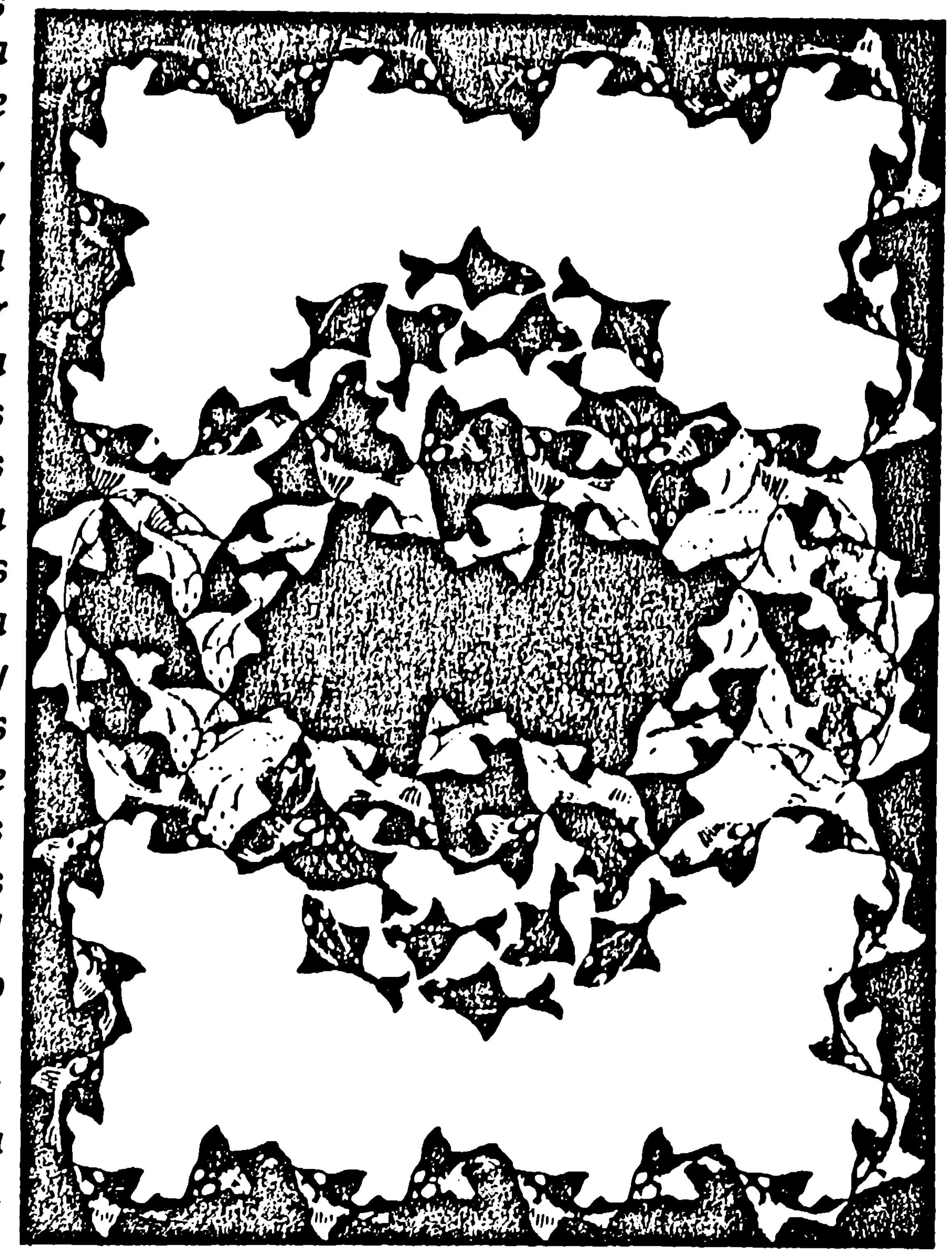
Jesús Hernando Pérez*

DIALECTICA Y MATEMATICAS

El deber de todo prisionero es escapar.
Michael Foucault

Aunque resulte por ahora prematuro presentar puntos de vista definitivos o de gran proyección, sobre la compleja relación entre dialéctica y matemáticas, conviene sin embargo, adelantar algunas opiniones como las que aparecen aquí, para ayudar a comprender de una manera nueva, la naturaleza del método dialéctico, utilizando para ello elementos que provienen de las matemáticas contemporáneas. Hay aquí un gran vacío, patrocinado en buena parte por los principales especialistas quienes o bien, encuentran un divorcio muy grande entre estos dos ámbitos o sino, entienden la relación de una manera muy elemental y superficial, manejando ejemplos que por su gran trivialidad no ofrecen ningún tipo de aporte y no van más allá del más contra el menos o de la derivada contra la integral. Los desarrollos matemáticos de los últimos años, ofrecen posibilidades que están muy lejos de haber sido explotadas plenamente y que resultan especialmente fértiles, como trataremos de insinuarlo en este ensayo. El caso por ejemplo del concepto lógico de consistencia mutua de teorías al cual nos referiremos más adelante permitirá resolver o superar, la falsa ruptura entre la representación matemática pura, de suyo fuera del espacio y del tiempo y la realidad del movimiento que parece no existir en las teorías matemáticas tomadas aisladamente. Esta confusión, se encuentra en la base de los principales errores que se cometen acerca de la naturaleza del pensamiento matemático que para muchos no es más que garabatología simple. La consistencia mutua de teorías, es una de las formas básicas que toma la dialéctica en la representación matemática y el despliegue de esta idea, generará en el próximo futuro, nuevas luces sobre el método dialéctico como muy bien lo ha señalado el lógico matemático y filósofo norteamericano William Lawvere. Esperamos que mentes jóvenes con mucha energía se vuelquen sobre este tema de grandes posibilidades y sobre otros como la Teoría de la Bifurcación, la Teoría de Fractales que permanecen, desafortunadamente todavía, inexplorados por la Filosofía.



En este ensayo, abordaremos únicamente tres temas, en número suficiente para dar una idea, así sea muy somera de las posibilidades de la relación entre la dialéctica y las matemáticas: la consistencia mutua de teorías, la Teoría de Catástrofes que forma parte de la Teoría de la Bifurcación y la dialéctica formal entre deducción e inducción.

**Jesús Hernando Pérez, Matemático. Profesor Asociado de la Universidad Nacional de Colombia.*

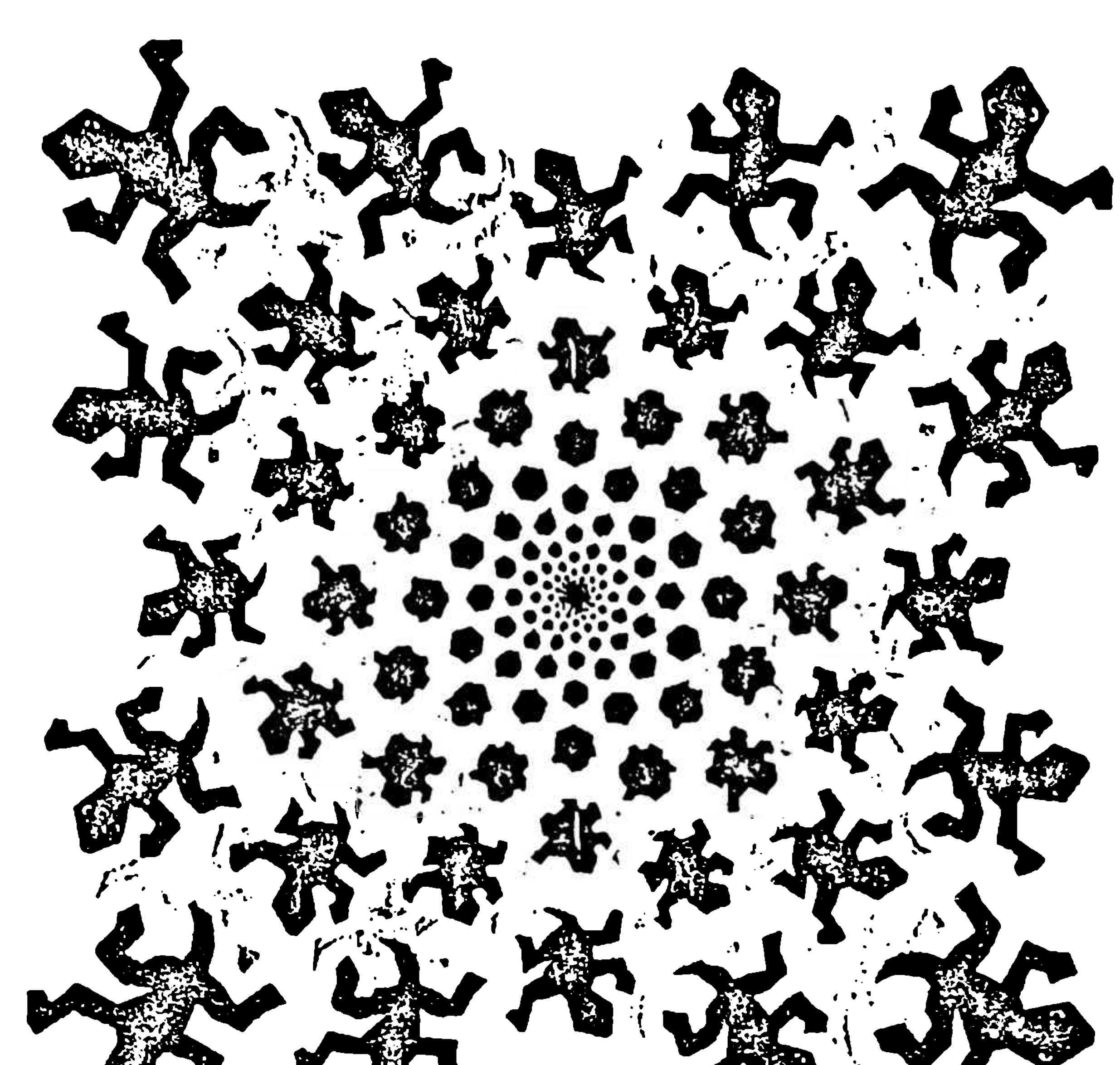
LA CONSISTENCIA MUTUA DE TEORIAS

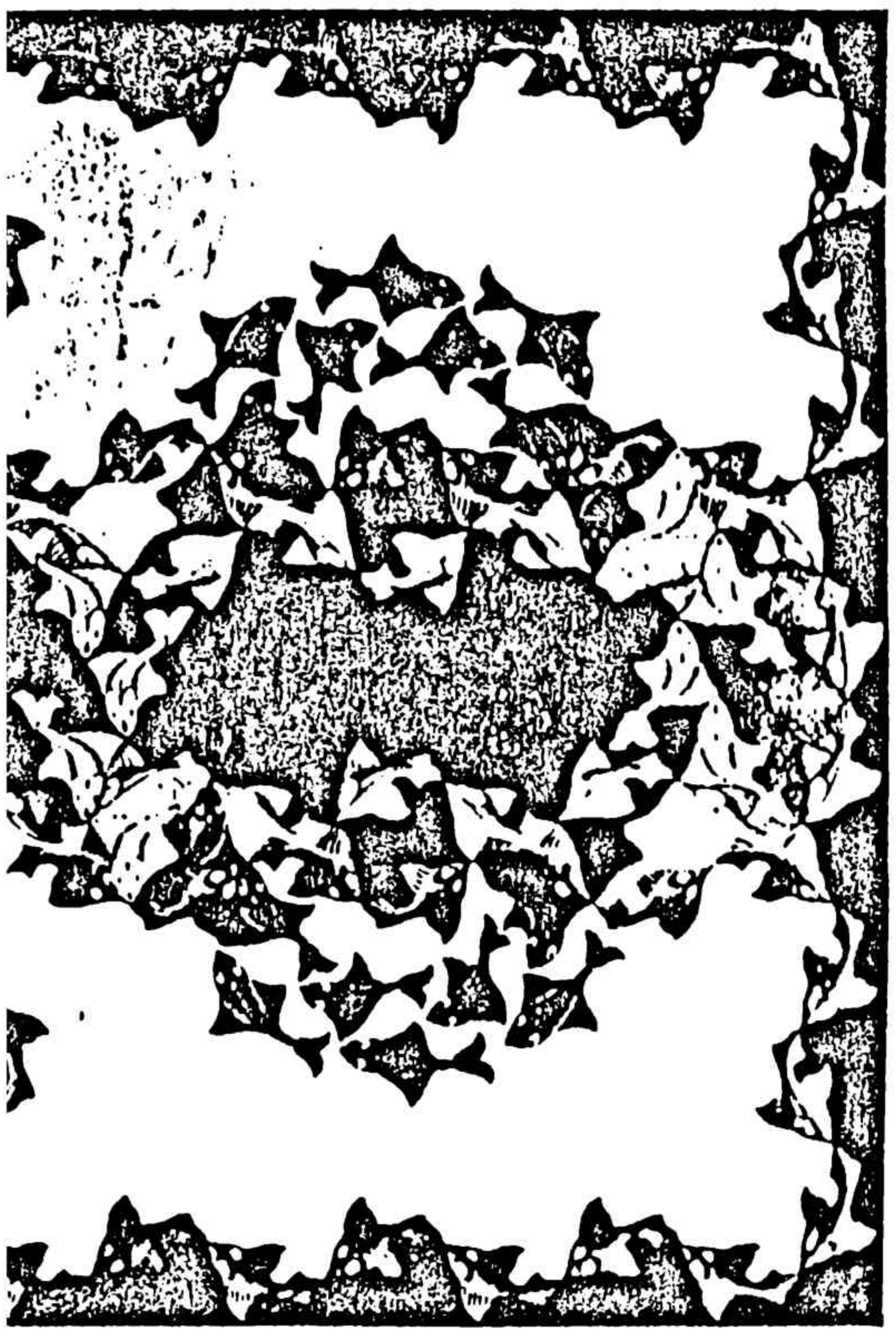
La lógica, tan antigua como la humanidad, consolidó su lugar en la cultura gracias en lo fundamental, al descubrimiento del sin-sentido y de la inconsistencia en la representación lingüística. Son muy conocidos los ejemplos a este respecto, como el que aparece cuando un maestro explica a sus atónitos alumnos el concepto de número fraccionario empleando bananos o naranjas: medio banano es un sin-sentido, pues una vez que se divide un banano en dos partes iguales, este desaparece y la expresión "medio banano" no se sabe ya a qué se refiere. Menos ingenuos son los ejemplos popularizados por Bertrand Russell el más conocido de los cuales, es básico para entender la crisis de los fundamentos de las matemáticas que se vivió al finalizar el siglo pasado e iniciando el presente y como consecuencia de la cual, se colocaron unos cuantos pilares del pensamiento contemporáneo. Presentaremos en las próximas líneas un resumen de este ejemplo, ampliamente conocido como la paradoja de Russell, en homenaje a quien la descubrió.

Para no alejarnos mucho, partamos del proceso reduccionista de las teorías matemáticas que se dió finalizando el siglo pasado e iniciando el presente y culminó con la obra de Gottlob Frege y del propio Russell, quienes lograron formular la Teoría de los Números Naturales en términos de conceptos conjuntistas. Aparece entonces la Teoría de Conjuntos como la teoría básica y fundamental de las matemáticas, dentro de la cual se formulan todas las demás. En realidad, se llegó a lo siguiente: si la Teoría de Conjuntos es consistente, a saber, no implica contradicciones, entonces, ninguna teoría matemática es contradictoria con lo cual, el problema de garantizar la consistencia de las matemáticas se redujo al de una sola teoría: la de los conjuntos. Este formidable resultado, tropezó en primera instancia con una terrible realidad: la Teoría de Conjuntos parecía ser contradictoria y con ello, todo el edificio matemático. En efecto, le decía Russell a Frege, colocándolo al borde del suicidio, hay conjuntos que no se pertenecen a sí mismos como elementos y otros que sí. Para el primer caso, el de las cucharas que evidentemente no es una cuchara y para el segundo el de las cosas que no son cucharas que a todas luces, tampoco es una cuchara; ahora bien prosigue Russell, si formamos el conjunto $\mathcal{R}$ de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos como elementos es decir:

$$\mathcal{R} = \{x \,/\, x \notin x\}$$

llegaremos a la siguiente contradicción: si $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ entonces $\mathcal{R}$ satisface la condición para sus elementos y por lo tanto, $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$; recíprocamente, si $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ entonces $\mathcal{R}$ no cumple la propiedad de sus elementos y en consecuencia, $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$. Total, $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ si y solamente si $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ y todo lo anterior en español gramaticalmente correcto. El escándalo que produjo semejante hallazgo no tiene nombre: las reacciones fueron muy diversas, como aquella de un famoso intuicionista que se apresuró a manifestar la importancia de la Lógica Clásica y de la Teoría de Conjuntos: produce contradicciones. En lo inmediato, se generaron tres grandes escuelas de Filosofía de las Matemáticas, inspirada cada una en alguna tradición: El logicismo, El Intuicionismo y El Formalismo. No es del caso profundizar aquí en estas filosofías, nos interesa solamente seguir un poco la serena argumentación de Russell, quien muy finamente apuntó a la necesidad de pulir el lenguaje natural para lograr representaciones con sentido y consistentes, creando con ello, una nueva escuela del pensamiento filosófico: el positivismo lógico. Para seguir al pie de la letra el razonamiento de Rusell, tomemos ahora el siguiente ejemplo muy antiguo: el cretense afirma: "todo lo que afirmo es falso" y pregunta; ¿esto último es verdadero o falso?. El resultado es igual al de la paradoja de Russell, a saber, p es verdadera si y solamente si p es falsa y una vez más, no se ha cometido ningún error gramatical. Pero, lo que hay aquí, es una mezcla de niveles o de tipos lógicos, que se produce muy naturalmente sin violar las reglas gramaticales, en toda representación en lenguaje común. La última afirmación del cretense, se refiere a otras diferentes y pertenece entonces a un nivel lógico nuevo, distinto al de éstas y por lo tanto, si tenemos cuidado y tratamos los





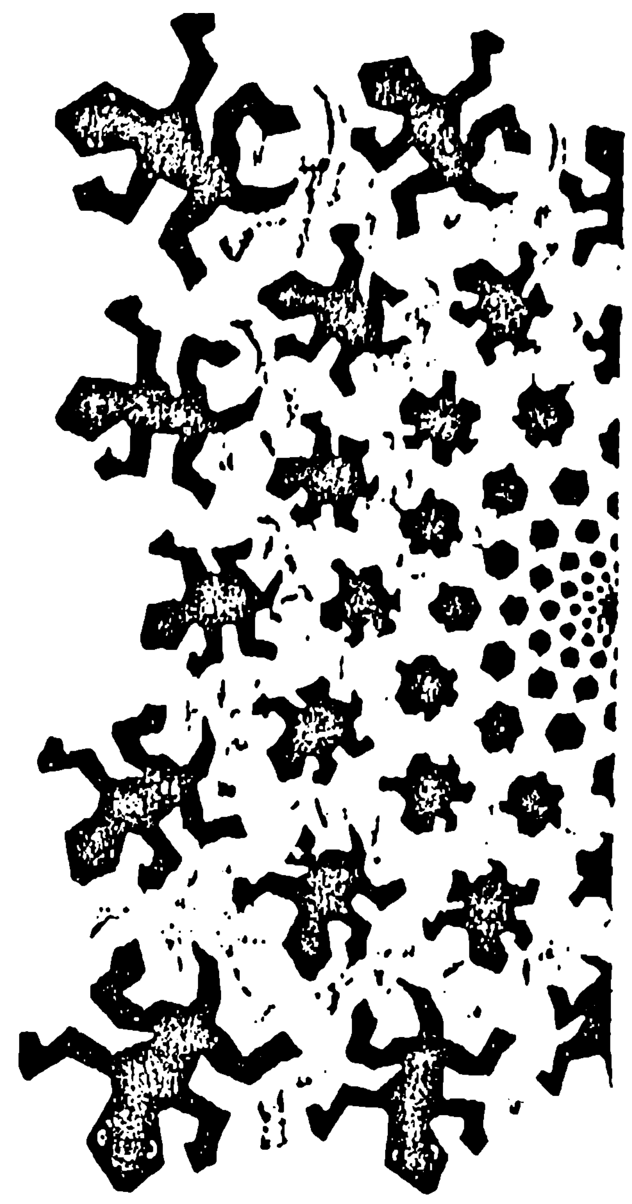
diversos tipos lógicos cada uno a su manera, desaparecerá la contradicción *p* equivalente a no *p*. La última afirmación del cretense es de segundo nivel (o segundo orden) y no pertenece a las otras de primer nivel (o primer orden) que son su referencia. El lugar de la Lógica en definitiva, no está en el lenguaje común; pero claro, todo esto nos lo dijo el propio lenguaje común muy dialécticamente.

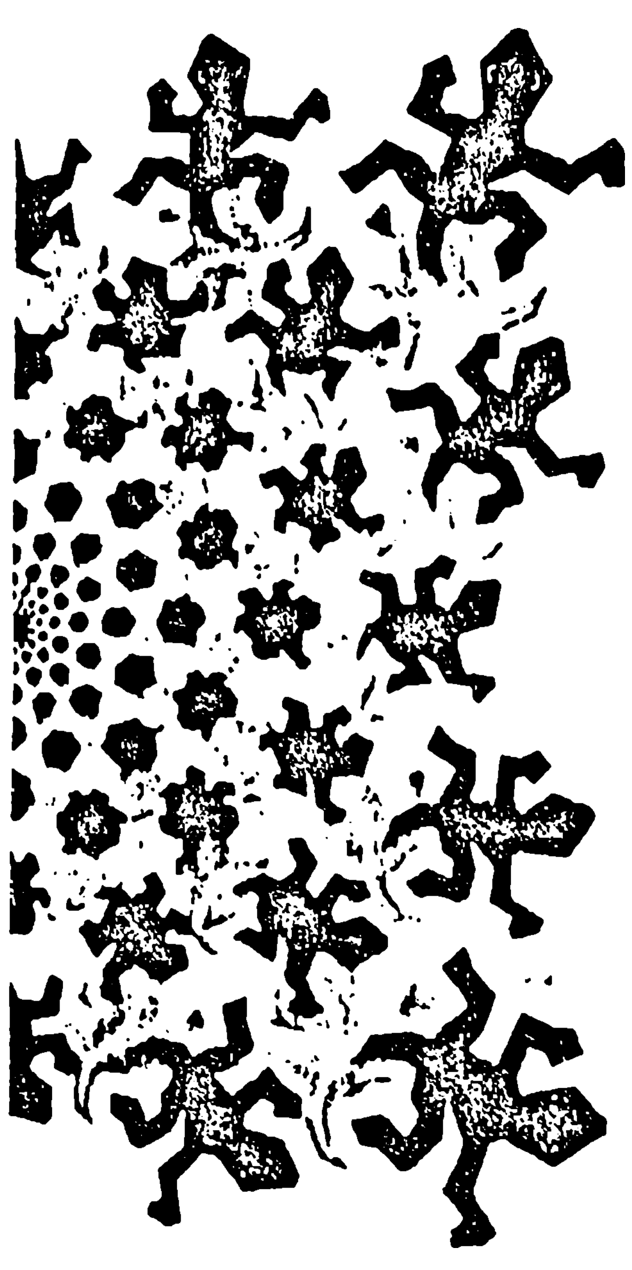
Hay que salirse entonces del lenguaje natural, de la mera comprensión, para llegar a la explicación; por ello, el simbolismo de las teorías matemáticas no es artificial, es una necesidad y hoy en día, siguiendo la idea básica de Russell, se hacen distinciones como, lenguajes de primer orden o primer nivel, de segundo orden o segundo nivel, etc. Y así, la representación lógica, es decir, con sentido y consistente se da en los llamados lenguajes formales, en lo que llamaremos ahora representación formal.

Sin embargo, la pregunta principal es ahora la siguiente: Si representamos la Teoría de Conjuntos en un lenguaje formal adecuado; ¿es posible asegurar que ella no implicará una contradicción? Porque una cosa es descubrir que la representación en lenguaje común produce contradicciones y comprender la necesidad de una representación diferente y otra cosa muy distinta, el que esta nueva representación garantice lo que los lenguajes naturales no pueden. Tan descomunal e importante problema, fue abordado por el lógico austriaco Kurt Godel alrededor de los años 30 logrando resultados espectaculares: Godel demostró que ninguna representación formal de la teoría de Conjuntos (que incluye la aritmética) puede garantizar tal cosa.

¿Y entonces en qué quedamos? En algo maravilloso, a saber, la consistencia, concepto fundamental de la Lógica, no es absoluta; es inevitablemente relativa y necesita de un "afuera". Hemos llegado así a nuestro punto fundamental, porque el meollo de la dialéctica en la representación matemática es el siguiente: ¿cuál es en la representación formal el afuera de la Teoría de Conjuntos? Porque, un afuera inmediato para esta teoría formalmente representada es como lo argumentó muy bien Alfred Tarski, la misma Teoría de Conjuntos representada en lenguaje común aunque con ciertos pulimientos lógicos de la lengua, lugar de donde salió al fin y al cabo la formalización; pero, esta manera de ver aunque correcta y correspondiente con la práctica matemática de todas las épocas, no da en el blanco y por ello, la esquizofrenia de algunos antimodernos que han embestido contra la representación formal, acusándola de garabatología metafísica por puro desconocimiento de los hallazgos más recientes de la Lógica. No se comprende en este caso, que la salida de la representación formal, el escape, consiste en meterse muy profundamente en ella para fabricar desde dentro una nueva; porque,un prisionero no puede fugarse sino es conociendo muy bien su propia cárcel y cuando sale, montará sus propias rejas a su alrededor, con el resultado de cambiar un sistema formal por otro; ésta es la clave para comprender el pensamiento contemporáneo y superar el interminable debate entre modernos y posmodernos. Veamos pues, cuál es el afuera formal de la Teoría de Conjuntos.

Algo que no hemos mencionado explícitamente, es que la Teoría de Conjuntos tiene su propia lógica y está amarrada a ella; por lo tanto, la salida se producirá cambiando la manera de razonar, cosa que venían solicitando





los intuicionistas de todas las épocas desde los sofistas en adelante. La puja en torno al tercero excluido, vale decir, por si se razona o no constructivamente, corresponde a la pugna entre dos lógicas diferentes: la analítica que hablando en términos meramente proporcionales acepta el principio *"p ó no p"* y la sintética que lo niega y no acepta nada que no venga acompañado de una construcción.

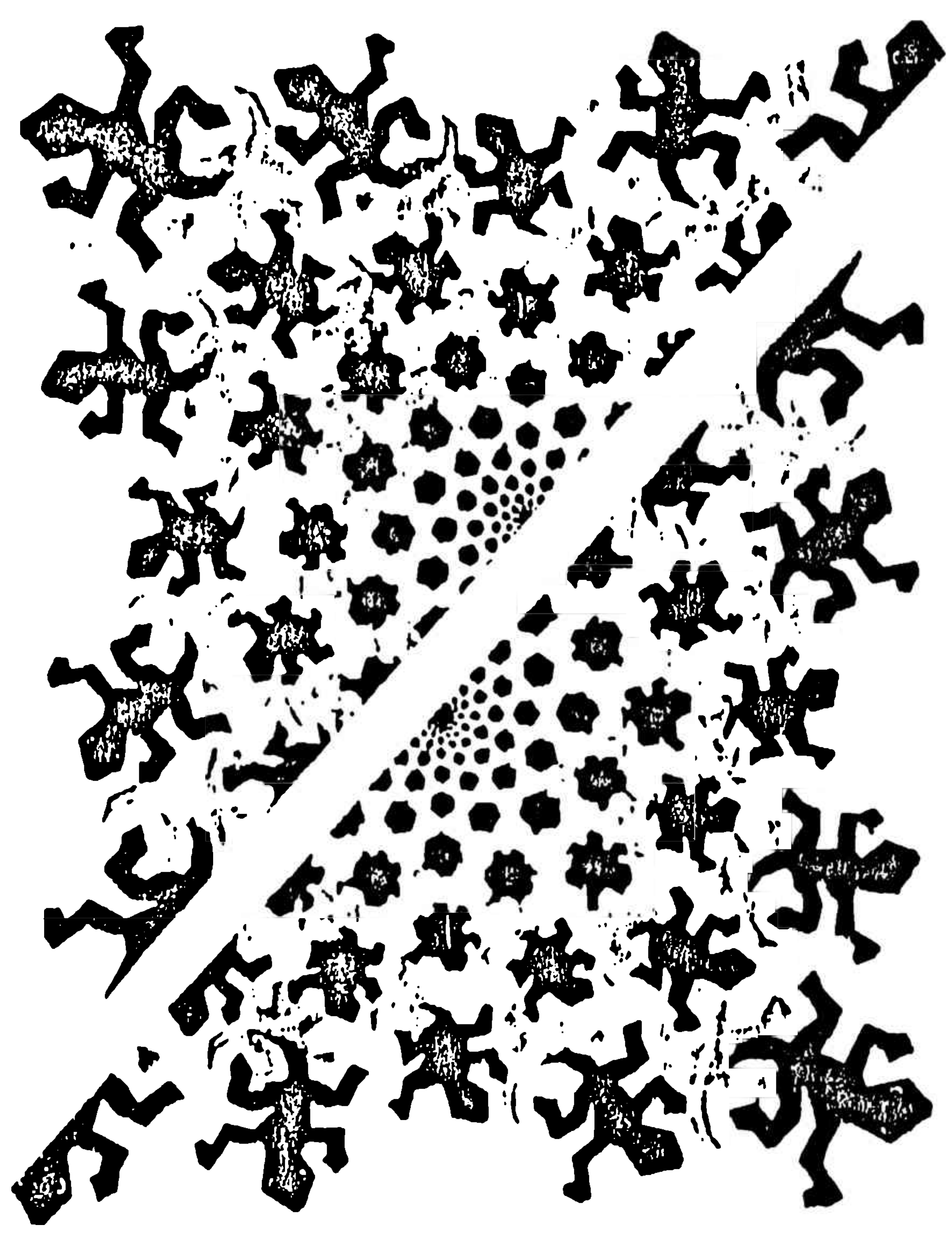
La Teoría de Conjuntos analíticamente razonada, es la que todos conocemos; pero, existe también aquella en la cual se argumenta sintéticamente; la primera, es la cantoriana que todos aprendemos en el colegio y la segunda, la broweriana (en homenaje a L.E.J. Brower, padre del intuicionismo contemporáneo). Estas dos teorías son muy diferentes y así lo muestra por ejemplo la manera como aparecen los sistemas numéricos en la una o en la otra; a saber, como estructuras granulares o atómicas en la analítica y como estructuras energéticas o fluidas en la sintética.

Ahora bien, cada una de estas lógicas, por el momento es el afuera de la otra porque como un Jano, satisfacen la siguiente propiedad de consistencia mutua, uno de los descubrimientos más importantes de la lógica contemporánea: las dos teorías de conjuntos son diferentes, ninguna de ellas puede dar cuenta de su propia consistencia; pero, si se supone que una es consistente se demuestra entonces que la otra también. Esto transforma de una manera radical la naturaleza del pensamiento matemático; que como muy bien lo señalara Morris Kline, perdió toda certeza, ganando a cambio un delicioso sabor dialéctico y saliéndose del imperio de la consistencia, entró en el flujo de la consistencia mutua, clave número uno para entender el movimiento en la representación matemática. La llamada cárcel de la analiticidad si es que consiste en algo, genera inmanentemente la nueva prisión de la sinteticidad y si esta última ronda por ahí, lleva por dentro su negación lo cual explica el interminable fluir de un lado para el otro de la representación matemática como nos lo muestra tan claramente la historia: el pitagorismo primero, luego el constructivismo de los sofistas con el programa de la regla y el compás, más tarde el platonismo, seguido del programa sintético de Euclides que se convierte más luego en el fisicalismo arquimediano del cual se sale con el álgebra de Diofanto y de los antiguos árabes; para abrirle camino a la analiticidad cartesiana y newtoniana a la que se contraponen Leibniz y Euler y así sucesivamente sin descanso.

Especulando un poco, podríamos decir que las grandes representaciones que se oponen dialécticamente a la manera de Parménides y Heráclito tal vez no consisten; pero, con toda seguridad consisten mutuamente como Janos: una cara no muestra gran cosa pero dos, una detrás de la otra contrapuestas exactamente, adquieren armonía y se ven o permiten ver. El azar y la necesidad, para mencionar un caso concreto, como lo insinúan Jacques Monod e Ilya Prigogine; ¿no serán, como representaciones mutuamente consistentes?. Este interrogante y otros parecidos, muestran una ruta inexplorada.

Un comentario final para terminar esta parte: La consistencia mutua, es un concepto aún no determinado y hay que esperar un poco más los resultados, por ejemplo, de la lógica Paraconsistente; de los cuales puede surgir una tercera lógica y por tanto una tercera teoría de conjuntos con lo cual, tendríamos una dialéctica tripartita en la representación formal. Esto lo sugiere tambien la Teoría de Catástrofes, tema de nuestra próxima sección.

LA TEORIA DE LA BIFURCACION



Veamos ahora, aunque muy superficialmente, algunas ideas de otra teoría matemática contemporánea, de la cual pueden extrapolarse consecuencias muy valiosas para la dialéctica y que se conoce con el nombre de "Teoría de la Bifurcación". La amplitud de esta teoría, nos impide abordar el tema en profundidad, viéndonos en la necesidad de tomarla tan sólo en una pequeña parte y por ello haremos referencia únicamente a la Teoría de Catástrofes. Esta última teoría, cuyas fuentes son muy diversas, ganó después de muchas investigaciones y de numerosos esfuerzos, un importante lugar en el pensamiento contemporáneo, gracias sobre todo al matemático francés René Thom y a las diversas aplicaciones que se han encontrado, como la de la escuela de Bremen en el ámbito de la lingüística; siguiendo básicamente sugerencias del propio Thom. La Teoría de Catástrofes, es la representación formal de ciertos sistemas dinámicos continuos, a saber, aquéllos cuya ley puede expresarse mediante una función potencial.

Tomemos el ejemplo más popular conocido con el nombre de Catástrofe de la Cúspide y supongamos que un cierto sistema dinámico $\mathcal{D}$, puede representarse formalmente de la siguiente manera: los estados internos de $\mathcal{D}$, mediante una variable real x, las influencias externas con dos parámetros reales u, v la energía interna o en potencia del sistema con la función potencial

$$E\,(x,u,v) = \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{2}\,ux^2 + vx$$

y la ley dinámica mediante la ecuación $\frac{\partial E}{\partial X} = 0$

Todo lo anterior significa que el sistema $\mathcal{D}$ estará en equilibrio, cuando el estado interno representado por X, tome aquellos valores para los cuales la derivada de la función potencial E con respecto a x, se anula; geométricamente, cuando el gráfico de la función E para valores fijos de u, v en función de x, tiene tangente horizontal. Para determinar estos valores, es necesario resolver la ecuación del sistema

$$x^3 + ux + v = 0$$

que como se ve, depende de u y de v. Las soluciones de esta última ecuación polinomial de tercer grado, varían con el discriminante:

$$\Delta = 4u^3+27v^2$$

cuyo valor es función de u y de v. La figura 1 en donde hemos dibujado la curva llamada **cúspide** correspondiente a la ecuación $\Delta = 0$; nos muestra básicamente cuatro situaciones:

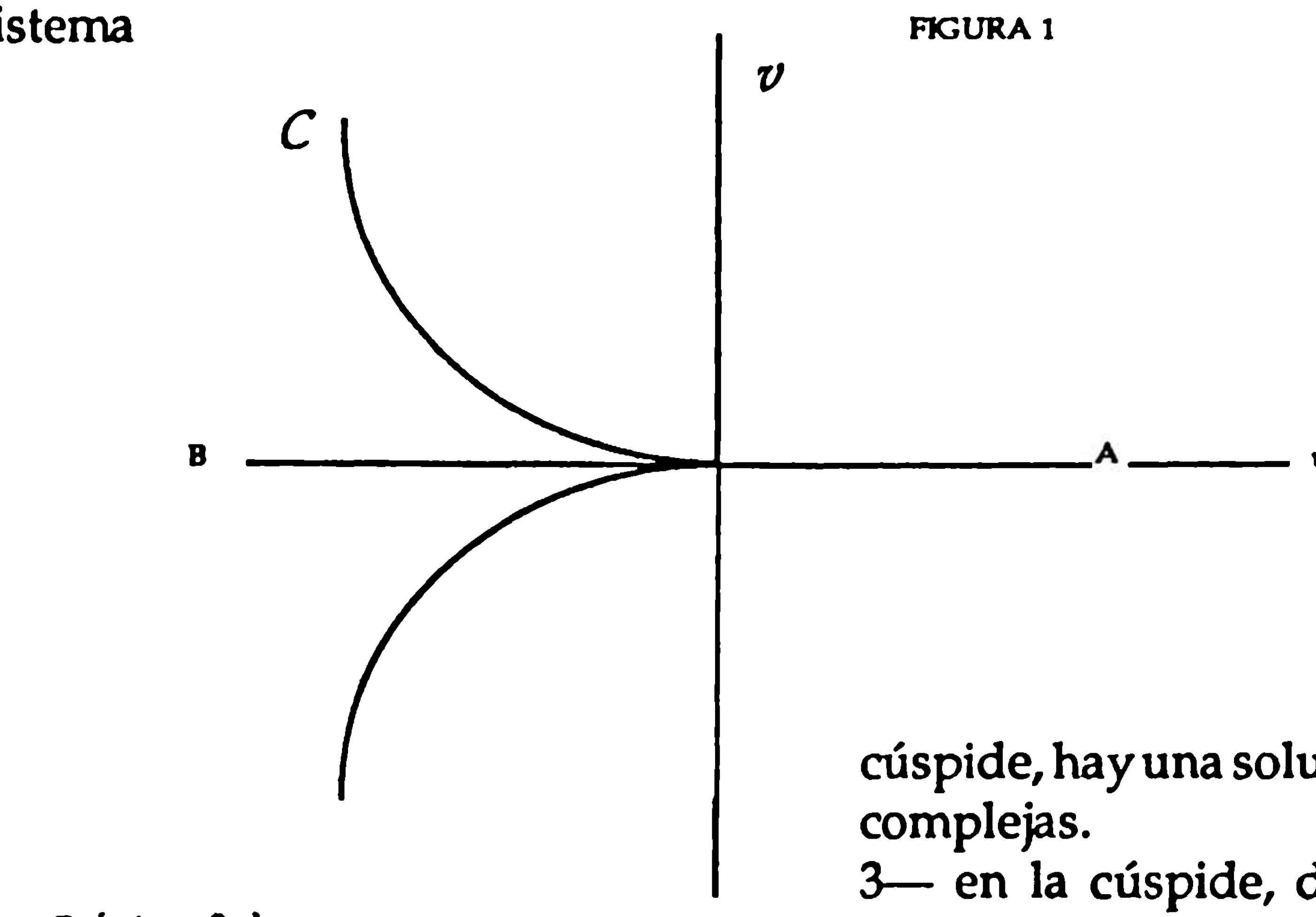
1— en la zona B, interior de la cúspide, la ecuación del sistema tiene tres soluciones reales diferentes.

2—en la zona A, exterior de la cúspide, hay una solución real y dos complejas.

3— en la cúspide, dos soluciones reales, una de ellas doble y

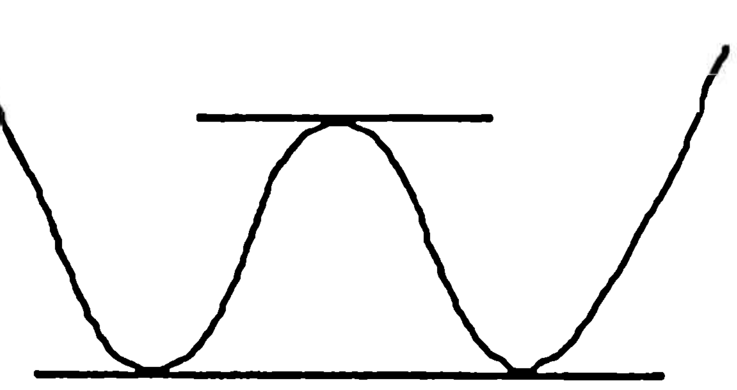
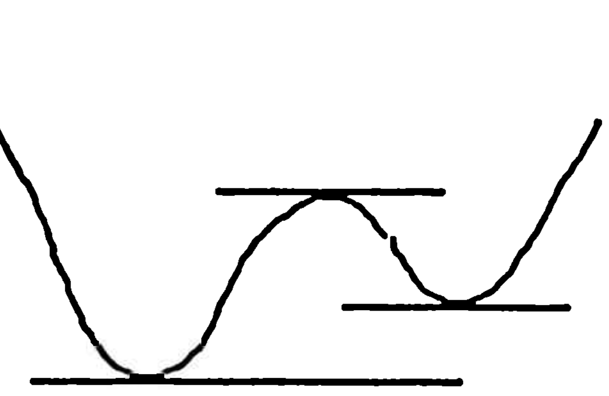
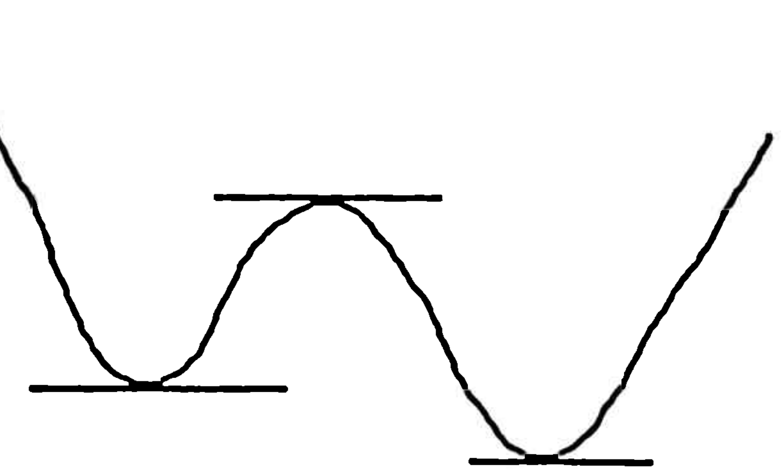
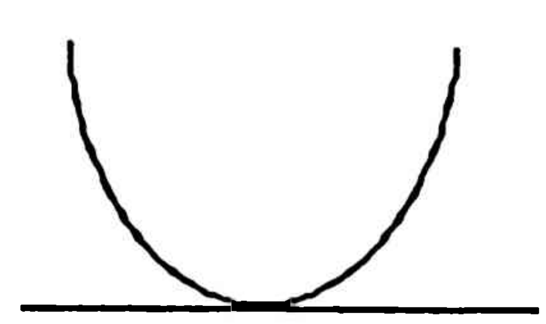
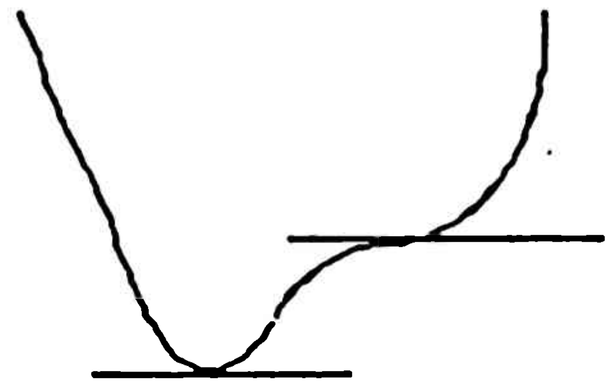
4—en el origen (0,0), una solución real triple.

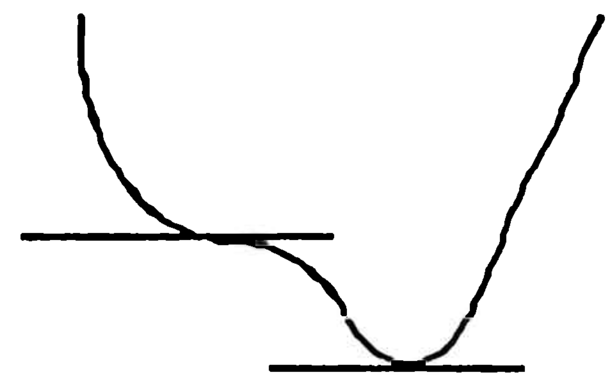
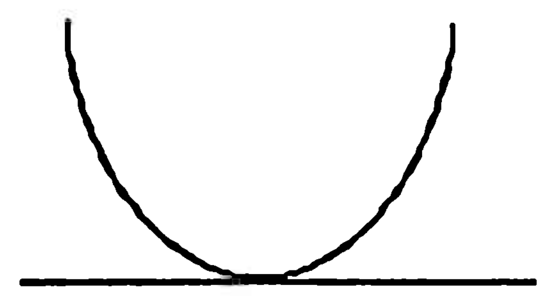
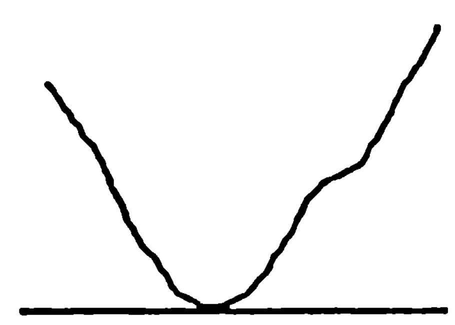
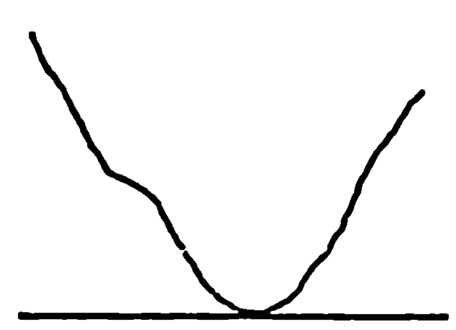
FIGURA 1

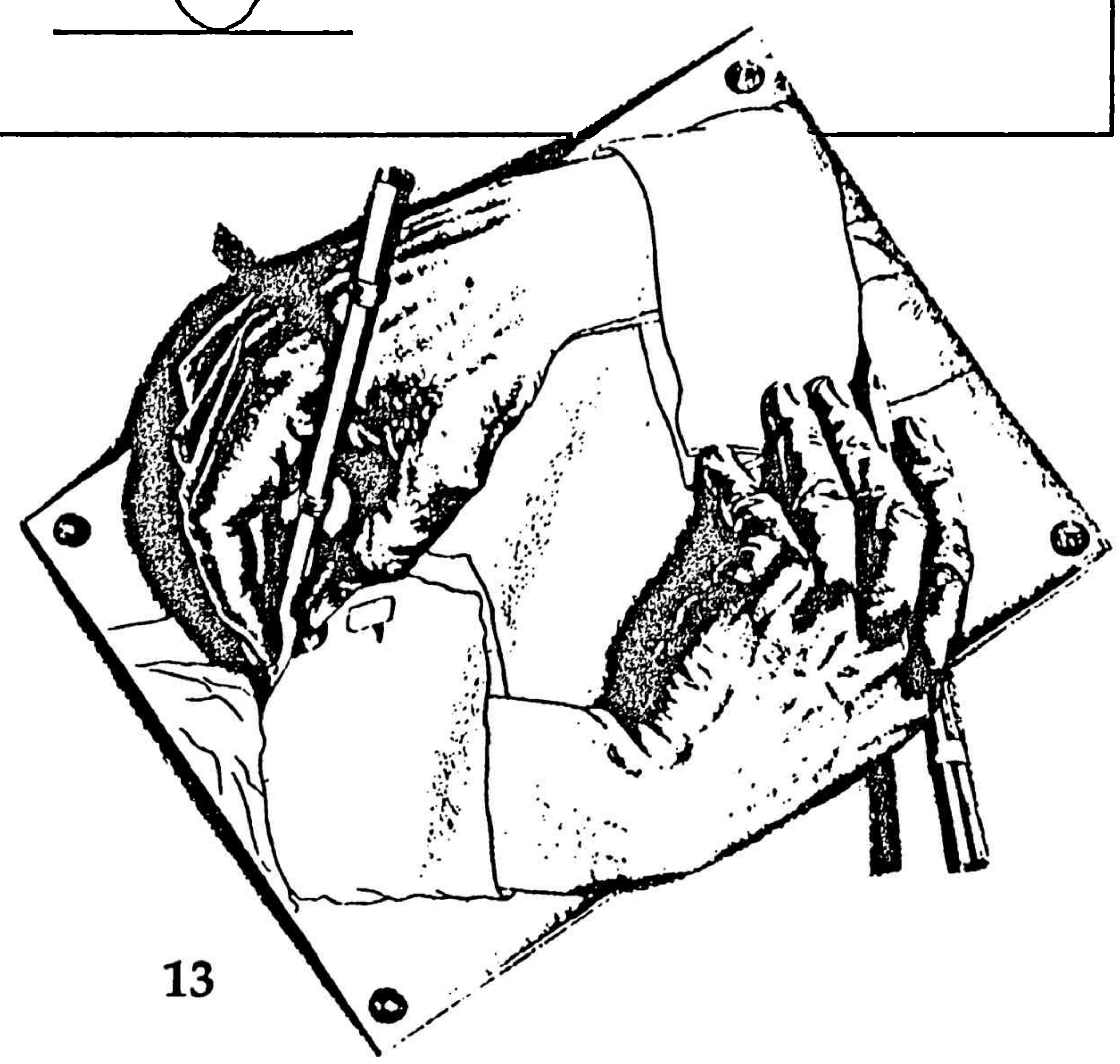


Expresando todo esto en términos del potencial E y afinando un poco más las zonas, la situación es la que muestra el cuadro 1. En los gráficos de la función potencial, no aparecen dibujados ni el eje horizontal X, ni el vertical E.

CUADRO 1

VALORES DE Y	GRAFICO DE E	CARACTERISTICAS DEL SISTEMA
En la Zona B, con $v = 0$, Zona B_2		Tres equilibrios, dos de ellos estables (mínima energía potencial) y uno inestable (máxima energía potencial). Mínimos equipotentes)
En la Zona B, con $v > 0$ Zona B_1		Tres equilibrios como en el caso anterior; pero el mínimo de la derechacon más energía en potencia y por lo tanto menos en acto que el de la izquierda.
En la Zona B, con $v < 0$, Zona B_3		Situación dual a la anterior.
En la Zona C, con $v = 0$ Zona C_2		Un único equilibrio estable.
En la Zona C, con $v > 0$, Zona C_1		Un equilibrio estable y una inflexión (equilibrio imperceptible) a la derecha del equilibrio estable

VALORES DE Y	GRAFICO DE E	CARACTERISTICAS DEL SISTEMA
En la Zona C, con $v < 0$, Zona C_3		Situación dual a la anterior
En la Zona A, con $v = 0$, ZonaA_2		Un único equilibrio estable.
En la ZonaA, con $v > 0$, ZonaA_1		Un equilibrio estable y una torción a la derecha
En la ZonaA, con $v < 0$, Zona A_3		Situación dual a la anterior.



Supongamos ahora que las influencias externas sobre el sistema $\mathcal{D}$, cambian con el tiempo siguiendo una trayectoría cíclica T como lo indica la Figura 2.

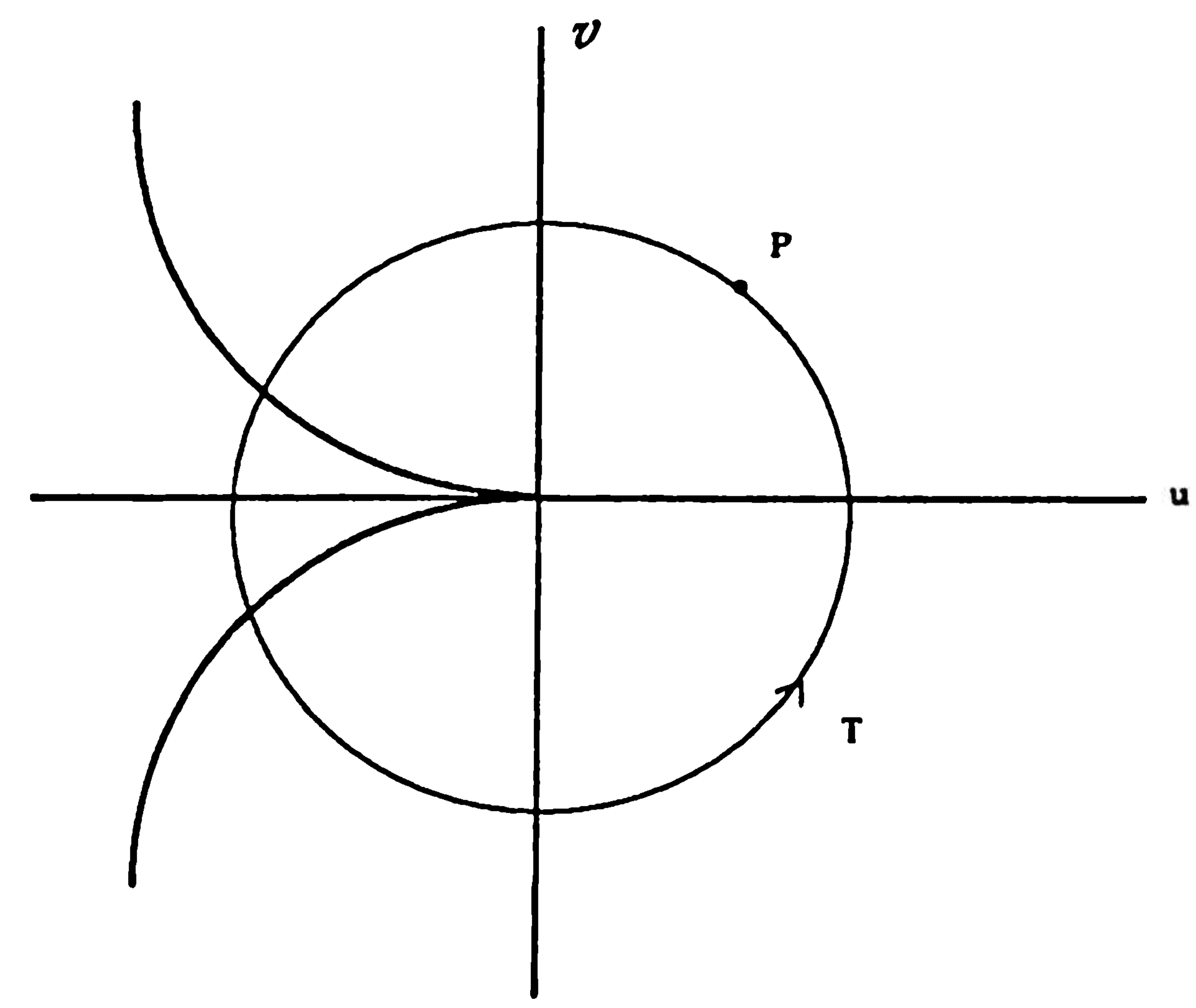


FIGURA 2

Partamos por ejemplo de P y hagamos, en aras a ilustrar posibles aplicaciones, una interpretación política de esta representación. El sistema $\mathcal{D}$, un régimen político en este momento, partiendo de P en dictadura de izquierda (el único punto crítico estable de E representa tal partido) y con necesidad de oposición o "afuera" (la pequeña torción de E a la derecha del equilibrio), evoluciona hacia la zona C_1 donde la torción se convierte en una inflexión, anunciando la aparición futura de la negación política, lo cual sucederá cuando se alcance la zona B_1, generándose entonces una bifuncación o catástrofe con la aparición de dos nuevos partidos, a saber, uno de centro (el equilibrio del sistema, representado por el máximo local de potencial E) y otro de derecha (el nuevo equilibrio estable) que al inicio, es menos fuerte, es decir, minoritario; pero, con más potencialidad. Seguidamente, la potencialidad del partido de derecha recién surgido, se vuelve menor y por lo tanto más activo, equilibrando al viejo partido de izquierda en B_2 para después en B_3 convertirse en mayoritario, alcanzando luego la zona C_3 en la cual, la izquierda se fusiona con el centro anunciando así su desaparición; hecho que se produce en A_3 donde el sistema, después de una nueva catástrofe que por lo demás es instantánea se convierte en una dictadura de derecha; pero, con la imperiosa necesidad de un partido opositor (la torción del potencial E queda ahora a la izquierda del equilibrio). En A_2, la torción izquierda desaparece y el sistema de dictadura de derecha, poco después se convierte sin sobresalto o catástrofe, nuevamente en dictadura de izquierda cuando llega a P en la zona A_1, en la cual ya, la torción a la izquierda pasó a la derecha. La trayectoria T que es estable, a saber, no se produce ningún cambio cualitativo si la cambiamos por otra cercana y es por lo tanto altamente realizable, puede recorrerse en sentido inverso, lo que nos daría entonces, dos modelos básicos de dialéctica cuspidal del tipo "externo retorno" y que se adaptan bien al manido y tradicional esquema "tesis-antítesis-síntesis". Otras dialécticas cuspidales se muestran en la figura 3. Las dialécticas T_2 y T_3 por ejemplo, también de eterno retorno, resultan muy interesantes porque se salen del esquema clásico. En la primera por ejemplo, no hay síntesis mientras en la segunda no existe ni la tesis ni la antítesis y esto último sucede también con T_5. T_1 es el modelo clásico exacto y aparece solamente como uno de los tantos posibles. Hay trayectorias inestables difícilmente realizables, tal es el caso de la representada por el eje v que con

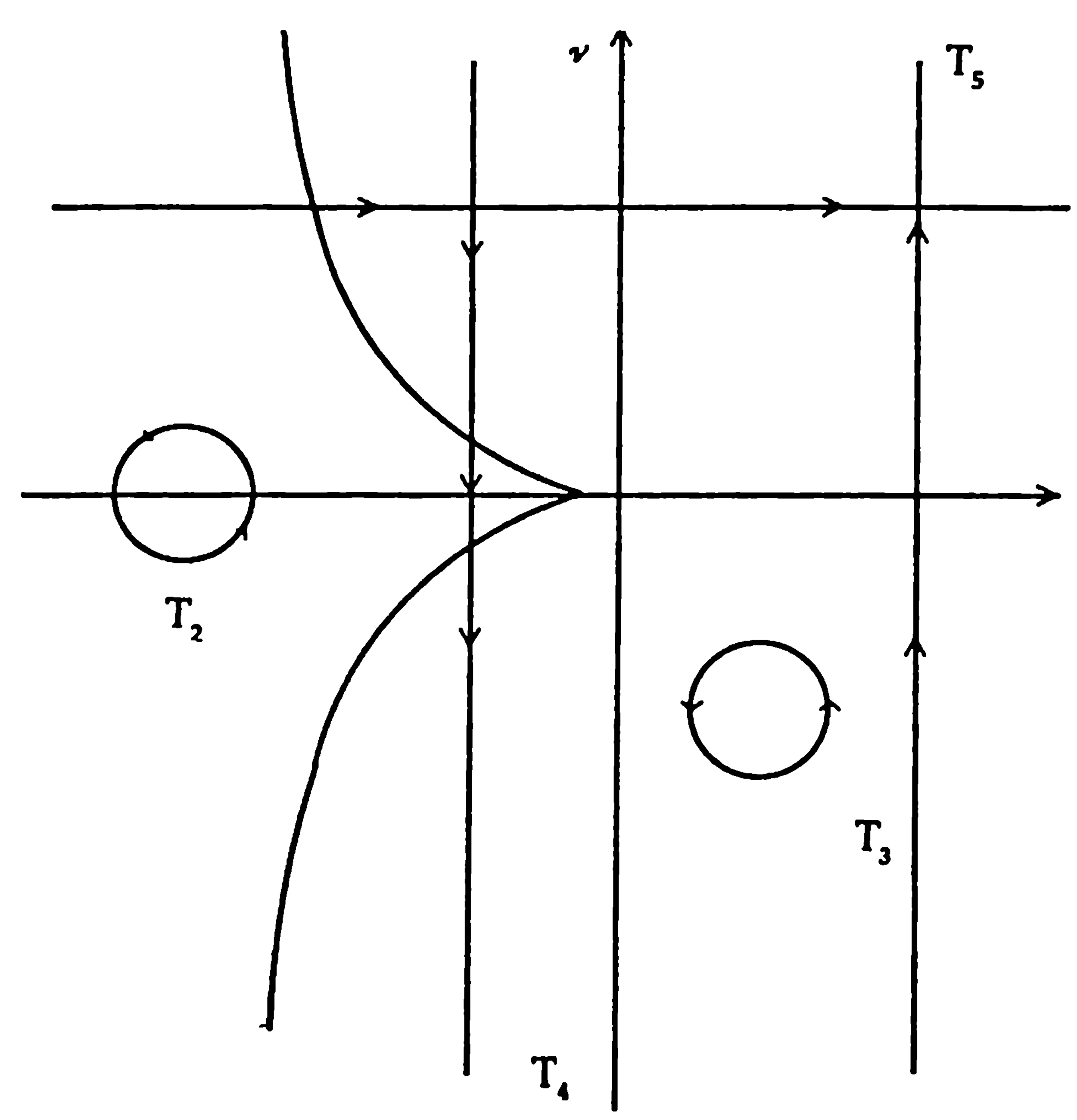


FIGURA 3

una pequeña perturbación se convierte en una del tipo T_5 o en una del tipo T_4. La trayectoria T_4 nos muestra la posibilidad de pasar establemente de una dictadura de izquierda a una de derecha (ó reciprocamente) recorriendo un período intermedio de democracia bipartidista (en realidad, hay tres partidos en pugna; pero, como en estas dialécticas los centros son equilibrios inestables, no se toman en cuenta).

Ahora bien, lo dicho hasta el momento en esta sección, en tan solo relativo a un ejemplo de representación potencial de sistemas dinámicos. Generalizando el modelo de la cúspide, podemos decir que un sistema dinámico $\mathcal{D}$ es (finitamente) potencial alrededor de un estado crítico o de equilibrio P, si puede representarse formalmente de la siguiente manera:

1— Sus estados internos con n-tuplas $(x_1, \ldots, x_n)$ del espacio $\mathcal{R}^n$ en una vecindad de cero que representa el estado P

2— Las influencias externas mediante m-tuplas $(u_1, \ldots, u_m)$ llamados parámetros, del espacio $\mathcal{R}^m$ en una vecindad V del origen

3— La energía potencial del sistema con una función diferenciable $E(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)$ definida en Ux Vy a valor real y

4— La ley del sistema acerca de P, mediante las ecuaciones:

$$\frac{\partial E}{\partial X_i} = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

las cuales determinan todos los puntos críticos de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{U}$ incluyendo P. En principio, n, m (números naturales, razón por la cual hablamos de sistemas finitamente potenciales) y E, pueden tomar valores completamente arbitrarios con lo cual, estaríamos ante una situación más bien desagradable pues no habría manera de abarcar completamente todas las posibilidades. Sin embargo, un descubrimiento de René Thom, otro de los teoremas fundamentales de la matemática contemporánea, nos dice lo siguiente: todo sistema potencial alrededor de un punto crítico P con cuatro o menos parámetros, puede representarse mediante alguna de las funciones potenciales que aparecen en el cuadro 2.

FUNCION POTENCIAL	NOMBRE
$x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1} - \ldots - x_n^2$ $n \geq 1, o \leq r \leq n$	FUNCIONES DE MORSE
$\frac{1}{3}x^3 + ux$	DOBLEZ O PLIEGUE
$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ux^2 + vx$	CUSPIDE
$\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}ux^3 + \frac{1}{2}vx^2 + wx$	COLA DE MILANO
$\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}tx^4 + \frac{1}{3}ux^3 + \frac{1}{2}vx^2 + wx$	MARIPOSA
$\frac{1}{3}x^3 - xy^2 + w(x^2 + y^2) - ux + vy$	OMBLIGO ELIPTICO
$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + wxy - ux - vy$	OMBLIGO HIPERBOREO
$\frac{1}{4}y^4 + x^2y + \frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}ty^2 - ux - vy$	OMBLIGO PARABOLICO

CUADRO 2

Tan importantè y formidable resultado, amerita ciertos comentarios, algunos de los cuales presentaremos a continuación, sin agotar todo lo que se puede decir.

A— Se habla en el teorema de cuatro o menos parámetros suponiendo que las influencias externas se dan espacio-temporalmente. Un resultado análogo fué demostrado por Cristopher Zeeman a quien se deben además numerosas aplicaciones, para cinco o menos parámetros.

B—Los casos del primer tipo, en el cual han desaparecido los parámetros, corresponden a aquellos sistemas estables (no se bifurcan) que permanecen en un único punto crítico. La naturaleza de este punto crítico depende de los valores de n y r.

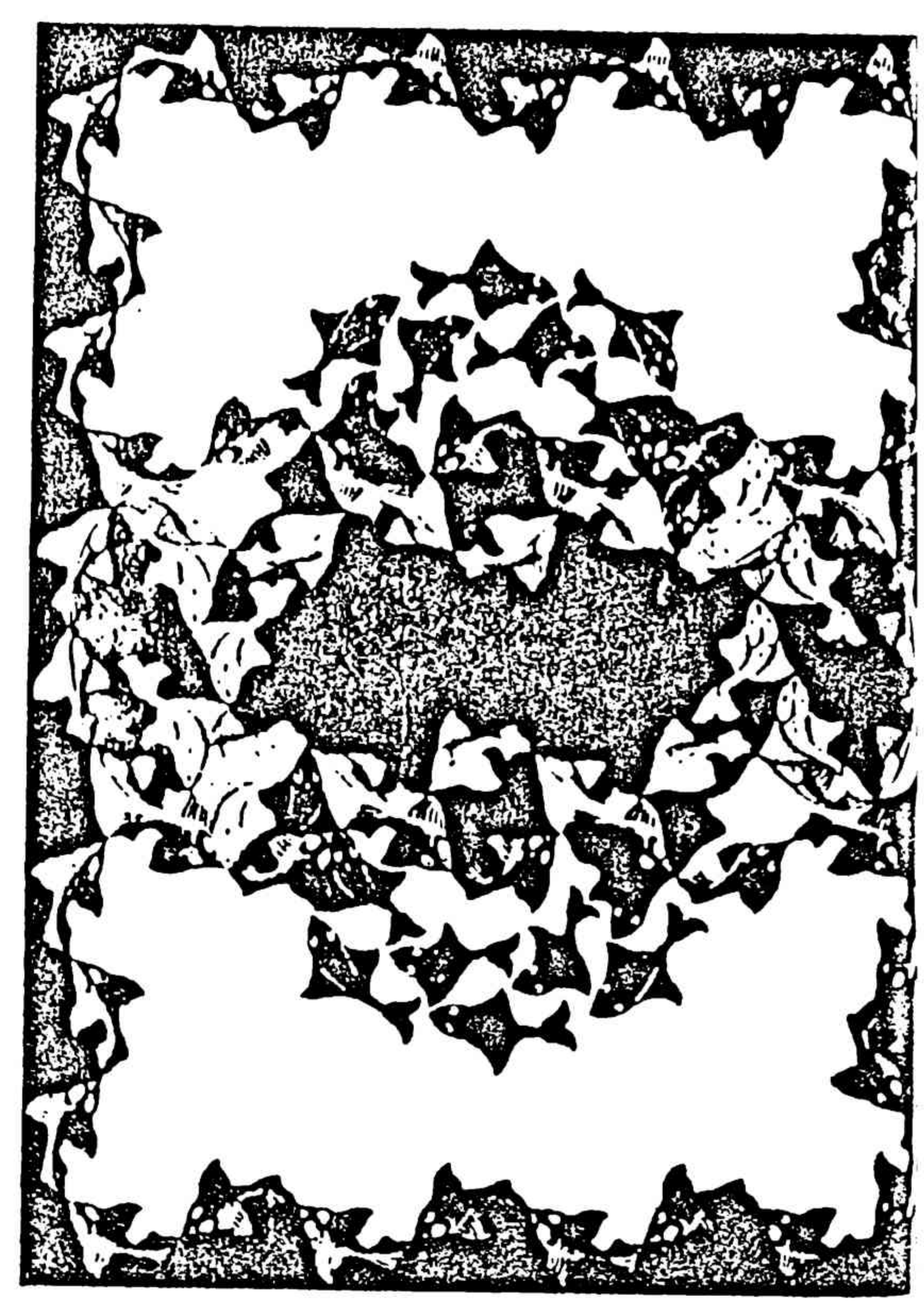
C— Los casos restantes llamados catástrofes elementales, utilizan a lo más dos variables internas. Esto nos muestra una interesante posibilidad para entender tan extraordinario fenómeno de poder representar linealmente ó llanamente: en un papel, un tablero, una pantalla, etc. Toda dinámica potencial que se bifurca, puede representarse utilizando a lo más dos variables internas.

Este hecho, es el que ha sido utilizado por la escuela de Bremen para formular una semántica icónica universal que por lo demás, había sido sugerida por Thom.

D— Más importante para nosotros en este ensayo, es lo relacionado con el hecho importante que nos muestra la mariposa, donde aparece el seis como máximo grado posible, lo que implica un tope superior para las dialécticas espacio - temporales de tipo catastrófico: tres antagónicos que se disputan el equilibrio de un sistema y que pueden fluir de más de una manera, dependiendo de cómo cambien los parámetros, hacia dos antagónicos para después sintetizarse. De esto se sigue ya un esquema más amplio que el tradicional:
tesis-tesis-tesis ⟶ tesis-antítesis ⟶ síntesis.
La mariposa, nos muestra además la posibilidad de una dialéctica tripartida que fluye eternamente sin sintetizarse y es análoga a la T_2 de la cúspide. Otras dialécticas se deducen de las restantes catástrofes y así la necesidad de romper con el esquema tradicional muy simple, es perfectamente nítida a la luz de esta teoría. De otro lado, algunas de estas catástrofes pueden invertirse como en el caso de la cúspide, originándose entonces nuevos tipos de dialécticas.

E— La teoría de las catástrofes y más generalmente la de la Bifurcación, son a su vez ejemplos para la dialéctica de tipo T_2 entre lo cualitativo y lo cuantitativo en la representación matemática. La cantidad no es lo único que se captura en la representación matemática y esta observación es muy importante sobre todo para algunos humanistas que sospechan demasiado de los formalismos, identificándolos exclusivamente con lo cuantitativo. En el relato de la presente sección, por ejemplo, se han presentado claro está algunos cálculos aunque básicamente, hemos adelantado desarrollos cualitativos como el de las dialécticas catastróficas.

F— Otra teoría que merece explorarse desde el punto de vista de la dialéctica, es la llamada Teoría del Caos estrechamente relacionada con la Teoría de Fractales, muy popular en nuestros días. En esta teoría se representan sistemas dinámicos en los cuales, los cambios de régimen (lo análogo al representado por la zona C en la catástrofe cúspidal), son "gruesos" en contraste con las bifurcaciones catastróficas que son "delgadas". Pongamos por caso, la zona C en el modelo de la cúspide (zona de bifurcación o de catástrofe o de cambio de régimen), es una línea en el plano y por ello "delgada" comparada con las zonas de estabilidad A y B (cada una de régimen diferente, la primera con un único equilibrio, la segunda con tres) que son bidimensionales, a saber, planas.



G—Sin pretender agotar la multitud de comentarios que se pueden hacer en torno a las dialécticas catastróficas, veamos una última observación. La consistencia mutua entre el azar y la necesidad en la representación nos la muestra esta teoría. En la teoría de Catástrofes, el azar y la necesidad aparecen integrados por la función potencial E en la cual, las variables internas $(x_1, \ldots, x_n)$ representan el fluir necesario del sistema, mientras los parámetros $(u_1, \ldots, u_m)$ capturan su comportamiento aleatorio. En efecto, si se fijan los parámetros, el sistema evoluciona siguiendo los requerimientos de la ley dada por las ecuaciones; pero, es perfectamente claro que los parámetros no están sometidos a ninguna legislación.

DEDUCCION E INDUCCION

La forma como se presenta esta dialéctica de tipo T_2 en la representación matemática, resulta muy interesante porque permite entre otras cosas, superar la opinión muy difundida y equivocada que tiende a señalar la ausencia del método inductivo en el trabajo matemático y encerrando éste último, exclusivamente en la deducción. La inducción aparece fundamentalmente de dos maneras, a saber, de una parte en el proceso de formación de las teorías matemáticas y de la otra, al interior de ellas mismas. El primer aspecto ha sido ampliamente explicitado y se conoce muy bien, aunque se olvida, desde la filosofía aristotélica; el segundo por el contrario, permanece dentro del dominio exclusivo de la comunidad matemática. Esto último se explica, porque en la representación matemática aparece la inducción invertida respecto a la manera como aparece en la representación lingüística y se entienden entonces como no relacionadas, cuando en realidad son dos variantes de la misma cosa. De hecho, en la representación matemática aparecen las dos formas de la induccción y en la lingüística sólo una. Centraremos la atención en este ensayo en mostrar cómo, la dialéctica entre deducción e inducción es de tipo T_2, recurriendo para ello a la representación conjuntista clásica, más exactamente a la Teoría de Conjuntos de Zermelo- Fraenkel que suponemos conocida. (Esta teoría no es más que la formalización de los conjuntos que todos conocemos).

Un sistema deductivo D, es una tripleta (X, A, O) en la cual X es un conjunto no vacío, A un subconjunto de X y O un conjunto no vacío de operaciones en X (no necesariamente de la misma aridad ni totalmente definidas). Los elementos de O reciben el nombre de "leyes de deducción" del sistema D y se representan geométricamente mediante esquemas de la forma.

$$\frac{x_1, \ldots, x_n}{x} \quad (0_1)$$

Donde $0_1 \in 0$, $(x_1, \ldots, x_n)$ pertenece al dominio de 0_1 y $x = 0_1 (x_1, \ldots, x_n)$. En lenguaje común esto último se suele expresar diciendo que x se deduce de las hipótesis $x_1, \ldots, x_n$ mediante la regla 0_1. Los elementos de A se llaman "axiomas" del sistema. Así las cosas, diremos que una secuencia finita $y_1, \ldots, y_m$ de elementos de X es una demostración, si cada y_i es o bien un axioma o sino, se deduce de elementos anteriores en la sucesión, mediante alguna de las leyes de deducción, diremos además que un teorema es un elemento cualquiera que aparezca como el último en una demostración. El conjunto T de todos los teoremas del sistema, entre los cuales están evidentemente los elementos de A, son los elementos de X que se demuestran en D; es lo que se demuestra en el sistema. A manera de ejemplo, si X es el conjunto de los números reales, A el conjunto cuyo único elemento es 0 y O el conjunto con la única operación

$$x \longrightarrow x+1$$

entonces, los números naturales son los teoremas.

De otra parte, un sistema inductivo $\mathcal{Y}$ es una tripla (X,B,P) donde X es un conjunto no vacío, B un subconjunto de X y P una propiedad (no introducimos la complejidad técnica de aclarar en qué lenguaje se escribe) que se refiere a los subconjuntos de X y satisface las siguientes condiciones :

1— Existe por lo menos un subconjunto de X que contiene a B y cumple la propiedad P

2— Si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de X que satisfacen la propiedad P, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ también cumple P. El subconjunto S, intersección de todos los subconjuntos de X que contienen a B y cumplen la propiedad P que evidentemente existe y cumple la propiedad P, es lo que se induce en el sistema $\mathcal{Y}$. Un ejemplo muy conocido aparece si tomamos X un espacio topológico, P la propiedad "Y es cerrado" y si B es un subconjunto cualquiera, entonces lo que se induce es la adherencia de B es decir, el menor subconjunto cerrado que contiene a B. En la representación lingüistica, las condiciones para P aparecen invertidas como lo mencionamos previamente:

1— Existe por lo menos un subconjunto contenido en A que cumple la propiedad P

2— Si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de X que cumple la propiedad P, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ satisface también la propiedad P. Invirtiendo el ejemplo del espacio topológico, lo que se induce es el interior de un conjunto (el mayor abierto contenido) porque la propiedad sería ahora: "Y es abierto". (clásicamente, las dos versiones de la inducción son equivalentes pero no intuicionísticamente). Muchos de los casos del lenguaje común se corresponde con la versión "el mayor subconjunto..." de la inducción. El ejemplo clásico de los cisnes blancos puede formularse de la siguiente manera X el conjunto de los animales, A el conjunto de las aves y P la propiedad "B es un conjunto de cisnes blancos" y entonces, dentro de A se induce el mayor conjunto posible de cisnes blancos.

Comparando los sistemas deductivos con los inductivos, tendremos los siguientes resultados:

1— Todo lo que se deduce se induce. En efecto, si (X, A, O) es un sistema deductivo ($\mathcal{D}$) cualquiera, podemos construir un sistema inductivo $\mathcal{Y}$= (X, A, P) en el cual lo que se induce es lo que se deduce en $\mathcal{D}$. Basta tomar P como la propiedad; P(B) ■ "B es cerrado para las operaciones en O", lo cual significa que si $0 \in O$ es una regla de ducción de aridad n y $x_1, \dots, x_n$ son elementos de B para los cuales $(x_1, \dots, x_n)$ pertenece al dominio de o, entonces $o(x_1, \dots, x_n) \in B$.

2— Hay cosas que se inducen pero no se deducen. Los números reales por ejemplo, no se pueden deducir de los números racionales pero sí inducir, tomando la propiedad "B es cerrado para la topología usal de R". De otra parte, las inducciones del tipo el mayor son difíciles de expresar deductivamente y con muchas de ellas no es posible. Vemos entonces cómo la representación inductiva es más fuerte que la deductiva aunque claró, todo ello expresado dentro de una representación deductiva como lo es la Teoría de Conjuntos de Zermelo - Fraenkel que por otro lado, es "la menor" entre todas las que contienen la aritmética.

CONCLUSION

Esperamos que el "aura" de la relación entre dialéctica y matemáticas haya quedado sugerida por los tres ejemplos que hemos presentado. Son muchos los casos que se pueden escoger para mostrar las maneras de representar formalmente la dialéctica, consiguiendo así, nuevas determinaciones para este método que adquiere entonces proyecciones no previstas. Podríamos tomar por ejemplo, como otro de los temas, las investigaciones muy recientes y que mencionamos anteriormente, sobre la posibilidad de una tercera lógica.

Estos trabajos, liderados principalmente por lógicos latinoamericanos, pretender establecer una nueva lógica llamada desde ya Para-consistente ó dialéctica, cambiando el concepto de consistencia para permitir contradicciones de la forma "p y no p", lo que nos llevaría a una dialéctica tripartita del tipo mariposa en la representación matemática básica, muy similar a la que se da en la geometría elemental: una sola paralela, ninguna paralela, más de una paralela. Tres personas diferentes un solo ser verdadero y fluyendo eternamente de un lado para alguno de los otros dos. Tres lógicas distintas mariposeando: ninguna de ellas da cuenta de sí misma; pero, cada una explicando a las otras dos. Tal el futuro de la representación matemática, como lo indican los esfuerzos que se vienen realizando y lo sugiere la Teoría de Catástrofes