Jorge Alberto Naranjo Mesa

La carrera de Aquiles y la tortuga

Aristóteles, en el libro VI de su *Física*, enuncia así el argumento en contra del movimiento producido por Zenón de Elea y que se conoce como el "Aquiles": "...el más lento en la carrera no puede ser alcanzado por el más rápido, ya que el perseguidor debe necesariamente alcanzar el punto desde donde partió el perseguido, de tal suerte que el más lento debe siempre conservar cierta ventaja".

Esta famosa "paradoja de Zenón", también conocida como la "carrera de Aquiles y la tortuga" fue uno de los problemas clave del pensamiento griego, uno de esos enigmas mentales que los obligaron a reflexionar hondamente sobre los problemas de "paso al límite" y sobre el "método de exhaución".

En lo que sigue deconstruimos el problema, y lo reconstruimos por vía cinemática y geométrica. Hecho esto, intentamos entender dónde está el secreto de la paradoja.

La solución galileana

Probemos que se dará el encuentro entre el perseguidor y el perseguido. Reformulemos el problema; imaginemos una pista recta, y que Aquiles, quien corre más rápido que una tortuga, sale a perseguir una que inicialmente está a cierta distancia de él, y que corre

THE RACE BETWEEN ACHILLES AND THE TORTOISE

Achilles and the tortoise have been running their endless race for 2500 years. Achilles runs to where the tortoise was and there is always an empty space between his goal and his object. A geometric progression of infinite terms gives the appearance of an infinite space.

LA COURSE D' ACHILLE ET LA TORTUE

Achille et la tortue mènent 2500 ans dans une course interminable. Achille court vers là où se trouvait la tortue et il existe toujours un espace entre l'arrivée et son objet. Une progresión géométrique de termes infinis qui donne l'impression d'un espace infini.

LA CARRERA DE AQUILES Y LA TORTUGA

Aquiles y la tortuga llevan 2500 años en su carrera interminable. Aquiles corre hacia donde la tortuga estuvo y siempre hay un espacio entre su meta y su objeto. Una progresión geométrica de infinitos términos que aparenta dar un espacio infinito.

también a lo largo de la pista. ¿Cuándo alcanza Aquiles a la tortuga?

Asumiremos (lo cual no es estrictamente necesario) que Aquiles y la tortuga se mueven con movimiento rectilíneo uniforme, y que inicialmente los separa una distancia a. La velocidad v_T de la tortuga es una fracción r de la velocidad de Aquiles, v_A. Como Aquiles es más veloz, $r < 1$. Sean x_A y x_T las posiciones respectivas ocupadas por ambos en un mismo tiempo t, medidas desde la posición inicial de Aquiles.

Según la cinemática de ese movimiento uniforme, $x_A = v_A.t$, $x_T = a + v_T.t$ con $r.v_A = v_T$, y se encontrarán cuando $x_A = x_T$ en un mismo tiempo, t_e, de encuentro. Es decir, si la ecuación $x_A = v_A.t_e = a + v_T.t_e = x_T$ tiene solución para t_e. Es fácil ver que:

$$v_A.t_e = a + v_T.t_e = a + r.v_A.t_e$$

$$v_A.(1-r)t_e = a$$

y que t_e, el tiempo de encuentro, es

$$t_e = \frac{1}{v_A}\frac{a}{(1-r)}$$

y que el punto de encuentro, $x_A = x_T$ es $x_e = a/(1-r)$.

Si por ejemplo $a = 100$ metros, la velocidad de la tortuga es 1 metro por segundo y la de Aquiles es 10 veces mayor, se encontrarán al cabo de

$$t_e = \frac{1}{10}\frac{100}{(1-0.1)} = 11.1111....\text{segundos},$$

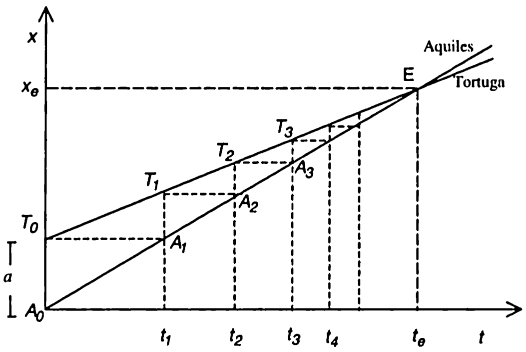
en la posición

$$x_e = \frac{100}{1-0.1} = 111.1111.......\text{ metros},$$

contada desde el punto de partida de Aquiles. A la luz de la cinemática que conocemos no hay paradoja, porque la inferencia de Zenón concluye en decir que no hay un encuentro, y hemos "probado" que sí lo hay. "Debe haber un sofisma". Bien, ¿pero dónde está? La solución que hallamos no resuelve la paradoja; la toma por asalto, rodea el argumento y se precipita en la conclusión. Se parece a la manera como rebate Diógenes el Cínico.

El argumento eleático

Intentemos seguir el argumento de Zenón, y el acabado de desarrollar, en una gráfica que represente la evolución espacio-temporal de la carrera. En las abscisas pongamos los tiempos, y en las ordenadas las distancias recorridas. Según la solución cinemática, Aquiles viaja por la recta A_0E en el espacio-tiempo, y la tortuga por la recta T_0E. La pendiente de cada recta nos dará la velocidad de cada corredor: $\overline{t_1A_1} / t_1 = v_A$, $\overline{A_1T_1} / t_1 = v_T$. Y coinciden en E. De ahí en adelante Aquiles irá cada vez más lejos de la tortuga. Pero veamos cómo describe la carrera el enunciado original:



"Aquiles parte de A_0 hacia donde está la tortuga, T_0. Pero correr se toma tiempo, y cuando alcanza la posición espacial perseguida, ha pasado un tiempo (t_1 en la gráfica) y Aquiles no se encuentra en el punto $x = a$, $t = 0$ al que apuntaba, sino en el punto A_1, con coordenadas $x = a$, $t = t_1$. Y La tortuga se movió entre tanto, y ahora está en el punto T_1 con coordenadas: $x = a + \overline{T_1A_1}$, $t = t_1$. Es como volver al principio: ahora Aquiles parte de A_1 hacia T_1, y cuando alcanza la posición espacial de T_1 ya no es el tiempo t_1, sino t_2 y no alcanza T_1 sino un punto A_2. Entre tanto la tortuga se habrá movido a T_2, y así siempre... Y como siempre es así, no se encuentran, a pesar de que A_1, A_2, A_3, ... están siempre sobre la línea A_0E antes descrita, y de que los T_1, T_2, T_3 estén sobre la T_0E". ¿Dónde estará el sofisma?

En el tramo 1, los espacios recorridos por la tortuga y Aquiles son:

$$x_{T(1)} = \overline{t_1T_1} = a + v_Tt_1$$

$$x_{A(1)} = \overline{t_1A_1} = \overline{A_0T_0} = v_At_1$$

$$\therefore t_1 = a / v_A$$

$$A_1T_1 = v_Tt_1 = a\frac{v_T}{v_A} = a.r$$

La progresión geométrica de la carrera

Demostramos que $\overline{A_1T_1} = a.r$. Con el mismo argumento en forma reiterada se prueba fácil que $\overline{A_2T_2} = a.r^2$, $\overline{A_3T_3} = a.r^3$, y en general, que:

$$\overline{A_{n-1}T_{n-1}} = a.r^{n-1}$$

para el enésimo tramo recorrido por Aquiles según el enunciado de Zenón. Claramente la suma de los n tramos,

$$\overline{A_0T_0} + \overline{A_1T_1} + \overline{A_2T_2} + \dots\dots + \overline{A_nT_n} = \overline{t_nA_n}$$

nos dará la posición de Aquiles respecto del punto de partida al final del tramo n. Esa posición la llamaremos $x_A(n)$.

$$x_A(n) = a + a.r + a.r^2 + a.r^3 + \dots.. + a.r^{n-1} \quad (1)$$

Tenemos una progresión geométrica de razón r, y primer término igual a a. Multiplicando a (1) por r se obtiene

$$r.x_A(n) = a.r + a.r^2 + a.r^3 + \dots. + a.r^n \quad (2)$$

Si de (1) restamos (2), resulta

$$x_A(n) - r.x_A(n) = (1-r).x_A(n) = a - a.r^n$$

es decir,

$$x_A(n) = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad (3)$$

La tortuga, en el primer tramo, recorre $\overline{A_1T_1}$, en el segundo $\overline{A_2T_2}$, en el enésimo $\overline{A_nT_n}$. Por tanto, respecto del origen de coordenadas, en el intervalo n alcanza una posición:

$$x_T(n) = a + A_1T_1 + A_2T_2 + \dots\dots + A_nT_n$$

$$x_T(n) = a + a.r + a\,r^2 + a\,r^3 + \dots.. + a\,r^{n-1} + a\,r^n \quad (4)$$

Tenemos la anterior progresión geométrica, con un término adicional, $a.r^n$, que mide la distancia espacial entre la tortuga y Aquiles al final del enésimo intervalo.

Si multiplicamos (4) por r, resulta

$$r.x_T(n) = a.r + a.r^2 + a.r^3 + \dots.. + a.r^n + a.r^{n+1} \quad (5)$$

y restando de (4) la (5), y despejando $x_T(n)$,

$$x_T(n) = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} \quad (6)$$

Pero ya vimos que son infinitos tramos. Hagamos pues que n tienda a infinito en (3) y (6). Resulta:

$$x_T(\infty) = \frac{a}{1-r} = x_A(\infty) = x_e \quad (7)$$

pues r^{n+1} y r^n tienden a cero para $n \to \infty$ si r, como es nuestra hipótesis, es menor que la unidad. Por tanto al final del proceso, Aquiles y la tortuga se encuentran, aun si el movimiento se sigue a la manera del enunciado de Zenón de Elea.

Busquemos el tiempo de encuentro. Notaremos que:

$$v_A = \frac{\overline{t_1A_1}}{t_1} = \frac{\overline{t_2A_2}}{t_2} = \dots\dots\dots = \frac{\overline{t_nA_n}}{t_n}$$

por lo que

$$t_n = \frac{\overline{t_nA_n}}{v_n}$$

Pero t_nA_n es $X_A(n)$; por consiguiente:

$$t_n = \frac{a}{v_A} \cdot \frac{(1-r^n)}{1-r}$$

y si $n \to \infty$ medirá el tiempo total para el encuentro,

$$t_{n\to\infty} = t_e = \frac{a}{v_A(1-r)} \quad (8)$$

Como se ve, t_e resulta un tiempo finito, no infinito, a pesar de que suma infinitos intervalos de tiempo... Y x_e es una distancia finita, a pesar de que suma infinitos intervalos de espacio.

Extravagancia aquilínea

Las dos soluciones producen el mismo resultado, pero la segunda nos deja entrever la clave del "sofisma" de Zenón.

Consideremos el caso $a = 100$, $v_A = 10$, $v_T = 1$, $r = 0.1$. En la gráfica resultará:

$T_0A_0 =$	$100\ m$	$t_1 =$	$10\ s$
$T_1A_1 =$	$10\ m$	$t_2 - t_1 =$	$1\ s$
$T_2A_2 =$	$1\ m$	$t_3 - t_2 =$	$0.1\ s$
$T_3A_3 =$	$0.1\ m$	$t_4 - t_3 =$	$0.01\ s$
$T_4A_4 =$	$0.01\ m$	$t_5 - t_4 =$	$0.001\ s$
$T_5A_5 =$	$0.001\ m$	$t_6 - t_5 =$	$0.0001\ s$

Y se ve cómo la suma de las columnas aunque son infinitos términos no produce un solo resultado infinito. Los términos son decrecientes, y la suma converge. Las respuestas serán:

$$x_e = T_0A_0 + T_1A_1 + T_2A_2 + \dots\dots + T_nA_n = 111.1111\dots m$$

$$t_e = t_1 + (t_2 - t_1) + (t_3 - t_2) + \dots\dots + (t_{n+1} - t_n) = 11.1111\dots s$$

La fuerza de la paradoja radica en la forma de plantear el movimiento, como sucesión de infinitos tramos. No toda suma de infinitos términos da un infinito, pero tendemos a creer que sí.

Por lo demás, es cierto que hay algo "extravagante" en el modo de correr Aquiles según Zenón. Pues Aquiles no corre hacia donde la tortuga está, sino hacia donde estuvo. Aquiles corre hacia el pasado. Va hacia el punto $T_0(0, a)$ y cae al $A_1(t_1, a)$, y desde allí, "corrige" el rumbo y corre hacia $T_1(t_1, a + a.r)$, pero cae al punto $A_2(t_2, a + a.r)$, etc... Corre hacia el pasado, pero es un pasado cada vez más cercano al presente que recorre. Aquiles, al mismo tiempo, se encuentra con la tortuga y con el sentido de su extraña deriva por el espacio-tiempo de la persecución a la tortuga.

Conclusión

Se comprenderá que para los griegos -quienes no contaban con la cinemática galileana para resolver el problema lógico planteado por Zenón de Elea- la solución del mismo no era evidente. La paradoja de Zenón, al decir de un filósofo, fue un dardo de Apolo, un desafío al pensamiento griego, una invitación que el dios de las matemáticas hacía a los griegos para que estudiaran los problemas de límites, exhauciones, razones y proporciones. Zenón de Elea era un dialéctico prodigioso, y sus objeciones a la noción de movimiento instantáneo, de espacios y tiempos divisibles hasta el infinito, etc., tuvieron un gran significado en el pensamiento griego posterior. Aun hoy estudiar el "Aquiles" sigue siendo una cuestión muy instructiva que debería hacer parte de todo análisis del movimiento uniforme en línea recta en los cursos de física básica. Michel Serres, Gilles Deleuze, Bertrand Rusell, Lewis Carroll, entre otros, han dedicado a esa carrera estudios muy hondos.

Serres, por ejemplo, propone considerar la carrera como un proceso estocástico. Notemos que las escalinatas A_0T_0, A_1T_1, A_2T_2, A_3T_3, A_4T_4....... se reproducen cada vez con la escala reducida

$$\frac{A_nT_n}{A_{n-1}T_{n-1}} = r$$

para $n = 1, 2, 3, ... \infty$. Y la misma proporción se da entre líneas horizontales sucesivas, es decir entre los intervalos de tiempo $T_nA_{n+1} / T_{n-1}A_n = r$. El problema de Zenón tiene la misma estructura en cada escalón. Es como si Aquiles corriera por un espacio tiempo fractal... Y si pensamos que para valores grandes de n el recorrido espacio temporal es minúsculo, "infinitesimal", también se alcanzará un momento a partir del cual, por medición directa, no se podrá discernir exactamente si hubo movimiento o no, si Aquiles está aquí o allí, ahora o antes. Sólo se podrá pensar en una especie de caminata browniana de Aquiles por el espacio tiempo de la persecución. Encontrarse a la tortuga será, pues, en vecindades del vértice del encuentro, *E*, una contingencia...

Deleuze, por su parte, desarrolla (en *Lógica del sentido*) una serie de pensamientos acerca de la paradoja, para mostrar, siguiendo a Lewis Carroll, que en rigor para que Aquiles alcance a la tortuga se necesita una cadena infinita de eslabones lógicos. Y no hablamos de los infinitos pensamientos, los infinitos cálculos, las infinitas medidas, los infinitos puntos de vista durante su carrera de *111,111..* metros, durante esos *11,1111...* segundos. Esa carrera no terminará nunca; siempre nos hundirá en un vértigo de pensamientos...π