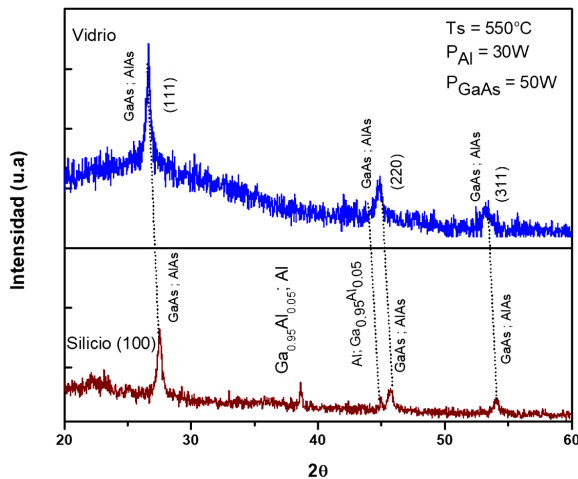


FIGURA 1. Difractogramas de rayos X de películas delgadas de AlGaAs depositadas a una temperatura de  $550^\circ\text{C}$  sobre una capa buffer de GaAs sobre vidrio y Si(100).

		Planos (hkl)		Planos (hkl) adicionales en este trabajo		
		reportadas en la referencia				
AlAs	(hkl)	(022)	(133)	(111)	(220)	(311)
	d(Å)	2.001	1.299	3.245	1.987	1.695
	$2\theta(^{\circ})$	45.271	72.758	27.49	45.66	54.13
GaAs	(hkl)	(022)	(133)	(111)	(220)	(311)
	d(Å)	2.001	1.298	3.246	1.988	1.6954
	$2\theta(^{\circ})$	45.280	72.773	27.47	45.63	54.09
AlGa	(hkl)	(100)	(002)			
	d(Å)	2.342	2.028			
	$2\theta(^{\circ})$	38.409	44.647			
Al	(hkl)	(111)	(002)			
	d(Å)	2.349	2.034			
	$2\theta(^{\circ})$	28.292	44.508			

TABLA 2. Planos cristalográficos asignados a las fases presentes en el material.

Otros planos cristalográficos asociados a GaAs (tarjeta 00-089-1885) y AlAs (tarjeta 00-080-0014) también están presentes en la muestra. Para la muestra crecida en sustratos de vidrio solo encontramos los planos cristalográficos asociados al GaAs y AlAs con orientación preferencial (111), y no se identifica claramente el plano cristalográfico asociado a AlGaAs. Los planos cristalográficos presentan un corrimiento en  $2\theta \sim 1^{\circ}$ , el cual se debe probablemente a esfuerzos generados en la interface entre la película y la capa buffer de GaAs, esto demuestra una clara influencia del tipo de sustrato en el crecimiento de la películas delgadas de AlGaAs. El difractograma de rayos X de la muestra de AlGaAs depositada sobre vidrio es más ruidoso comparado con el espectro depositado sobre Si(100); además los picos son más definidos.

Las posiciones de los picos asociados a los planos cristalográficos reportados en la literatura y los planos adicionales que se encontraron en este trabajo para el AlGaAs se resumen en la tabla 2.

Los esfuerzos generados durante el crecimiento de las muestras se deben a la diferencia en la constante de red entre AlGaAs (ec. 1) y la capa buffer de GaAs, y de aleación por el contenido de Al.

También ocurren por efectos térmicos debido a la diferencia entre los coeficientes de expansión térmica de GaAs (o AlGaAs) y el sustrato (ec. 2).

$$\Delta_a = \frac{a_{\text{AlGaAs}} - a_{\text{GaAs}}}{a_{\text{GaAs}}} \quad (1)$$

$$\Delta_T = [T_p - T_s] \Delta T \quad (2)$$

Donde  $a_{\text{AlGaAs}}$  es el parámetro de red de la película de AlGaAs para una concentración de Al,  $x= 0.1$ .  $a_{\text{GaAs}}$  es el parámetro de red de la capa buffer de GaAs, que es aproximadamente el parámetro de red GaAs en bulto. El desajuste en el valor de la constante de red ( $\Delta_a$ ) calculado para la muestra crecida sobre Si(100) es menor al 0.018 %, lo cual demuestra que no hay una diferencia significativa entre las constantes de red de la capa de AlGaAs y la capa buffer de GaAs, y por tanto el corrimiento observado en los espectros de rayos X se debe únicamente a efectos de aleación.

En la ecuación 2,  $T_p$  es el coeficiente de expansión térmica de la película de GaAs;  $T_s$  el coeficiente de expansión térmica del sustrato y  $\Delta T$  es la diferencia entre la temperatura de crecimiento y la temperatura ambiente. Se obtuvo un valor de  $\Delta T$  de 0.02 %.

### Espectroscopia Raman

En la figura 3 se muestra el espectro Raman de la muestra de AlGaAs crecida sobre Si(100) - AlGaAs/GaAs/Si(100). En este espectro se pueden observar las frecuencias de los modos fonónicos LO y TO de GaAs centrados alrededor de 250 y 271  $cm^{-1}$  y AlAs centrados en 349 y 388  $cm^{-1}$  [7]. Este comportamiento de dos modos es típico de aleaciones semiconductoras III-V. Los modos fonónicos TO del cristal tanto para GaAs y AlAs son modos prohibidos en la geometría utilizada para la medida Ráman (backscattering). Sin embargo, dado que las muestras de AlGaAs son policristalinas estos modos vibracionales aparecen debido a la pérdida de simetría del cristal. El modo LA de AlGaAs en 191  $cm^{-1}$  no es posible explicarlo teniendo en cuenta la simetría del cristal y se asocia a defectos y deformación de la red debido a la incorporación de Al en la matriz de GaAs en altas concentraciones.

Se observa también que la intensidad integrada ( $I_{TO}$ ) del modo TO de GaAs y AlAs es mayor que la intensidad integrada ( $I_{LO}$ ) del modo LO, lo cual es típico de cristales en la dirección (111), de acuerdo a las reglas de selección Raman. Además, la relación entre ( $I_{TO}/I_{LO}$ ) es un indicativo de la calidad cristalina de la muestra de AlGaAs [8–10]. Los valores de  $I_{TO}$  y  $I_{LO}$ , se obtuvieron ajustando el espectro Raman mediante 2 Gaussianas, como se indica en el *inset* de la figura 2.

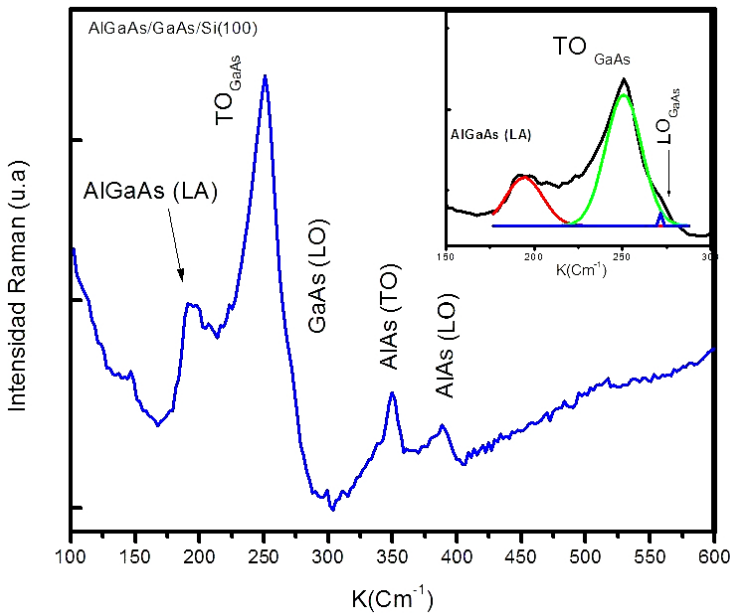


FIGURA 2. Espectro Raman de la película delgada de AlGaAs depositada sobre Si (100) por magnetron sputtering.

La presencia de estos modos de vibración TO y LO para GaAs y AlAs es un indicativo de la formación del ternario AlGaAs, tal como se muestra en los espectros de rayos X.

### Espectroscopia UV-Vis

El espectro de absorción óptica de la muestra de AlGaAs depositada sobre un sustrato de vidrio en la región UV-Visible entre 100 hasta 1100 nm, se muestra en la figura 4. En este espectro, se

observa que por encima de  $1.5eV$ ,  $(ahv)^2$  varia linealmente con la energía de excitación ( $E = hv$ ). Extrapolando la parte lineal a cero, calculamos el ancho de banda prohibido ( $E_g$ ) del ternario, de esta forma, se obtuvo un valor de  $1.54eV$ , y que corresponde a la transición electrónica en la dirección cristalográfica del punto  $\Gamma(000)$  de máxima simetría, para un semiconductor de ancho de banda directo.

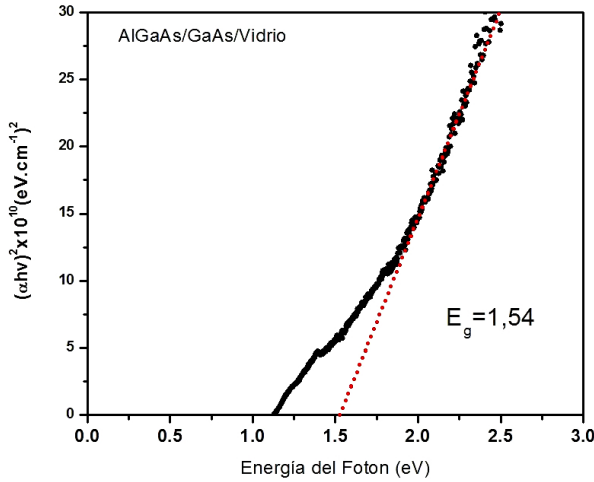


FIGURA 3.  $(\alpha hv)^2$  en función de la energía ( $E = hv$ ). La línea punteada es el ajuste en la parte lineal de la gráfica.

Utilizando la ley de relación entre el ancho de banda y el contenido de Al (Casey and Panish, 1978) [11], se estimó el contenido de Al en la muestra de AlGaAs, mediante la ecuación 3.

$$E_{g,\Gamma}^{AlGaAs} = 1.424 + 1.247x, \quad (0 \leq x \leq 0.45) \quad (3)$$

El valor obtenido fue de  $Al = 0.1$ , que corresponde a una muestra de AlGaAs con bajo contenido de Al.

**Discusión:** El espectro de absorción de la figura 4, corresponde al de un semiconductor ternario de ancho de banda directo, debido a que el valor de  $(\alpha hv)^2$  es del orden de  $10^{12} \text{ (eV}\cdot\text{cm}^{-1})^2$ , característico de este tipo de semiconductores. La dispersión de los puntos en este espectro por encima  $1.54eV$  posiblemente se debe a la presencia de defectos cristalinos en la matriz de GaAs por la incorporación de Al,

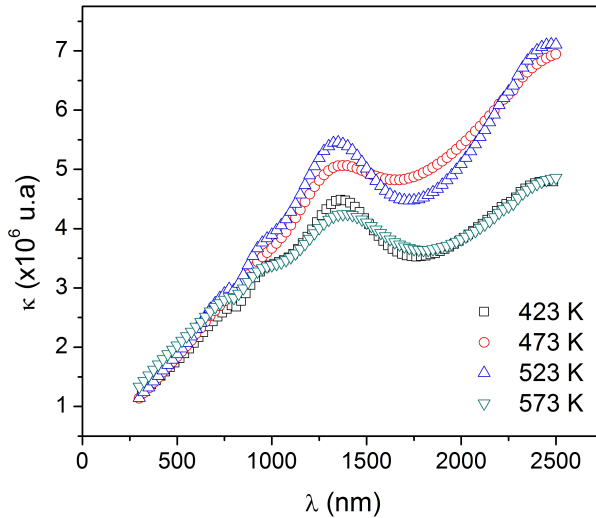


FIGURA 4. Espectro de absorción de un semiconductor ternario de ancho de banda directo.

que deforman el cristal como lo evidencia los modos vibracionales del espectro Raman en la región de valores de  $K$  entre 100 y 200  $cm^{-1}$ . De igual manera en los difractogramas de rayos X se observa la presencia de planos cristalográficos asociados al GaAs y AlAs policristalino con orientación preferencial (100). Esto se debe a la generación de esfuerzos por efectos combinados de la diferencia en el parámetro de red y de aleación de GaAs y AlGaAs, que concuerdan con los resultados de microscopía Ráman en donde la intensidad del modo TO es mayor que LO. Esto es un indicativo de la degradación estructural de las muestras.

## Conclusiones

Se encontraron las condiciones para depositar películas delgadas de AlGaAs por medio de pulverización catódica asistida por campo magnético sobre sustratos de Si (100) y vidrio. También se determinaron planos cristalográficos asociados a GaAs y AlGaAs presentes en las películas. Los modos vibracionales obtenidos en Raman correspondientes a GaAs y AlAs comprueban la formación del ternario. Mediante UV-Vis se encontró el ancho prohibido para



la muestra  $E_g = 1,54eV$ , correspondiente a un contenido de Al de 0.1.

## Agradecimientos

Este proyecto fue financiado parcialmente por la DIMA, proyecto códigos 30384 y 38416. Juan David Losada Losada, agradece a “COLCIENCIAS” por la beca otorgada en el marco del programa “Jóvenes Investigadores e innovadores 2015”.

## Referencias

- [1] A. P. Kirk, *So.l Energ. Mat. Sol. C* **94**, 2442 (2010).
- [2] T. Lee, H. Rho, J. D. Song, and W. J. Choi, *Curr. Appl. Phys.* **17**, 398 (2017).
- [3] P. V. Seredin, A. V. Glotov, E. P. Domashevskaya, I. N. Arsentyev, D. A. Vinokurov, and I. S. Tarasov, *Phys. Condens. Matter.* **405**, 2694 (2010).
- [4] Z. R. Wasilewski, M. M. Dion, D. J. Lockwood, P. Poole, R. W. Streater, and A. J. SpringThorpe, *J. Appl. Phys.* **81**, 1683 (1997).
- [5] G. Braüer, B. Szyszka, M. Vergohl, and R. Bandorf, *Vacuum* **84**, 1354 (2010).
- [6] S. Özen, V. Şenay, S. Pat, and Ş. Korkmaz, *Eur. Phys. J. Plus* **130**, 108 (2015).
- [7] D. Reyes, R. C. Ojeda, M. G. Arellano, and R. Sierra, *Superficies y Vacío*, 22 (2002).
- [8] R. S. Castillo-Ojeda, J. Díaz-Reyes, M. G. Arellano, M. d. l. C. Peralta-Clara, and J. S. Veloz-Rendón, *Mater. Res.* **20**, 1166 (2017).
- [9] E. Purón, G. Martínez-Criado, I. Riech, J. Almeida-García, and A. Cantarero, *J. Appl. Phys.* **86**, 418 (1999).
- [10] V. A. Volodin and M. P. Sinyukov, *JETP Letters* **99**, 396 (2014).
- [11] A. Chen and A. Sher, *Semiconductor Alloys: Physics and Materials Engineering*, Microdevices (Springer US, 2012).

NUMERICAL SOLUTION OF  
MATHISSON-PAPAPETROU-DIXON EQUATIONS  
FOR SPINNING TEST PARTICLES IN A KERR  
METRIC

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE  
MATHISSON - PAPAPETROU - DIXON PARA  
PARTÍCULAS DE PRUEBA CON ESPÍN EN UNA  
MÉTRICA DE KERR

Nelson Velandia, Juan M. Tejeiro

Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Física, Bogotá,  
Colombia.

(Recibido: 05/2018. Aceptado: 06/2018)

**Abstract**

In this work we calculate some estimations of the gravitomagnetic clock effect, taking into consideration not only the rotating gravitational field of the central mass, but also the spin of the test particle, obtaining values for  $\Delta t = t_+ - t_- = 2.5212079035 \times 10^{-8}$ s. We use the formulation of Mathisson-Papapetrou-Dixon equations (MPD) for this problem in a Kerr metric. In order to compare our numerical results with previous works, we consider initially only the equatorial plane and also apply the Mathisson-Pirani supplementary spin condition for the spinning test particle.

**Keywords:** Spinning test particles, Kerr metric, Trajectories of particles, Mathisson-Papapetrou-Dixon equations, Numerical solution.

**Resumen**

En este trabajo nosotros calculamos algunas estimaciones del efecto reloj gravitomagnético, tomando en consideración no sólo el campo rotacional de la masa central, sino también el espín de la partícula de prueba, obteniendo

valores de  $\Delta t = t_+ - t_- = 2.5212079035 \times 10^{-8}$ s. Nosotros usamos la formulación de las ecuaciones de Mathisson-Papapetrou-Dixon para este problema en una métrica de Kerr. Para comparar nuestros resultados numéricos con trabajos previos, nosotros consideramos inicialmente solo el plano ecuatorial y aplicamos también la condición suplementaria de espín de Mathisson-Pirani para la partícula de prueba con espín.

**Palabras clave:** Partículas de prueba con espín, Métrica de Kerr, Trayectorias de partículas, Ecuaciones de Mathisson-Papapetrou-Dixon, Solución numérica.

## Introduction

In the last decades, important advances have been made in the study of the gravitomagnetic clock effect. Beginning with the seminal work by Cohen and Mashhoon [1]. In which they presented the influence of the gravitomagnetic field to the proper time of an arbitrary clock about a rotating massive body. In their paper, Cohen and Mashhoon, also showed the possibility of measuring this effect. In this work, we present a theoretical value for the gravitomagnetic clock effect of a spinning test particle orbiting around a rotating massive body.

According with the literature, we find different complementary ways that study the phenomena in regard to the gravitomagnetism clock effect. The first way take two family of observers. The first is the family of static observer (or threading observers) with four-velocity  $m = M^{-1}\partial_t$  and world lines along the time coordinate lines. The second famili is the ZAMO's (or slicing observers) with four-velocity  $n = N^{-1}(\partial_t - N^\phi\partial_\phi)$  and world lines orthogonal to the time coordinate hypersurfaces [2-4]. They obtain, in the threading point of view, the local spatial angular direction as

$$dt = M_\phi \rightarrow \frac{dt}{d\phi} = M_\phi = \zeta_{(\text{th})}^{-1} \quad (1)$$

which gives an inverse angular velocity or the change with respect to angle of the time coordinate. Since is angular velocity, Bini *et al.* integrate the coordinate time for one complete revolution both in a direction and in opposite direction [2]. Then the physical

components of the velocities are related to the coordinate angular velocity.

This group study the case when the particle has spin. They take the Frenet-Serret frame (FS) associated to worldline of the test particle and calculates with help of the angular velocity the evolution equation of the spin tensor in terms of the FS intrinsic frame [5, 6]. The work of this group considers the MPD equations and their supplementary conditions for the spin and give their answer in terms of angular velocity.

The second group integrates around a closed contour. They take the time for this loop when the test particle rotates in clockwise and the test particle in opposite sense [1, 7].

A third group deduces the radial geodesic equation from the line element in the exterior field of a rotating black hole. With this equation yields the solution and calculate the inverse of the azimuthal component of four velocity. Then they introduce the first order correction to the angular velocity

$$\Omega \equiv \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)_0 (1 + S\Omega^*), \quad (2)$$

and obtain the differentiate between prograde and retrograde orbits and integrate from zero to  $2\pi$ . The clock effect is the difference of these two orbits [8–10].

The fourth group takes some elements of electromagnetism and does an analogy between Maxwell equations and Einstein linealized equations [11–19]. Finally the group that makes a geometric treatment of the gravitomagnetic clock Effect [20, 21].

According with other papers that work the MPD equations, the novelty of our work is that we calculate numerically the full set of MPD equations for the case of a spinning test particle in a Kerr metric. Secondly, we take the spin without restrictions in its velocity and spin orientation. In the paper by Kyrian and Semerák the third example is referred to the particular case when the spin is orthogonal to the equatorial plane in a Kerr metric [22].

In this paper, our aim, it is not only describing the trajectories of spinning test particles, but also to study the clock effect. Therefore, we calculate numerically the trajectory both in a sense and in

the other for a circular orbit. We measure the delay time for three situations: two spinless test particles are traveling in the same circular orbit, two spinning test particles with its spin value orthogonal to equatorial plane and two spinning test particles without restrictions in its spin orientation.

In this paper, we use the set of Mathisson-Papapetrou-Dixon equations presented by Plyatsko, R. *et al.* [23] and extend this approach, considering the spin of the particle without restrictions in its orientation, while Plyatsko *et al.* only take a constant value for the spin in its magnitude and orientation; we allow both to be varied, using the full set of MPD equations and the Mathisson-Pirani (MP) supplementary spin condition.

In the literature, one can find different conditions to fix the center of mass, leading to different kinematical behaviours of the test particles. One of the features of the MPD equations is the freedom to define the representating worldline to which  $u^\alpha$  is tangente vector. Therefore the worldline can be determined from physical considerations. The first condition is the Mathisson-Pirani condition (MP, 1937):

$$u_\alpha S^{\alpha\beta} = 0 \quad (3)$$

in this condition the reference worldline is the center of mass as measured in the rest frame of the observer of velocity  $u^\alpha$  [24, 25]. This condition does not fix a unique worldline and  $u^\alpha$  is uniquely defined by  $p^\alpha$  and  $S^{\alpha\beta}$ . If one uses this condition, the trajectory of the spinning test particle is represented by helical motions. Costa *et al.* [26] explain that these motions are physically possible. We use this condition when working with the MPD equations in the case of a spinning test particle orbiting a rotating massive body. The second condition is presented by Corinaldesi and Papapetrou (CP, 1951) which is given by

$$S^{i0} = 0, \quad (4)$$

which depends on coordinates. For this condition, the worldline is straight and its tangent  $u^\alpha$  is parallel to the four momentum  $p^\mu$  [22].

The third condition is introduced by Tulczyjew and Dixon (TD, 1959) and written which is given by

$$p_\alpha S^{\alpha\beta} = 0 \quad (5)$$

where

$$p^\sigma = mu^\sigma + u_\lambda \frac{DS^{\sigma\lambda}}{ds} \quad (6)$$

is the four momentum. This condition implies that the worldline is straight and its tangent  $u^\alpha$  is parallel to  $p^\alpha$  and the spin is constant [27]. This condition is covariant and guarantees the existence and uniqueness of the respective worldline [28].

The fourth is given by Newton and Wigner (NW) which is a combination of the TD and MP conditions

$$S^{\alpha\beta} \zeta_\alpha = 0 \quad (7)$$

with  $\zeta_\alpha := p_\alpha + Mu_\alpha$  and  $u_\alpha$  being a timelike vector. This condition provides an implicit relation between the four-momentum and the worldline's tangent vector.

The fifth condition is called Ohashi-Kyrian-Semerak (OKS, 2003):

$$w_\alpha S^{\alpha\beta} = 0 \quad (8)$$

where  $w^\alpha$  is some time-like four vector which parallelly transports along the representative worldline [22]:

$$w_\alpha w^\alpha = -1, \quad \dot{w}^\alpha = 0. \quad (9)$$

For the study of spinning test particles, we use the equations of motion for a spinning test particle in a gravitational field without any restrictions to its velocity and spin orientation [23]. In this paper, we use the MPD equations presented by Plyatsko, R. *et al.* [23]. They yield the full set of Mathisson-Papapetrou-Dixon equations (MPD equations) for spinning test particles in the Kerr gravitational field [23], where they integrate numerically the MPD equations for the particular case of the Schwarzschild metric.

For the scope of this work, we will take the MPD equations of motion for a Kerr metric, and additionally we will include the

spin of the test particle. This calculation has been made with the Mathisson-Pirani supplementary condition; the trajectories have been obtained by numerical integration, using the Runge-Kutta algorithm [29].

Presently, there exists an interest in the study of the effects of the spin on the trajectory of test particles in rotating gravitational fields [30]. The importance of this topic increases when dealing with phenomena of astrophysics such as accretion discs in rotating black holes, gravitomagnetics effects [8] or gravitational waves induced by spinning particles orbiting a rotating black hole [31, 32]. The new features of the spin-gravity coupling for highly relativistic fermions are considered in [33] and [34].

The motion of particles in a gravitational field is given by the geodesic equation. The solution to this equation depends on the particular conditions of the problem, such as the rotation and spin of the test particle, among others; therefore there are different methods for its solution [35, 36].

Basically, we take two cases in motion of test particles in a gravitational field of a rotating massive body. The first case describes the trajectory of a spinless test particle, and the second one the trajectory of a spinning test particle in a massive rotating body. In the case of the spinless test particles, some authors yield the set of equations of motion for test particles orbiting around a rotating massive body. The equations of motion are considered both in the equatorial plane [37–39], and in the non-equatorial plane [38, 40, 41] (Kheng, L., Perng, S., and Sze Jackson, T.: Massive Particle Orbits Around Kerr Black Holes. Unpublished). For the study of test particles in a rotating field, some authors have solved for particular cases the equations of motion both for spinless and for spinning test particles of circular orbits in the equatorial plane of a Kerr metric [20, 31, 37, 42–46].

With the aim of proving the equations of motion with which we worked, solve numerically the set of equations of motion obtained via MPD equations both for the spinless particles and for spinning

particles in the equatorial plane and will compare our results with works that involve astronomy, especially the study of spinning test particles around a rotating central source. We take the same initial conditions in the two cases for describing the trajectory of both a spinless particle and a spinning particle in the field of a rotating massive body. Then, we compare the Cartesian coordinates  $(x, y, z)$  for the trajectory of two particles that travel in the same orbit but in opposite directions.

For the numerical solution, we give the full set of MPD equations explicitly, while that Kyrián and Semerák only name them. Also, we give the complete numerical solution. Kyrián and Semerák integrate with a step of  $M/100 = 1 \times 10^{-2}$  while we integrate with a step of  $n = 2^{-22} = 2.384185 \times 10^{-7}$ . In the majority of cases, the solutions are partial because it is impossible to solve analytically a set of eleven coupled differential equations. The recurrent case that they solve is a spinning test particle in the equatorial plane and its spin value is constant in the time ( $S_{\perp} = \text{constant}$ ).

This work is organized as follows. In Section 2 we give a brief introduction to the MPD equations that work the set of equations of motion for test particles, both spinless and spinning in a rotating gravitational field. From the MPD equations, we yield the equations of motion for spinless and spinning test particles. Also, we will give the set of the MPD equations given by Plyatsko *et al.*[23] in schematic form to work the equations of motion in a Kerr metric. In Section 3 and 4, we present the gravitomagnetic clock effect via the MPD equations for spinless and spinning test particles. Then, in Section 5, we perform integration and the respective numerical comparison of the coordinate time ( $t$ ) for spinless and spinning test particles in the equatorial plane. Finally we make a numerical comparison of the trajectory in Cartesian coordinates for two particles that travel in the same orbit, but in opposite directions. In the last section, conclusions and some future works. We shall use geometrized units; Greek indices run from 1 to 4 and Latin indices run from 1 to 3. The metric signature  $(-, -, -, +)$  is chosen.



## Introduction to the Mathisson-Papapetrou-Dixon equations

In general the MPD equations [24, 27, 47, 48] describe the dynamics of extended bodies in the general theory of relativity which includes any gravitational background. These equations of motion for a spinning test particle are obtained in terms of an expansion that depends on the derivatives of the metric and the multipole moments of the energy-momentum tensor ( $T^{\mu\nu}$ ) [27] which describes the motion of an extended body. In this work, we will take a body small enough to be able to neglect higher multipoles. According to this restriction the MPD equations are given by

$$\frac{D}{ds} \left( mu^\lambda + u_\lambda \frac{DS^{\lambda\mu}}{ds} \right) = -\frac{1}{2} u^\pi S^{\rho\sigma} R^\lambda_{\pi\rho\sigma}, \quad (10)$$

$$\frac{D}{ds} S^{\mu\nu} + u^\mu u_\sigma \frac{DS^{\nu\sigma}}{ds} - u^\nu u_\sigma \frac{DS^{\mu\sigma}}{ds} = 0, \quad (11)$$

where the covariant derivative is given by  $D/ds$ , the antisymmetric tensor  $S^{\mu\nu}$ ,  $R^\lambda_{\pi\rho\sigma}$  is the curvature tensor, and  $u^\mu = dz^\mu/ds$  is the particle's four-velocity. We do not have the evolution equation for  $u^\mu$  and it is necessary to single out the center of mass which determines the world line as a representing path and specifies a point about which the momentum and spin of the particle are calculated. The worldline can be determined from physical considerations [49]. In general, two conditions are typically imposed: The Mathisson-Pirani supplementary condition (MP)  $u_\sigma S^{\mu\sigma} = 0$  [24, 25] and the Tulczyjew-Dixon condition  $p_\sigma S^{\mu\sigma} = 0$  [27]. We found that if we contract the equation

$$\frac{DS^{\alpha\beta}}{ds} = 2P^{[\alpha} u^{\beta]}, \quad (12)$$

with the four velocity  $u^\alpha$ , we obtain

$$P^\beta = mu^\beta - u_\alpha \frac{DS^{\alpha\beta}}{ds}, \quad (13)$$

where  $m \equiv -P^\alpha u_\alpha$ . Given the MP condition, the four momentum is not parallel to its four velocity  $u^\beta$ ; therefore, it is said to possess

“hidden momentum”. This last equation can be written as

$$P^\beta = mu^\beta + S^{\alpha\beta}a_\alpha, \quad (14)$$

where  $a^\alpha = Du^\alpha/ds$  is the acceleration. This acceleration results from an interchange between the momentum  $mu^\beta$  and hidden momentum  $S^{\alpha\beta}a_\alpha$ . These variations cancel out at every instant, keeping the total momentum constant [75]. The above equation can be expressed as

$$P^\beta = P_{kin}^\beta + P_{hid}^\beta, \quad (15)$$

where  $P_{kin}^\beta = mu^\beta$  is the kinetic momentum associated with the motion of the centroid and the component  $P_{hid}^\beta = S^{\alpha\beta}a_\alpha$  is the hidden momentum. In this case, if the observer were in the center of mass, he would see its centroid at rest then we would have a helical solution.

To obtain the set of MPD equations, we take the MP condition which has three independent relationships between  $S^{\mu\sigma}$  and  $u_\sigma$ . By this condition  $S^{i4}$  is given by

$$S^{i4} = \frac{u_k}{u_4} S^{ki} \quad (16)$$

with this expression we can use the independent components  $S^{ik}$ . Sometimes for the representation of the spin value, it is more convenient to use the vector spin, which in our case is given by

$$S_i = \frac{1}{2u_4} \sqrt{-g} \epsilon_{ikl} S^{kl} \quad (17)$$

where  $\epsilon_{ikl}$  is the spatial Lévi-Civita symbol.

When the space-time admits a Killing vector  $\xi^\nu$ , there exists a property that includes the covariant derivative and the spin tensor, which gives a constant and is given by [50]

$$p^\nu \xi_\nu + \frac{1}{2} \xi_{\nu,\mu} S^{\nu\mu} = \text{constant}, \quad (18)$$

where  $p^\nu$  is the linear momentum,  $\xi_{\nu,\mu}$  is the covariant derivative of the Killing vector, and  $S^{\nu\mu}$  is the spin tensor of the particle.

In the case of the Kerr metric, one has two Killing vectors, owing to its stationary and axisymmetric nature. In consequence, Eq. (18) yields two constants of motion: the total energy  $E$  and the component  $z$  of the angular momentum  $J$  [51].

### MPD equations for a spinning test particle in a metric of a rotating body

Given that the spinning test body is small enough compare with the characteristic length, this body can be considered as a test particle. In this section, the equations of motion (Eqs. 10 and 11) of the test particle are firstly introduced in the case when the particle is orbiting in an axisymmetric and stationary spacetime. Then, we specify the equations of motion for the case of a spinning test particle for a Kerr metric.

According to R.M. Plyatsko *et al.* [23], the full set of the exact MPD equations of motion for a spinning test particle in the Kerr field, if the MP condition (3) is taken into account, obtain a general scheme for the set of equations of motion for a spinning test particle in a rotating field. Plyatsko *et al.* [23] use a set of dimensionless quantities  $y_i$  to achieve this. In particular, the Boyer-Lindquist coordinates are represented by

$$y_1 = \frac{r}{M}, y_2 = \theta, y_3 = \varphi, y_4 = \frac{t}{M} \quad (19)$$

the corresponding four-velocity are given by

$$y_5 = u^1, y_6 = Mu^2, y_7 = Mu^3, y_8 = u^4 \quad (20)$$

and the spatial spin components by [52]

$$y_9 = \frac{S_1}{mM}, y_{10} = \frac{S_2}{mM^2}, y_{11} = \frac{S_3}{mM^2}. \quad (21)$$

where  $M$  is the mass parameter of the Kerr spacetime.  $m$  is the mass of a spinning particle, a constant of motion for the MP SSC and implies that

$$\frac{dm}{d\tau} = 0 \quad (22)$$

In addition, they introduce the dimensionless quantities

$$x = \frac{s}{M}, \quad \widehat{E} = \frac{E}{m}, \quad \widehat{J} = \frac{J_z}{mM}. \quad (23)$$

representing the proper time  $s$  and the constants of motion: Energy ( $E$ ) and the angular momentum in the  $z$  direction ( $J_z$ ).

The set of the MPD equations for a spinning particle in the Kerr field is given by eleven equations. The first four equations are

$$\dot{y}_1 = y_5, \quad \dot{y}_2 = y_6, \quad \dot{y}_3 = y_7, \quad \dot{y}_4 = y_8, \quad (24)$$

where the dot denotes the usual derivative with respect to  $x$ .

The fifth equation is given by contracting the spatial part of equation (10) with  $S_i$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ). The result is multiplied by  $S_1, S_2, S_3$  and with the MP condition (3) we have the relationships [53]:

$$S^{i4} = \frac{u_k}{u_4} S^{ki} \quad \text{and} \quad S_i = \frac{1}{2u_4} \sqrt{-g} \varepsilon_{ikl} S^{kl}, \quad (25)$$

then we obtain

$$mS_i \frac{Du^i}{ds} = -\frac{1}{2} u^\pi S^{\rho\sigma} S_j R_{\pi\rho\sigma}^j \quad (26)$$

which can be written as

$$y_9 \dot{y}_5 + y_{10} \dot{y}_6 + y_{11} \dot{y}_7 = A - y_9 Q_1 - y_{10} Q_2 - y_{11} Q_3, \quad (27)$$

where

$$Q_i = \Gamma_{\mu\nu}^i u^\mu u^\nu, \quad A = \frac{u^\pi}{\sqrt{-g}} u_4 \epsilon^{i\rho\sigma} S_i S_j R_{\pi\rho\sigma}^j. \quad (28)$$

where  $g$  is the determinant of the metric  $g_{\mu\nu}$ .

The sixth equation is given by

$$u_\nu \frac{Du^\nu}{ds} = 0 \quad (29)$$

which can be written as

$$p_1 \dot{y}_5 + p_2 \dot{y}_6 + p_3 \dot{y}_7 + p_4 \dot{y}_8 = -p_1 Q_1 - p_2 Q_2 - p_3 Q_3 - p_4 Q_4, \quad (30)$$

where

$$p_\alpha = g_{\alpha\mu} u^\alpha. \quad (31)$$

The seventh equation is given by

$$E = p_4 - \frac{1}{2} g_{4\mu,\nu} S^{\mu\nu} \quad (32)$$

which can be written as

$$c_1 \dot{y}_5 + c_2 \dot{y}_6 + c_3 \dot{y}_7 = C - c_1 Q_1 - c_2 Q_2 - c_3 Q_3 + \hat{E} \quad (33)$$

where

$$\begin{aligned} c_1 &= -dg_{11}g_{22}g_{44}u^2S_3 - d(g_{34}^2 - g_{33}g_{44})g_{11}u^3S_2 \\ c_2 &= dg_{11}g_{22}g_{44}u^1S_3 + d(g_{34}^2 - g_{33}g_{44})g_{22}u^3S_1 \\ c_3 &= d(g_{34}^2 - g_{33}g_{44})g_{11}u^1S_2 - d(g_{34}^2 - g_{33}g_{44})g_{22}u^2S_1 \\ C &= g_{44}u^4 - dg_{44}u^4g_{43,2}S_1 \\ &+ d(g_{44}u^4g_{43,1} - g_{33}u^3g_{44,1})S_2 + dg_{22}u^2g_{44,1}S_3 \end{aligned} \quad (34)$$

with

$$d = \frac{1}{\sqrt{-g}} \quad (35)$$

where  $g$  is the determinant of the metric  $g_{\mu\nu}$  and the values of  $g_{11}, g_{22}, g_{33}, \dots$  are the components of the metric  $g_{\mu\nu}$ .

The eighth equation is given by

$$J_z = -p_3 + \frac{1}{2} g_{3\mu,\nu} S^{\mu\nu} \quad (36)$$

which can be written as

$$d_1 \dot{y}_5 + d_2 \dot{y}_6 + d_3 \dot{y}_8 = D - d_1 Q_1 - d_2 Q_2 - d_3 Q_4 - \hat{J} \quad (37)$$

where

$$\begin{aligned}
d_1 &= -dg_{11}g_{22}g_{34}u^2S_3 + dg_{11}g_{33}g_{34}u^3S_2 \\
&\quad + dg_{11}g_{34}^2u^4S_2 - dg_{11}g_{33}g_{44}u^4S_2 \\
d_2 &= -dg_{11}g_{22}g_{34}u^1S_3 - dg_{22}g_{33}g_{34}u^3S_1 \\
&\quad - dg_{22}g_{34}^2u^4S_1 + dg_{22}g_{33}g_{44}u^4S_1 \\
d_3 &= -dg_{11}g_{34}^2u^1S_2 + dg_{22}g_{34}^2u^2S_1 \\
&\quad + dg_{22}g_{33}g_{44}u^2S_1 - dg_{11}g_{33}g_{34}u^1S_2 \\
D &= g_{33}u^3 - dg_{22}u^2g_{34,2}S_1 \\
&\quad + d(g_{44}u^4g_{33,1} + g_{11}u^1g_{34,1} - g_{33}u^3g_{34,1})S_2 \\
&\quad - dg_{11}u^1g_{34,1}S_3.
\end{aligned} \tag{38}$$

Finally, the last three equations are given by

$$u^4\dot{S}_i + 2\left(\dot{u}_{[4}u_{i]} - u^\pi u_\rho \Gamma_{\pi[4}^\rho u_{i]}\right)S_k u^k + 2S_n \Gamma_{\pi[4}^n u_{i]} u^\pi = 0 \tag{39}$$

which give the derivatives of the three spatial components of the spin vector ( $\dot{S}_i$ ):  $\dot{y}_9$ ,  $\dot{y}_{10}$  and  $\dot{y}_{11}$ . The full set of the exact MPD equations for the case of a spinning test particle in a Kerr metric under the Pirani condition (3) is in the appendix of [23].

After achieving a system of equations of motion for spinning test particles, we solve them numerically. We use the fourth-order Runge Kutta method for obtaining the Cartesian coordinates of the trajectories ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). For our numerical calculations, we take the parameters both of the central mass and the test particle such as the radio, the energy, the angular momentum and the components of the four velocity ( $u^\mu$ ). We calculate the full orbit in Cartesian coordinates ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) of a test particle around a rotating massive body for both spinless and spinning test particles. Then, we make a comparison of the time that a test particle takes to do a lap in the two cases.

### Equations of motion for a spinning test particle orbiting a massive rotating body

In the last section, we obtained the general scheme for the set of equations of motion of a spinning test particle in the gravitational

field of a rotating body [54]. Now, we consider the case for the equatorial plane, which is given by the following set of equations:

$$r'[s] = \frac{dr}{ds}; \theta'[s] = \frac{d\theta}{ds} = 0; \varphi'[s] = \frac{d\varphi}{ds}; t[s] = \frac{dt}{ds} \quad (40)$$

where  $s$  is the proper time.

For our numerical calculation, we separate from the full set of equations each one of the functions for the four velocity vector ( $dx^\mu/ds$ ) and the differentials for the spatial components of spin vector ( $S_i$ ). Finally from the eleven differential equations, we obtain the trajectories of the spinning test particle orbiting around the rotating central mass ( $M$ ). We perform our numerical integration as follow: In the first one, we perform the integration along the direction of the rotation axis of the massive body, and the second one in its opposite sense. The value of the components from initial four velocity vector is obtained by replacing the values of the constants of motion ( $E$  and  $J$ ), the Carter's constant ( $Q$ ) and the radio in the Carter's equations [35]

$$\begin{aligned} \Sigma \dot{t} &= a (J - aE \sin^2 \theta) + \frac{(r^2 + a^2) [E (r^2 + a^2) - aJ]}{\Delta}, \\ \Sigma \dot{r}^2 &= \pm R = \pm \left\{ \begin{array}{l} [E (r^2 + a^2) \mp aJ]^2 \\ -\Delta [r^2 + Q + (J \mp aE)^2] \end{array} \right\}, \\ \Sigma \dot{\theta}^2 &= \pm \Theta = \pm \left\{ Q - \cos^2 \theta \left[ a^2 (1 - E^2) + \frac{J^2}{\sin^2 \theta} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\Sigma \dot{\phi} = \frac{J}{\sin^2 \theta} - aE + \frac{a}{\Delta} [E (r^2 + a^2) - aJ], \quad (42)$$

where  $J$ ,  $E$  and  $Q$  are constants and

$$\begin{aligned} \Sigma &:= r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \\ \Delta &:= r^2 + a^2 - 2Mr, \end{aligned}$$

$M$  and  $a = J/M$  are the mass and specific angular momentum for the mass unit of the central source.

The Carter's constant ( $Q$ ) is a conserved quantity of the particle in free fall around a rotating massive body. This quantity affects the latitudinal motion of the particle and is related to the angular momentum in the  $\theta$  direction. From (41), one analyzes that in the equatorial plane, the relation between  $Q$  and the motion in  $\theta$  is given by

$$\Sigma \dot{\theta}^2 = Q. \quad (43)$$

When  $Q = 0$  corresponds to equatorial orbits and for the case when  $Q \neq 0$ , one has non-equatorial orbits.

### MPD equations for a spinless test particle in a Kerr metric

The traditional form of MP equations is given by the Eq (10) [24] and for our problem, we consider the motion of a spinning test particle in equatorial circular orbits ( $\theta = \pi/2$ ) of the rotating source. For this case, we take [55]

$$u^1 = 0, \quad u^2 = 0, \quad u^3 = \text{const}, \quad u^4 = \text{const} \quad (44)$$

when the spin is perpendicular to this plane and the MP condition (3), with

$$S_1 \equiv S_r = 0, \quad S_2 \equiv S_\theta \neq 0, \quad S_3 \equiv S_\varphi = 0. \quad (45)$$

The equation is given by

$$\begin{aligned} & -y_1^3 y_7^2 - 2\alpha y_7 y_8 + y_8^2 - 3\alpha \varepsilon_0 y_7^2 + 3\varepsilon_0 y_7 y_8 - 3\alpha \varepsilon_0 y_8^2 y_1^{-2} \\ & + 3\alpha \varepsilon_0 y_1^2 y_7^4 - \alpha \varepsilon_0 \left(1 - \frac{2}{y_1}\right) y_8^4 y_1^{-3} + \alpha (y_1^6 - 3y_1^5) y_7^3 y_8 y_1^{-3} \\ & + \alpha \varepsilon_0 (3y_1^3 - 11y_1^2) y_7^2 y_8^2 y_1^{-3} + \varepsilon_0 (-y_1^3 + 3y_1^2) y_7 y_8^3 y_1^{-3} = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

where  $y_1 = r/M$ ,  $y_7 = Mu^3$ ,  $y_8 = u^4$ ,  $\varepsilon_0 = |S_0|/mr$  and  $\alpha = a/M$ . When the particle does not have spin ( $\varepsilon_0 = 0$ ), the set of equations (10) with the dimensionless quantities  $y_i$  (19) and (20) is given by

$$-y_1^3 y_7^2 - 2\alpha y_7 y_8 + y_8^2 = 0 \quad (47)$$



In addition to Eq. (47), we take the condition  $u_\mu u^\mu = 1$  and obtain

$$-y_1^2 y_7^2 + 4\alpha \frac{y_7 y_8}{y_1} + \left(1 - \frac{2M}{y_1}\right) y_8^2 = 1 \quad (48)$$

We solve the system of equations (47) and (48) for the case of a circular orbit and obtain the values of  $y_7 = Mu^3$  and  $y_8 = u^4$  in the equatorial plane.

### Gravitomagnetic effects for spinning test particles

In the study of the gravitomagnetic effects, we find the gravitomagnetic force is the gravitational counterpart to the Lorentz force in electromagnetics. Hence, there is an analogy between classical electromagnetism and general relativity such as the possibility that the motion of mass could generate the analogous of a magnetic field. [56]. In general relativity, the gravitomagnetic field is caused by mass current and has interesting physical properties which explain phenomena such as the precession of gyroscopes or the delay time for test particles in rotating fields [57].

In this section, we describe some phenomena of the trajectories from the spin vector, represented by a gyroscope, with the help of the gravitomagnetic effects such as the clock effect, Thomas precession, Lense-Thirring effect or Sagnac effect [43, 58, 59].

The first effect that we take is the Lense - Thirring effect which has the consequence that moving matter should somehow drag with itself nearby bodies. We can do an analogy of this dragging of mass current with a magnetic field produced by a charge in motion. With this analogy, we set up two spinning test particles orbiting in an equatorial plane of a rotating gravitational field. Then, we compare the trajectories of these two spinning test particles that travel in opposite directions in the same circular orbit. We found that one of the particles arrived before the other one. The delay time is due not only to the dragging of the frame system, but also to the angular motion of the spinning test particle [8]. On the other hand, the rotating massive body induces rotation and causes the precession of the axis of a gyroscope which creates a gravitomagnetic field.

The form of the figure is the same, either that the spinning particle orbits in the direction of the central mass or in opposite direction, but they are out of phase in the space.

## Gravitomagnetic clock effect for spinning test particles

In the second half of the nineteenth century, Holzmüller [60] and Tisserand [61] with the help of works in electrodynamics, postulated a gravitomagnetic component for the gravitational influence of the Sun on the motion of planets. The general relativistic effect of the rotation of the Sun with regard to the planetary orbits was calculated by de Sitter [62] and later by Lense and Thirring [63]. After, Ciufolini described the Lense-Thirring precession of satellites such as LAGEOS and LAGEOS II around the rotating Earth [64]. Then NASA launched a satellite around of the Earth. This satellite was orbiting in the polar plane and carried four gyroscopes whose aim was to measure the drag of inertial systems produced by mass current when the Earth is rotating and to measure the geodesic effect given by curvature of the gravitational field around the Earth [65]. This experiment was called *Gravity Probe B*.

There is a phenomenon called the gravitomagnetic clock effect which consists in a difference in the time which is taken by two test particles to travel around a rotating massive body in opposite directions in the equatorial plane [8]. This effect involves the difference in periods of two test particles moving in opposite directions on the same orbit. Let  $\tau_+$  ( $\tau_-$ ) be the proper period that it takes for a test particle to complete a lap around a rotating mass on a prograde (retrograde) orbit. In the literature, the majority of works that study the clock effect consider the difference of periods for spinless test particles. In this paper, we study the clock effect for two spinning test particles orbiting around to a rotating body in the equatorial plane.

To check our results, we review the papers regarding gravitomagnetic clock effect [66] and compare their results with ours. The delay time given by the clock effect is  $t_+ - t_- = 4\pi a/c$ , where  $a = J/Mc$  is the angular momentum density of the central mass. Tartaglia has studied the geometrical aspects of this

phenomenon [20, 67], and Faruque yields the equation of the gravitomagnetic clock effect with spinning test particles as [8]

$$t_+ - t_- = 4\pi a - 6\pi S_0, \quad (49)$$

where  $S_0$  is the magnitude of the spin. In true units this relation is given by

$$t_+ - t_- = \frac{4\pi J_M}{Mc^2} - \frac{6\pi J}{mc^2}, \quad (50)$$

where the first relation of the right could be used to measure  $J/M$  directly for an astronomical body; in the case of the Earth  $t_+ - t_- \simeq 10^{-7}$ s, while for the Sun  $t_+ - t_- \simeq 10^{-5}$ s [18].

### Numerical comparison for spinless and spinning test particle via MPD equations

We take the set of MPD equations for a spinning test particle in a Kerr me-tric given in the second section. This set is composed of eleven coupled di-fferential equations. We input the initial conditions in geometrized units as:  $E = 0.951906$ ,  $r = 10$ ,  $a = 1$ ,  $M = 1$ , Carter´s constant:  $Q = 0.000008$  and angular momentum:  $J = 3.426929$ . With these initial values, we obtain the four-vector velocity ( $dx^\mu/ds$ ) with the Carter´s equations (41 - 42). The spatial components of vector spin ( $S_i$ ) are used to obtain the integration limits. For our case, the spin components are:  $S_1 = 10^{-12}$ ,  $S_2 = 0.1$ ,  $S_3 = 0.1$ . Then, we integrate the set of eleven equations, which were presented in the section 2.1, with the fourth-order Runge-Kutta method [29] with a step size of  $2.384185 \times 10^{-7}$ , while Kyrian and Semerák integrate with a step of  $M/100 = 1 \times 10^{-2}$  [22]. With this code, we get the Cartesian coordinates for a circular orbit when the spinning test particle travels in the same direction of rotation of the central source ( $a$ ) and when it orbits in opposite sense. We register the coordinate time ( $t = x^4$ ) that the test particle takes to do a lap in each sense of rotation. Finally, we take the delay time in these two laps and obtained in non-geometrized units

$$\Delta t_{\text{spinning}} = t_+ - t_- = 2.5212079035 \times 10^{-8}\text{s}. \quad (51)$$

Our numerical result is in accordance with previous works [8, 43, 68], made of an analytic via. In this result, we found that the clock effect is reduced by the presence of the spin in the test particle. Both Mashhoon [43] and Faruque [9] develop an approximation method for studying the influence of spin on the motion of spinning test particles [69], while we use an integration method of the full set of MPD equations in order to obtain the value of the coordinate time ( $t$ ).

This delay time is due to the drag of the inertial frames with respect to infinity and is called the Lense-Thirring effect [70]. In the case of the spinning test particles, there is not only a difference in the time given by the Lense-Thirring effect, but also by a coupling between the angular momentum of the central body with the spin of the particle [71]. The features change if the test particle rotates in one direction or the other; therefore, the period is different for one direction and for the other, and for whether or not the particle has spin.

## Results of the spin vector

In regard to the spin tensor ( $S^{\mu\nu}$ ), sometimes, for the numerical calculation, it is more convenient the spin vector ( $S_i$ ) which is given by the relationship (25). For our numerical calculations, we take the case when the spin is orthogonal to the equatorial plane, that is,  $S_1 = 0$ ,  $S_2 \neq 0$  and  $S_3 = 0$ . In this case, we present our main results with two graphs. For the case ( $S_2 \neq 0$ ), the spin has a tiny nutation (Figure 1). The first graph shows the motion of the spin vector in Boyer-Lindquist coordinates ( $S_1, S_2, S_3$ ). Since both the radius ( $S_1$ ) and the azimuth angle are constant the spin vector describes an oscillating movement with a maximum height of  $2 \times 10^{-14}$ . This oscillation is very short compared with the radius ( $r = 10$ ) of the circle that describes the trajectory.

If we draw at the same time the orbital motion and the spin motion, we obtain an ascending and descending movement within an enveloping sinusoidal wave (Figure 2). This movement is called "bobbing" [73]. Moreover, this ascendant and descendent movement is due to the supplementary spin condition that we take

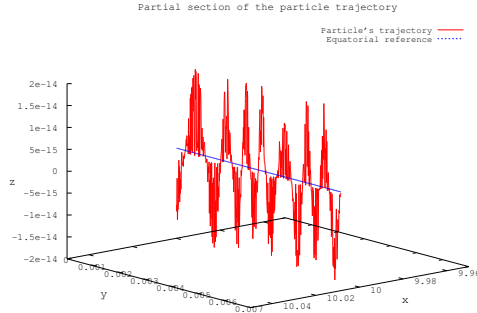


FIGURE 1: The bobbing of the spinning test particle with the Pirani condition (geometrized units)

to be the MP condition ( $S^{\mu\nu}u_\nu = 0$ ), where  $u_\nu$  is the center of mass four velocity. In this situation, the center of mass is measured in its proper frame (that is, the frame is at rest). This phenomenon is due to the shifting of the center of mass, and in addition, the momentum of the particle not being parallel to its four-velocity in general. There is a “hidden momentum” that produces this nutation. In an analogy with the electric ( $E$ ) and magnetic ( $B$ ) fields, there would be a  $E \times B$  drift, that is, the motion is described by helical motions [74]. Costa *et al.* describe this physical situation due to the MP supplementary condition [75]. In the case that we are studying, the world tube is formed by all possible centroids which are determined by the MP spin supplementary condition. The size of this tube is the minimum size of a classical spinning particle without violating the laws of Special Relativity. Additionally, this world tube contains all the helical solutions within a radius  $R = S/M$ . The electromagnetic analogue of the hidden momentum is  $\vec{\mu} \times \vec{E}$  which describes the bobbing of a magnetic dipole orbiting a cylindrical charge. Let the line charge be along the  $z$  axis, the  $\vec{E}$  the electric field it and a charged test particle with magnetic dipole moment  $\vec{\mu}$  orbiting it. The particle will have a hidden momentum  $\vec{P}_{hid} = \vec{\mu} \times \vec{E}$  and oscillates between positive and negative values along the  $z$  axis with ascendant and descendent movements in order to keep the total momentum constant. According with other papers that use the MPD equations, the novelty of our work is that we

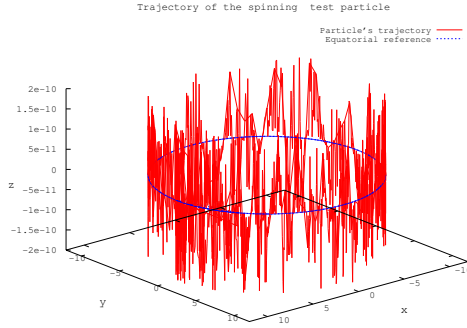


FIGURE 2: The spinning test particle with the Pirani condition has a helical trajectory (geometrized units)

calculate numerically the full set of MPD equations for the case of a spinning test particle in a Kerr metric. Secondly, we take the spin without restrictions in its velocity and spin orientation. In the paper by Kyrián and Semerák the third example that they work, refers to the particular case when the spin is orthogonal to the equatorial plane in a Kerr metric [22]. On the other hand, our interest it is not only in to describe the trajectories of spinning test particles, but also to study the gravitomagnetic clock effect via the MPD equations. Therefore, we calculate numerically both trajectories, i.e., in the same and in the opposite way, in the case of a circular orbit. We measure the delay time for three different situations, namely, for the spinless test particle, traveling one way and the opposite, and for the spinning test particle for two different spin configuration. Regarding the spin configuration for the first, the spin has its value orthogonal to the equatorial plane of the trajectory, and for the second, the spin has no restrictions. For the numerical solution, we give the full set of MPD equations explicitly, while that Kyrián and Semerák only name them. Also, we give the complete numerical solution. In the majority of cases, the solutions are partial because it is impossible to solve analytically a set of eleven coupled differential equations. The recurrent case that they solve is a spinning test particle in the equatorial plane and its spin value is constant in the time ( $S_{\perp} = \text{constant}$ ) [43].

## Conclusions

In this paper, we take the Mathisson-Papapetrou-Dixon (MPD) equations yielded by Plyatsko *et al.* and apply them to the case of a spinning test particle orbiting around a rotating massive body in an equatorial plane. In addition, we yield a scheme for the eleven equations of the full set of equations of motion when the particle is orbiting any gravitational field. In the second part, we calculate the numerical solution of the trajectories in Cartesian coordinates  $(x, y, z)$  of the spinning test particles orbiting in a Kerr metric and compare the time of two circular orbits in the equatorial plane for two test particles that travel in the same orbit but in opposite directions. There is a delay time for a fixed observer relative to the distant stars. This phenomenon is called clock effect. For the case of the spinning test particles, this delay time is given not only by the angular momentum from the central mass, but also by the couple between the angular momentum from the massive rotating body and the parallel component of the spin of the test particle. In the MPD equations, this couple is given by the contraction between the components of the Riemman tensor ( $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ ) and the spin tensor ( $S^{\rho\sigma}$ ).

On the other hand, we obtained the graphs that describe both the orbital motion and the motion of the spin vector freely rotating in the polar component ( $S_2 \neq 0$ ). With this kind of motion, we make an analogy with the bobbing of a magnetic dipole in a electromagnetic field.

In the future, we will work on the set of equations of motion of a test particle both spinless and spinning for spherical orbits, that is, with constant radius and in non-equatorial planes in a Kerr metric. In addition, we are interested in relating these equations with the Michelson - Morley type experiments.

## Acknowledgement

One of the authors N.V. is grateful to the Pontificia Universidad Javeriana in Bogotá for financial support and a doctoral scholar-ship, and to Professors Roman Plyatsko for his helpful suggestions.

## References

- [1] J. Cohen and B. Mashhoon, Phys. Letters A **181**, 353 (1993).
- [2] D. Bini, R. Jantzen and B. Mashhoon, Class. Quantum Grav. **19**, 17 (2002).
- [3] D. Bini, and R. Jantzen, “Gravitomagnetic clock effects in Black Hole spacetimes” in: *General Relativity, Cosmology and Gravitational Lensing* (Bibliopolis, 2001).
- [4] D. Bini, R. Jantzen and B. Mashhoon, Class. Quantum Grav. **18**, 653 (2001).
- [5] D. Bini, F. de Felice and A. Geralico, Class. Quant. Grav. **21**, 5427 (2004).
- [6] D. Bini, F. de Felice and A. Geralico, Class. Quant. Grav. **21**, 5441 (2004).
- [7] J. Cohen, H. Moses and A. Rosenblum, Quantum Grav. **1**, L57 (1984).
- [8] S.B. Faruque, Phys. Lett. A **327**, 95 (2004).
- [9] S.B. Faruque, Phys. Lett. A **359**, 252 (2006).
- [10] P. Shahrear and S.B. Faruque, Int. J. Mod. Phys. D **16**, 1863 (2007).
- [11] L. Iorio, Class. Quantum Grav. **22**, 119 (2005).
- [12] L. Iorio, Class. Quantum Grav. **18**, 4303 (2001).
- [13] L. Iorio, H. Lichtenegger and B. Mashhoon, Class. Quantum Grav. **19**, 39 (2002).
- [14] L. Iorio, Int. J. Mod. Phys. D **10**, 465 (2001).
- [15] H. Lichtenegger, W. Hausleitner, F. Gronwald and B. Mashhoon, “Some aspects on the observation of the gravitomagnetic clock effect” (arXiv:gr-qc/0101089 Jan 2001).
- [16] H. Lichtenegger, L. Iorio and B. Mashhoon, Annalen Phys. **15**, 868 (2006).
- [17] B. Mashhoon, L. Iorio and H. Lichtenegger, Phys. Lett. A **292**, 49 (2001).
- [18] B. Mashhoon, F. Gronwald and H. Lichtenegger, Lect. Notes



- Phys. **562**, 83 (2001).
- [19] B. Mashhoon, F. Gronwald, F. Hehl and D. Theiss, *Annalen Phys.* **8**, 135 (1999).
- [20] A. Tartaglia, *Gen. Relativ. Gravit.* **32**, 1745 (2000).
- [21] A. Tartaglia, *Class. Quantum Grav.* **17**, 783 (2000).
- [22] K. Kyrian, O. Semerák, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **382**, 1922 (2007).
- [23] R. Plyatsko, O. Stefanyshyn and M. Fenyk, *Class. Quantum Grav.* **28**, 195025 (2011).
- [24] M. Mathisson, *Acta Phys. Pol* **6**, 163 (1937); English Translation: *Gen. Relativ. Gravit.***42**, 1011 (2010).
- [25] F. A. Pirani, *Acta Phys. Pol.* **15**, 389 (1956).
- [26] F. Costa, C. Herdeiro, J. Natário and M. Zilhao, *AIP Conference Proceedings* **1458**, 367 (2012).
- [27] M. Dixon, *Phil. Trans. Roy Soc. London A* **277**, 59 (1974).
- [28] W. Beiglböck, *Commun. Math. Phys.* **5**, 106 (1967).
- [29] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling and B. Flannery, *Numerical Recipes in C* (Cambridge University Press, 1997).
- [30] H. Wen-Biao and Y. Shu-Cheng, *Int. J. M. Phy. D* **26**, 1750179 (2017).
- [31] T. Tanaka, Y. Mino, M. Sasaki and M. Shibata, *Phys. Rev. D***54**, 3762 (1996).
- [32] Y. Mino, M. Shibata and T. Tanaka, *Phys. Rev.D***53**, 622 (1996).
- [33] R. Plyatsko, M. Fenyk, *Phys. Rev. D* **91**, 064033 (2015).
- [34] R. Plyatsko, M. Fenyk, *Phys. Rev. D* **94**, 044047 (2016).
- [35] B. Carter, *Phys. Rev.* **174**, 1559 (1968).
- [36] M. Abramowicz and M. Calvani, *Mon. Not. R. astr. Soc.* **189**, 621 (1979).
- [37] J. Bardeen, W. Press and A. Teukolsky, *Astrophys. J.* **178**, 347 (1972).
- [38] D. Wilkins, *Phys. Rev.D*, **5**, 814 (1972).
- [39] M. Calvani, F. De Felice and N. J. Nobili, *Phys. A. Math. Gen.* **13**, 3213 (1980).

- [40] E. Stoghianidis and D. Tsolubelis, *Gen. Relativ. Gravit.* **19**, 1235 (1987).
- [41] E. Teo, *Gen. Relativ. Gravit.* **35**, 1909 (2003).
- [42] S. Suzuki and K.I. Maeda, *Phys. Rev. D* **58**, 023005 (1998).
- [43] B. Mashhoon and D. Singh, *Phys. Rev. D* **74**, 124006 (2006).
- [44] N. Dadhich and P. Kale, *J. Math. Phys.* **18**, 1727 (1977).
- [45] D. Bini, A. Geralico and R. Jantzen, *Classical Quant. Grav.* **22**, 4729 (2005).
- [46] K.P.Tod, F. De Felice, and M. Calvani, *Il Nouvo Cimento*, **34B**, 365 (1976).
- [47] A. Papapetrou, *Proc. R. Soc. London A* **209**, 248 (1951).
- [48] E. Corinaldesi and A. Papapetrou, *Proc. R. Soc. London A* **209**, 259 (1951).
- [49] O.B. Karpov, “The Papapetrou equations and supplementary conditions”, (arXiv:gr-qc/0406002v2 Jun 2004)
- [50] W. Dixon, “Extended Bodies in General Relativity: Their Description and Motion”, In *Isolated Gravitating Systems in General Relativity*, ed. by J. Ehlers (North-Holland, Amsterdam, 1979).
- [51] L. Iorio, *Gen. Relativ. Gravit.* **44**, 719 (2012).
- [52] R. Plyatsko, O. Stefanyshyn and M. Fenyk, *Phys. Rev. D* **82** 044015 (2010).
- [53] F. Costa and J. Natário, *Fund. Theor. Phys.* **179**, 215 (2015).
- [54] C. Chicone, B. Mashhoon, and B. Punsly, *Phys. Letters A* **343**, 1 (2005).
- [55] R. Plyatsko and M. Fenyk, *Phys. Rev. D* **87**, 044019 (2013).
- [56] F. Costa and J. Natário, *Gen. Relativ. Gravit* **46**, 1792 (2014).
- [57] F. Costa and C. Herdeiro, *Phys. Rev. D* **78** 024021 (2008).
- [58] D. Bini, P. Carini and R. Jantzen, *J. Korean Phys. Soc.* **25**, S190 (1992).
- [59] I. Ciufolini, *EPJ Web of Conferences* **58**, 01005 (2013).

- [60] G. Z. Holzmüller, Z. Math. Phys. **15**, 69 (1870).
- [61] F. Tisserand, Compe. Rend. **75**, 760 (1872).
- [62] W. De Sitter, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **76**, 699 (1916).
- [63] H. Thirring, Gen. Relativ. Gravit. **44**, 3225 (2012).
- [64] I. Ciufolini, Class. Quantum Grav.**17**, 2369 (2000).
- [65] Everitt *et al.* , Phys. Rev. Letters **106**, 221101 (2011).
- [66] D. Tsoubelis, A. Economou and E. Stoghianidis, Phys. Rev. D, **36**,1045 (1987).
- [67] A. Tartaglia, Eur. J. Phys. **22**, 105 (2001).
- [68] D. Bini, F. de Felice and A. Geralico, Classical Quantum Gravity **21**, 5441 (2004).
- [69] D. Bini, F. de Felice and A. Geralico, Class. Quantum Grav. **23**, 3287 (2006).
- [70] B. Mashhoon, F. Hehl and D. Theiss, Gen. Relativ. Gravit.**16**, 711 (1984).
- [71] S. Chandrasekhar, in: *The mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, 1983).
- [72] R. Wald, Phys. Rev. D **6**, 406 (1972).
- [73] S. Gralla, A. Harte and R. Wald, Phys. Rev. D **81**, 104012 (2010).
- [74] J. Jackson, in: *Classical electrodynamics*, (John Wiley & Sons,Inc., 1962).
- [75] F. Costa, J. Natário and M. Zilhao, Phys. Rev. D **93**, 104006 (2016).

## INSTRUCCIONES PARA LOS AUTORES

La revista MOMENTO publica semestralmente resultados originales inéditos de investigación básica y aplicada en diversas áreas de la física. El contenido de los artículos no debe haber sido publicado, total o parcialmente, en otra revista. Cada manuscrito será sometido a un proceso de evaluación por pares seleccionados por el Comité Editorial, y según su respuesta se decidirá o no su publicación o se sugerirán posibles modificaciones. El Comité Editorial podrá rechazar, sugerir cambios o llegado el caso, realizar modificaciones al estilo literario sin alterar el contenido científico. Los artículos aceptados para publicación serán revisados en su versión final por cada uno de los autores. El tiempo de evaluación es de al menos un mes. La precisión de la información en los manuscritos, incluyendo figuras, tablas y citas bibliográficas es responsabilidad completa del autor o autores.

MOMENTO publica artículos de investigación científica y tecnológica, de reflexión, de revisión y cortos. Se publican artículos en español e inglés y deben ser enviados preferiblemente en formato L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X o en Microsoft Word de acuerdo al formato momento.tex disponible en <http://revistas.unal.edu.co/index.php/momento/about/submissions#authorGuidelines>.

Los trabajos para publicar deben incluir la estructura generalmente aceptada para artículos de revistas científicas con los elementos básicos como:

- **Título del artículo.** Debe ir en español e inglés, en mayúsculas, no debe contener fórmulas ni abreviaturas. Debe ser preciso y coherente con el tema desarrollado y no debe exceder 130 caracteres incluyendo los espacios. Los títulos, resúmenes y palabras clave se organizan dependiendo del idioma en el que se escriba el artículo. Entonces, si el artículo se escribe en español se debe colocar primero el título en español y luego en inglés. Si el artículo se escribe en inglés se coloca primero el título en inglés y luego en español. Así mismo para el resumen y palabras clave.
- **Nombre de los autores.** Se debe incluir de cada autor el nombre, inicial del segundo nombre si lo tiene y el primer apellido. Relacionar la filiación de los autores con números superíndices y el correo electrónico del autor al que se le debe dirigir la correspondencia (un solo autor).
- **Resumen en español e inglés** Máximo 250 palabras. Debe contener el objetivo principal, hallazgos más importantes y conclusiones del trabajo. **Palabras Clave y Keywords.** Máximo 5 palabras. Usar tesauros específicos o disciplinares de acuerdo con el contenido del tema del manuscrito y que no se incluyan en el título del trabajo.
- **Desarrollo del artículo** El texto debe dividirse en secciones, cada una con un encabezado. Por ejemplo: Introducción, Parte Experimental y/o Desarrollo Teórico, Resultados y Discusión, Conclusiones. Los títulos se deben alinear a la izquierda y resaltarlos en negrilla. Se recomienda que estas secciones sean breves y equilibradas.
- **Referencias bibliográficas.** Sólo se deben citar aquellas referencias que figuren en la sección de bibliografía y deben ser numeradas en el texto en forma consecutiva (conforme vayan apareciendo) y en paréntesis cuadrados. No se deben citar referencias en el resumen. Las referencias bibliográficas deben seguir el formato de la American Physical Society (se recomienda el uso de BibTEX). Se deben escribir en abreviatura los títulos de las revistas o los títulos completos de no encontrarse en Journal Title

Abbreviations o en <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/nlmcatalog/journals>. En general las citas deben contener: el apellido y las iniciales del nombre de todos los autores separados por coma, seguido del nombre de la revista, el año, el volumen y las páginas. Si la publicación cuenta con DOI, se debe incluir. Para los archivos enviados en Microsoft Word poner después del año, de ser posible, las direcciones web o el link de cada referencia citada (se sugiere usar la herramienta Endnote). El material no publicado se refiere a los trabajos aceptados para publicación pero que no han sido impresos. Algunos ejemplos de citas se muestran a continuación.

- **Artículo:** P. Hohenberg and W. Kohn, Phys. Rev. 136, B864 (1964).
- **Libro:** A. Bard and L. Faulkner, Electrochemical Methods: Fundamentals and Applications (Wiley, 2000). pp. 1010-1014.
- **Tesis (o similar):** K. Martínez. Producción y Caracterización de Nuevos Materiales (tesis de maestría). Bogotá, Departamento de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia; 2015. p. 10-46.
- **Memorias de congreso:** J. D. Pabón and G. Hurtado, in Memorias del Congreso Mundial de Páramos (2002) p. 98.
- **Material no publicado:** T. Poon, Optical Scanning Holography With Matlab (Springer) En prensa. 2017.
- **Página Web:** NASA. Status of the Ozone Hole 2016.  
<https://ozoneaq.gsfc.nasa.gov/omps/ozone-hole/>. Consultada el 10 de noviembre de 2016.

### **Requisitos:**

- Las figuras y tablas deberán numerarse en forma consecutiva, y deben contener en la parte inferior un título o leyenda explicativa. Las figuras deben además ser enviadas por separado con buena resolución (300 pixeles por pulgada) en formato jpg, pgn, tif o gif. Al graficar diferentes series de datos usar en lo posible diferentes símbolos (marcadores de datos en Excel, ver ejemplo en los formatos de Latex o Word). Los ejemplares físicos serán impresos en blanco y negro, sin embargo en la página web se encontrarán los artículos con las figuras a color.
- Unidades, abreviaturas y símbolos: Se usará el Sistema internacional de Unidades (m, Kg, s, K), empleando sólo términos aceptados generalmente. Es necesario explicar las abreviaturas desconocidas cuando se usen por primera vez. Se debe poner especial cuidado al escribir los símbolos para que sean identificados claramente con el autor el uso de fórmulas, caracteres especiales u otros.
- Se recomienda reducir el número de notas de pie de página, especialmente las que hacen referencia a otras notas dentro del mismo documento y no utilizarlas para hacer referencias bibliográficas.
- Si se requieren agradecimientos, reconocimientos a entidades, permisos de publicación, etc., irán al terminar el texto y antes de las Referencias bibliográficas.
- Como requisito adicional es necesario llenar los formatos “Declaración originalidad responsabilidad de autoría y conflicto de intereses” y “Formato transferencia derechos de autor” y enviarlos por correo electrónico o adjuntarlos como documentos adicionales en el sistema OJS (ver página web).
- Las contribuciones no deben superar las 15 páginas.

El texto de las contribuciones debe ser enviado por medio de la página web y/o a **momento\_fcbo@unal.edu.co**

*Revista Momento 57*  
se terminó de imprimir  
y encuadernar en Proceditor  
en Bogotá, D. C., Colombia.

