



Área óptima para zapatas combinadas en forma de T asumiendo que el área en contacto con el suelo trabaja parcialmente en compresión

Arnulfo Luévanos-Rojas, Blanca Lucia Estrada-Mendoza & Mónico Juárez-Ramírez

Instituto de Investigaciones Multidisciplinaria, Universidad Autónoma de Coahuila, Torreón, Coahuila, México. arnulfol_2007@hotmail.com, b_estrada@uadec.edu.mx, juarezm57@yahoo.com

Recibido: 5 mayo 2012. Recibido en formato revisado: 4 septiembre 2024. Aceptado: 4 septiembre 2025.

Resumen

Este estudio muestra un modelo óptimo para determinar la superficie mínima en contacto con el suelo para zapatas combinadas en forma de T, tomando en cuenta que la superficie está parcialmente comprimida, es decir, una parte de la superficie debajo de la zapata en contacto con el suelo está a compresión y la otra parte la presión es cero (presión lineal sobre el suelo). Hay trabajos que muestran la superficie mínima para zapatas combinadas en forma de T, pero la superficie bajo la zapata en contacto con el suelo trabaja completamente a compresión. El modelo se desarrolla por integración y/o por las propiedades geométricas de una pirámide de base triangular para obtener las ecuaciones de la fuerza resultante y los dos momentos (ejes X e Y) para los quince casos de flexión biaxial y tres casos para flexión uniaxial (M_{y1} y M_{y2} son iguales a cero). Se presentan tres ejemplos numéricos con los mismos datos: El ejemplo 1 es para diferentes momentos; El ejemplo 2 es para momentos M_{x1} y M_{x2} iguales a cero; El ejemplo 3 es para momentos M_{y1} y M_{y2} iguales a cero. Además, se realiza una comparación con el modelo actual (área trabaja completamente bajo compresión) y el nuevo modelo (área trabaja parcialmente bajo compresión). Los resultados muestran que se puede lograr un ahorro de hasta un 31.40 % en el área de contacto con el suelo. De esta manera, el modelo de superficie mínima será de gran ayuda para los especialistas en ingeniería de cimentaciones.

Palabras clave: área óptima; zapatas combinadas en forma de T; superficie mínima; superficie está parcialmente comprimida.

Optimal area for T-shaped combined footing assuming that the contact area with the soil works partially in compression

Abstract

This study shows an optimal model to determine the minimum contact surface with the soil for T-shaped combined footings, assuming that the surface is partially compressed, this is, a part of the surface under the footing in contact with the soil is compressed and the other part the pressure is zero (linear pressure on the soil). There are works that show the minimum surface for T-shaped combined footings, but the surface beneath the footing in contact with the soil is fully compressed. The model is developed by integration and/or by the geometric properties of a pyramid with a triangular-based to obtain the equations of the resultant force and the two moments (X and Y axes) for the fifteen cases of biaxial bending and three cases for uniaxial bending (M_{y1} and M_{y2} are equals to zero). Three numerical examples are presented with the same data: Example 1 for different moments; Example 2 for moments M_{x1} and M_{x2} equals to zero; Example 3 for moments M_{y1} and M_{y2} equals to zero. Also, a comparison is made with the current model (area is fully compressed) and the new model (area is partially compressed). The results show that savings of up to 31.40% can be achieved in the area of contact with the soil. In this way, the minimum surface model will be of great help to foundation engineering specialists.

Keywords: optimal area; T-shaped combined footings; minimum surface; surface is partially compressed.

1 Introducción

La presión del suelo bajo una zapata se ve influenciada por diversos factores, como el tipo de suelo, la rigidez del suelo y de la zapata, y la profundidad de la cimentación. La

distribución de la presión depende de estos factores, y es fundamental considerarlos en el diseño y la construcción de las zapatas para garantizar su estabilidad y seguridad.

La Fig. 1 muestra la distribución de la presión del suelo bajo la superficie de contacto de una zapata, según el tipo de

How to cite: Luévanos-Rojas, A., Estrada-Mendoza, B.L., y Juárez-Ramírez, M., (2025). Área óptima para zapatas combinadas en forma de T asumiendo que el área en contacto con el suelo trabaja parcialmente en compresión. BOLETÍN DE CIENCIAS DE LA TIERRA. 58, pp. 51-71. DOI:<https://doi.org/10.15446/rbct.n58.120221>

suelo para una zapata rígida. La Fig. 1(a) presenta una zapata rígida sobre suelo arenoso. La Fig. 1(b) muestra una zapata rígida sobre suelo arcilloso. La Fig. 1(c) presenta la distribución uniforme utilizada en el diseño actual [1].

La industria de la construcción tiene una amplia variedad de usos para las zapatas combinadas; sin embargo, estas son algunas de las situaciones en las que se utilizan a menudo las zapatas combinadas en la industria de la construcción:

1. Cuando se construye una columna junto al límite de la propiedad, pero la zapata no se puede extender por delante de este.
2. Cuando dos zapatas tienden a traslaparse, y en este caso se utiliza la zapata combinada.
3. Cuando el peso de la edificación debe distribuirse uniformemente sobre el terreno.
4. Cuando la capacidad portante del terreno es baja y el área necesaria es mayor que la de cada zapata se puede utilizar una zapata combinada.

Los tipos más comunes de zapatas combinadas son: rectangulares, trapezoidales, de correa, en L y en T. Las zapatas rectangulares se utilizan cuando las cargas de las columnas son iguales. Las zapatas de correa son dos zapatas aisladas unidas por una viga de concreto. Las zapatas trapezoidales o en T se utilizan cuando la carga en una columna es mucho mayor que en la otra. Las zapatas en L se utilizan para zapatas en esquina.

El modelo propuesto considera que la distribución de la presión sobre el suelo es lineal para zapatas combinadas en forma de T sometidas a flexión biaxial en cada columna.

Los estudios de capacidad de carga mediante métodos analíticos y/o experimentales para diferentes tipos de cimentaciones han sido investigados por varios autores, tales como: Shahin and Cheung [2], Dixit and Patil [3], Erzin and Gul [4], Colmenares *et al.* [5], Cure *et al.* [6], Fattah *et al.* [7], Uncuoğlu [8], Anil *et al.* [9], Khatri *et al.* [10], Mohebkhah [11], Zhang [12], Turedi *et al.* [13], Gnananandarao [14], Gör [15]. El valor de la capacidad de carga última podría ser significativamente diferente dependiendo del método de equilibrio límite utilizado.

Las investigaciones más importantes sobre zapatas aisladas rectangulares para el manejo eficiente de problemas de interacción suelo-zapata se han llevado a cabo mediante el uso de métodos analíticos por Chaabani *et al.* [16], Vitone and Valsangkar [17], Michalowski [18], Özmen [19], Aydogdu [20], Girgin [21], Al-Gahtani and Adekunle [22],

Rawat *et al.* [23], López-Machado *et al.* [24], Lezgy-Nazargah *et al.* [25], para gráficos o ayudas de diseño como Teng [26], Highter and Anders [27], Galvis and Smith-Pardo [28], y para métodos analíticos y gráficos o ayudas de diseño por Rodriguez-Gutierrez and Aristizabal-Ochoa [29, 30]. Estos documentos se desarrollan para obtener la capacidad de carga axial y el momento biaxial de la zapata, o la distribución de presiones en el área de contacto de una zapata aislada rectangular rígida apoyada sobre el suelo, y las dimensiones de la zapata se obtienen mediante un procedimiento iterativo.

Las contribuciones más importantes en los estudios de zapatas combinadas han sido desarrolladas por varios investigadores, tales como: Para zapatas rectangulares por Maheshwari y Khatri [31], Konapure y Vivek [32], Vivek *et al.* [33], Reddy y Kumar [34], Kashani *et al.* [35]; Para zapatas trapezoidales por Al-Douri [36], Luévanos-Rojas *et al.* [37]; Zapatas en forma de T por Luévanos-Rojas *et al.* [38, 39], Moreno-Landeros *et al.* [40]; Para zapatas de esquina por Aishwarya y Balaji [41], Moreno-Hernández *et al.* [42]; Para zapatas de correa por Luévanos-Rojas *et al.* [43]. Estas investigaciones toman en cuenta que el área en contacto con el suelo trabaja completamente a compresión. Estos trabajos se desarrollan por diferentes métodos para diseños completos.

La capacidad portante ha sido investigada para zapatas aisladas sometidas a flexión biaxial, que toman en cuenta una distribución lineal de la presión del suelo y el área de contacto con el suelo trabajando parcialmente bajo compresión [19-23,25,28]. El área óptima para zapatas combinadas rectangulares asumiendo que la superficie de contacto con el suelo trabaja parcialmente en compresión ha sido investigada recientemente por Montes-Paramo *et al.* [44].

Las justificaciones de este trabajo son: 1) Algunos diseños se han desarrollado por el método de ensayo y error para determinar las dimensiones de las zapatas. 2) Otros autores muestran la superficie mínima para zapatas combinadas en forma de T, pero la superficie debajo de la zapata en contacto con el suelo está completamente comprimida. 3) Varios investigadores han desarrollado algoritmos para diferentes tipos de zapatas que están comprimidas parcialmente para determinar la capacidad portante del suelo, pero no para zapatas combinadas en forma de T.

Los artículos más relacionados al tema de zapatas combinadas en forma de T son: Luévanos-Rojas *et al.* [38] aportaron un modelo analítico para obtener las dimensiones de zapatas combinadas en forma de T en contacto con el suelo. Luévanos-Rojas *et al.* [39] desarrollaron un modelo matemático de diseño para determinar el espesor y el acero de refuerzo para zapatas combinadas en forma de T. Moreno-Landeros *et al.* [40] propusieron un diseño de costo óptimo para zapatas combinadas en forma de T de concreto armado. Todos estos trabajos se desarrollan bajo el criterio de que el área en contacto con el suelo de la zapata trabaja totalmente en compresión.

Así, la revisión de los estudios previos muestra que no existen trabajos con el nivel actual de conocimiento sobre el área mínima de zapatas combinadas en forma de T, considerando que el área está parcialmente comprimida.

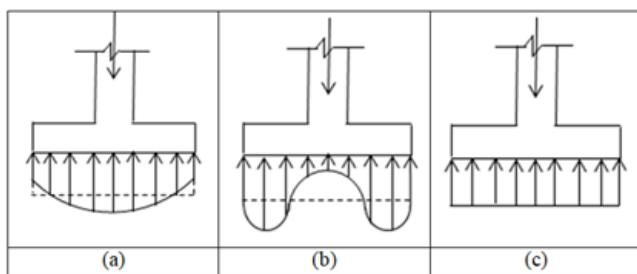


Figura 1. Distribución de la presión del suelo debajo de una zapata.

Fuente: Montes-Paramo *et al.*, 2023.

En este trabajo se muestra un modelo analítico para obtener el área mínima para zapatas combinadas en forma de T asumiendo que la zona en contacto con el suelo está parcialmente comprimida, es decir, una parte del área de contacto de la zapata está sometida a compresión y la otra parte sin presión (presión cero). Este artículo muestra los quince casos posibles de zapatas sometidas a flexión biaxial (caso I, asume que toda la superficie inferior de la zapata trabaja esta comprimida, y los casos II a XV, asumen que toda la superficie inferior de la zapata está parcialmente comprimida, lo cual constituye la principal contribución de esta investigación) y tres casos especiales de flexión uniaxial (M_{y1} y M_{y2} son iguales a cero). La fuerza resultante R y los momentos ortogonales en los ejes X e Y se obtienen por integración y se verifican mediante las propiedades de una pirámide de base triangular para flexión biaxial y las propiedades de un prisma triangular para flexión uniaxial. En este artículo se presentan tres ejemplos numéricos: El ejemplo 1 corresponde a flexión biaxial; el ejemplo 2 es el mismo ejemplo 1, pero M_{x1} y M_{x2} son iguales a cero; El ejemplo 3 es el mismo ejemplo 1, pero M_{y1} y M_{y2} son iguales a cero. Cada ejemplo presenta cuatro tipos de restricciones: la restricción 1 corresponde a una zapata con lados sin restricciones, la restricción 2 corresponde a una zapata con un lado restringido en la columna 1, la restricción 3 corresponde a una zapata con un lado restringido en la columna 2 y la restricción 4 corresponde a una zapata con dos lados restringidos (lados opuestos). Además, se realiza una comparación con el modelo actual (área trabaja completamente bajo compresión) y el nuevo modelo (área trabaja parcialmente bajo compresión) para observar las diferencias.

2 Formulación del modelo

En este trabajo se hacen las siguientes consideraciones: la zapata es completamente rígida y reposa sobre suelo elástico y homogéneo, es decir, la presión del suelo sobre la zapata se comporta linealmente según Bowles [1], Das *et al.* [45], McCormac y Brown [46].

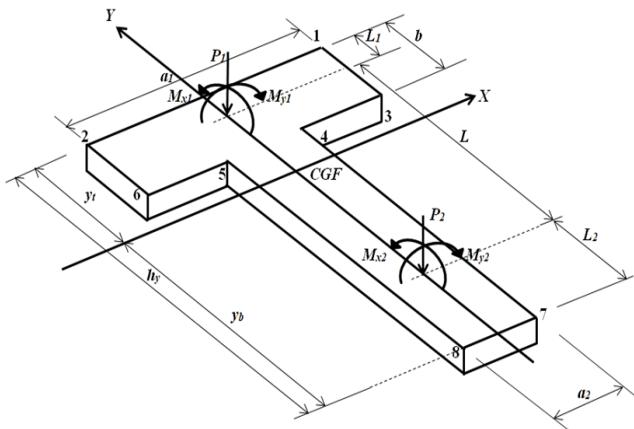


Figura 2. Zapata combinada en forma de T con extremos libres.
Fuente: Autores.

La Fig. 2 muestra una zapata combinada en forma de T (lados libres en sus extremos) que soporta dos columnas alineadas sobre un eje Y (eje longitudinal), y cada columna transfiere a la zapata una carga axial y dos momentos flectores en los ejes X e Y.

Las propiedades geométricas de la zapata combinada en forma de T vista en planta son:

$$A = (a_1 - a_2)b + a_2h_y \quad (1)$$

$$y_t = \frac{(a_1 - a_2)b^2 + a_2h_y^2}{2[(a_1 - a_2)b + a_2h_y]} \quad (2)$$

$$y_b = \frac{(2h_y - b)(a_1 - a_2)b + a_2h_y^2}{2[(a_1 - a_2)b + a_2h_y]} \quad (3)$$

$$I_x = \frac{a_2h_yb(a_1 - a_2)(h_y - b)^2[a_2h_y + b(a_1 - a_2)]}{4[(a_1 - a_2)b + a_2h_y]^2} + \frac{(a_1 - a_2)b^3 + a_2h_y^3}{12} \quad (4)$$

$$I_y = \frac{ba_1^3 + (h_y - b)a_2^3}{12} \quad (5)$$

donde: A = Área de la zapata en planta (m^2), y_t = Distancia del centro de la zapata al extremo positivo (m), y_b = Distancia del centro de la zapata al extremo negativo (m), I_x = Momento de inercia sobre el eje X (m^4), I_y = Momento de inercia sobre el eje Y (m^4).

2.1 Flexión biaxial

En esta subsección se presentan los quince casos posibles para una zapata combinada en forma de T sometida a carga axial y dos momentos ortogonales en cada columna.

Para el caso I, se asume que toda la superficie inferior de la zapata está comprimida. Las presiones generadas por el suelo sobre la zapata se determinan mediante la siguiente ecuación (ecuación de flexión biaxial) [31-42]:

$$\sigma = \frac{R}{A} + \frac{M_{xT}y}{I_x} + \frac{M_{yT}x}{I_y} \quad (6)$$

donde: σ = Presión admisible del suelo (kN/m^2), M_{xT} = Momento total respecto al eje X ($kN\cdot m$), M_{yT} = Momento total respecto al eje Y ($kN\cdot m$), x = Distancia en dirección X desde el centro de la zapata hasta el punto en estudio, y = Distancia en dirección Y desde el centro de la zapata hasta el punto en estudio.

Nota: R , M_{xT} y M_{yT} se pueden determinar mediante la suma de fuerzas y la suma de momentos de la siguiente manera:

$$R = P_1 + P_2 \quad (7)$$

$$M_{xT} = M_{x1} + M_{x2} + P_1(y_t - L_1) - P_2(h_y - y_t - L_2) \quad (8)$$

$$M_{yT} = M_{y1} + M_{y2} \quad (9)$$

Para los casos II al XV (Todos los casos posibles cuando la presión máxima se localiza en el vértice 1), se supone que toda la superficie inferior de la zapata está parcialmente comprimida, es decir, parte del área de contacto no hay presión, y por integración y/o por las propiedades geométricas de una pirámide de base triangular, se determinan la fuerza resultante R , el momento en el eje X M_{xT} y el momento en el eje Y M_{yT} (Estos casos se analizan porque en algunas condiciones el caso I no alcanza la presión máxima y en estos casos se garantiza la presencia de la presión máxima).

Las presiones generadas por el terreno sobre la zapata se determinan mediante la ecuación general del plano de presiones, a partir de tres puntos conocidos.

La ecuación general de un plano de presión tridimensional del suelo sobre la zapata es:

$$Ax + By + C\sigma_z + D = 0 \quad (10)$$

Para los casos II a XV, los tres puntos conocidos del plano de presión son:

$$p_1\left(\frac{a_1}{2}, y_t, \sigma_{max}\right); p_2\left(\frac{a_1}{2} - L_{x1}, y_t, 0\right); p_3\left(\frac{a_1}{2}, y_t - L_{y1}, 0\right) \quad (11)$$

donde: p_1 , p_2 y p_3 son las coordenadas de los tres puntos conocidos de la zapata (ver Fig. 4).

La ecuación general del plano de presión se determina de la siguiente manera (Tomando como pivote el punto 1 “ p_1 ”):

$$\begin{vmatrix} x - \left(\frac{a_1}{2}\right) & y - (y_t) & \sigma_z - \sigma_{max} \\ \frac{a_1}{2} - L_{x1} - \left(\frac{a_1}{2}\right) & y_t - (y_t) & 0 - \sigma_{max} \\ \frac{a_1}{2} - \left(\frac{a_1}{2}\right) & y_t - L_{y1} - (y_t) & 0 - \sigma_{max} \end{vmatrix} \quad (12)$$

Resolviendo el determinante de la Ec. (12) y aislando “ σ_z ” se obtiene la presión en cualquier punto de la base:

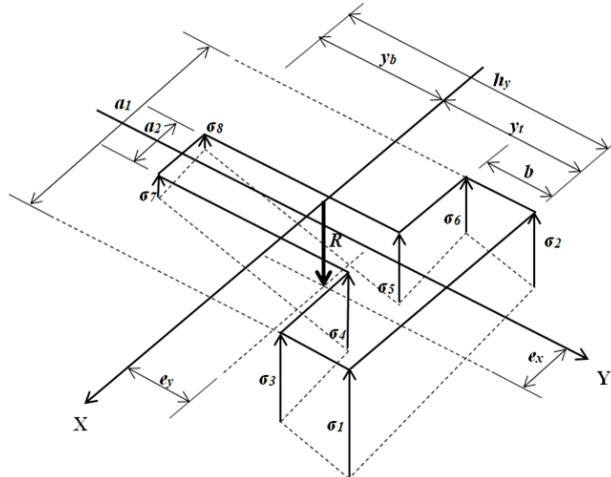
$$\sigma_z = \frac{\sigma_{max}[2L_{x1}(L_{y1} + y - y_t) + L_{y1}(2x - a_1)]}{2L_{x1}L_{y1}} \quad (13)$$

La ecuación de la recta que forma el eje neutro se obtiene suponiendo “ σ_z ” igual a cero en la Ecuación (13) (Esta es la definición del eje neutro):

$$2L_{x1}(L_{y1} + y - y_t) + L_{y1}(2x - a_1) = 0 \quad (14)$$

La Fig. 3 muestra el caso I asumiendo que toda la superficie inferior de la zapata está comprimida.

La Fig. 4 muestra los casos II a XV asumiendo que toda la superficie inferior de la zapata trabaja parcialmente bajo compresión.



$$R = \frac{\sigma_{max} L_{x1} L_{y1}}{6} \quad (24)$$

$$M_{xT} = \int_{y_t - L_{y1}}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy \quad (25)$$

$$M_{xT} = \frac{\sigma_{max} L_{x1} L_{y1} (4y_t - L_{y1})}{24} \quad (26)$$

$$M_{yT} = \int_{y_t - L_{y1}}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (27)$$

$$M_{yT} = \frac{\sigma_{max} L_{x1} L_{y1} (2a_1 - L_{x1})}{24} \quad (28)$$

donde: σ_{max} es la presión máxima admisible del suelo, L_{y1} es la distancia paralela al eje Y medida a partir de σ_{max} o σ_I hasta el eje neutro, L_{x1} es la distancia paralela al eje X medida a partir de σ_{max} o σ_I hasta el eje neutro.

2.1.3 Caso III

$$R = \int_{y_t - b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (29)$$

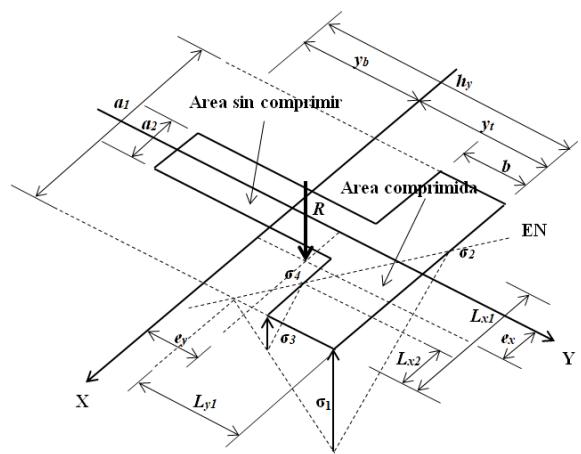
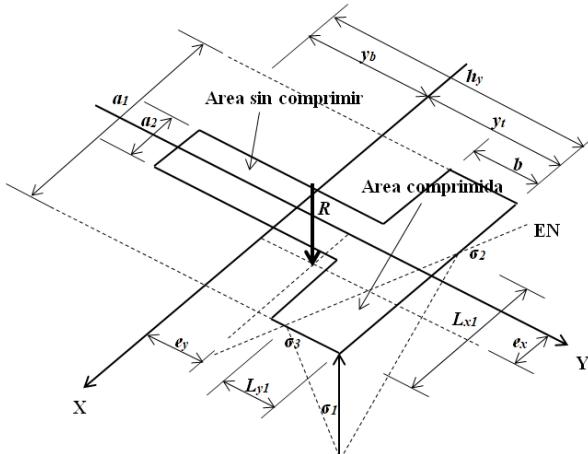
$$R = \frac{\sigma_{max} L_{x1} [L_{y1}^3 - (L_{y1} - b)^3]}{6L_{y1}^2} \quad (30)$$

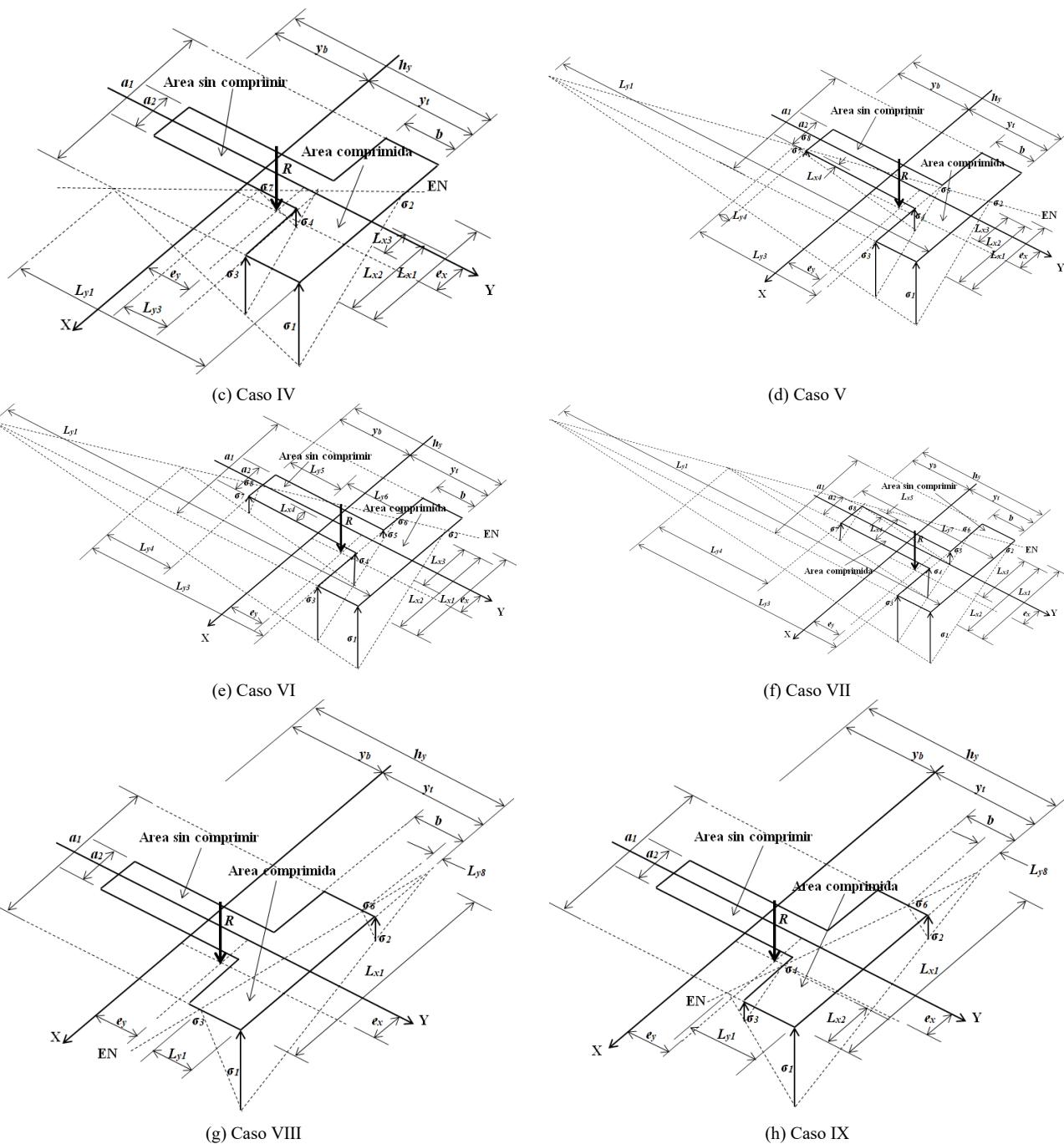
$$M_{xT} = \int_{y_t - b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy \quad (31)$$

$$M_{xT} = \frac{\sigma_{max} L_{x1} [L_{y1}^3 (4y_t - L_{y1}) - (L_{y1} - b)^3 (4y_t - 3b - L_{y1})]}{24L_{y1}^2} \quad (32)$$

$$M_{yT} = \int_{y_t - b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (33)$$

$$M_{yT} = \frac{\sigma_{max} L_{x1} \{L_{y1}^4 (2a_1 - L_{x1}) - (L_{y1} - b)^3 [2a_1 L_{y1} - L_{x1} (L_{y1} - b)]\}}{24L_{y1}^3} \quad (34)$$





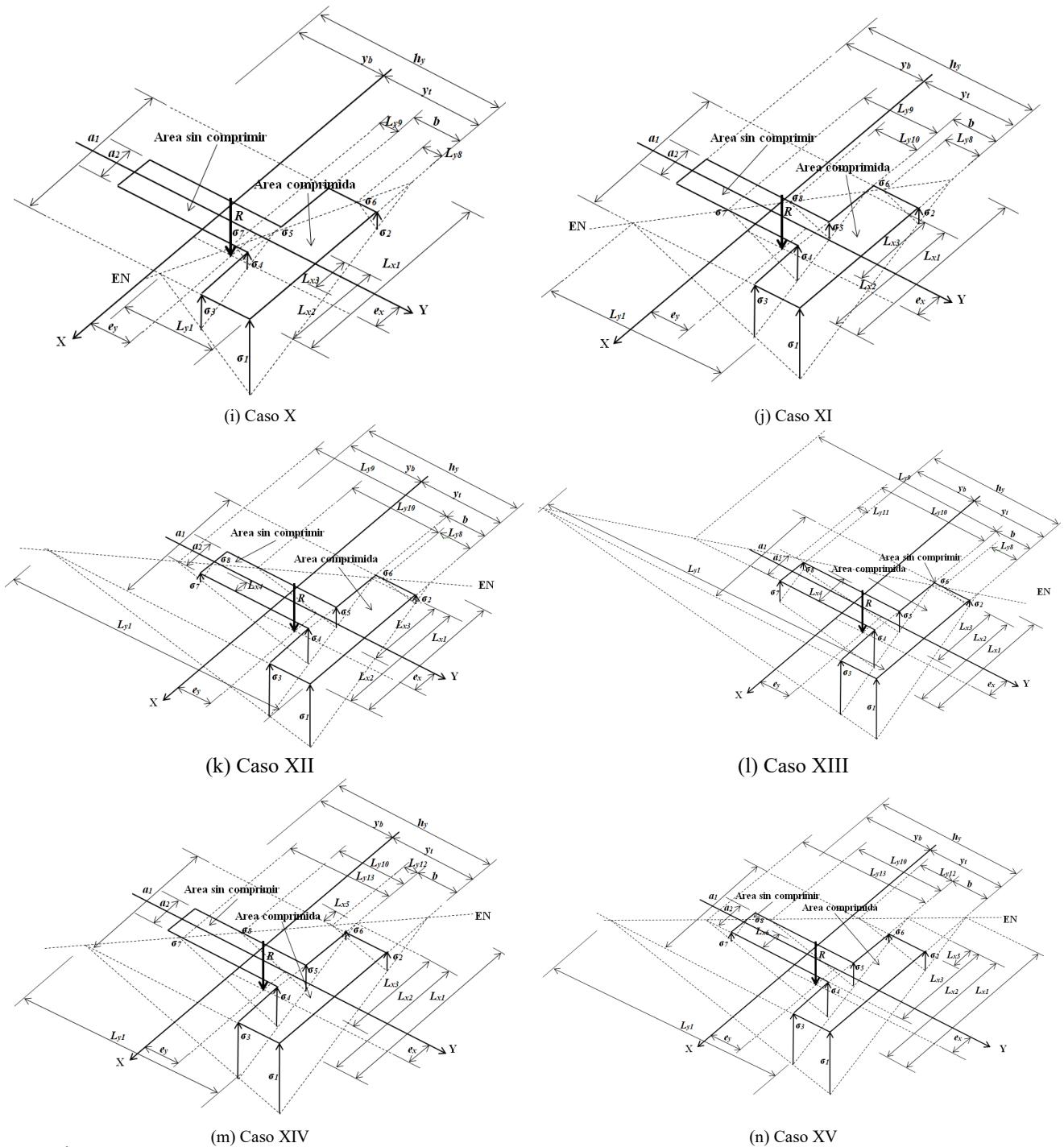


Figura 4. Área parcialmente comprimida.
Fuente: Autores.

2.1.4 Caso IV

$$R = \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{\frac{a_1+(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t-b} \frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1-a_2)}{2L_{x1}} \int_{\frac{a_1+(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z dx dy \quad (35)$$

$$R = \frac{\sigma_{max} \left\{ 8L_{x1}^3 \left[L_{y1}^3 - (L_{y1} - b)^3 \right] + [2L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 \right\}}{48L_{x1}^2 L_{y1}^2} \quad (36)$$

$$M_{xT} = \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t-b} \int_{\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1-a_2)}{2L_{x1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy \quad (37)$$

$$M_{xT} = \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 [2L_{x1}(4y_t - 3b - L_{y1}) + L_{y1}(a_1 - a_2)]}{384L_{x1}^3 L_{y1}^2} \\ + \frac{\sigma_{max} L_{x1} [L_{y1}^3 (4y_t - L_{y1}) - (L_{y1} - b)^3 (4y_t - 3b - L_{y1})]}{24L_{y1}^2} \quad (38)$$

$$M_{yT} = \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t-b} \int_{\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1-a_2)}{2L_{x1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (39)$$

$$M_{yT} = \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 [L_{y1}(a_1 + 3a_2) - 2L_{x1}(L_{y1} - b)]}{384L_{x1}^2 L_{y1}^3} \\ + \frac{\sigma_{max} L_{x1} \{ L_{y1}^4 (2a_1 - L_{x1}) - (L_{y1} - b)^3 [2a_1 L_{y1} - L_{x1}(L_{y1} - b)] \}}{24L_{y1}^3} \quad (40)$$

2.1.5 Caso V

$$R = \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z dx dy + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z dx dy \quad (41)$$

$$R = \frac{\sigma_{max} \left\{ 8L_{x1}^3 \left[L_{y1}^3 - (L_{y1} - b)^3 \right] + [2L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 - [2L_{x1}(L_{y1} - h_y) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 \right\}}{48L_{x1}^2 L_{y1}^2} \quad (42)$$

$$M_{xT} = \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy \quad (43)$$

$$M_{xT} = \frac{\sigma_{max} \{ [2L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 [(4y_t - 3b - L_{y1}) + L_{y1}(a_1 - a_2)]}{384L_{x1}^3 L_{y1}^2} \\ - \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - h_y) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 [(4y_t - 3h_y - L_{y1}) + L_{y1}(a_1 - a_2)]}{384L_{x1}^3 L_{y1}^2} \\ + \frac{\sigma_{max} L_{x1} [L_{y1}^3 (4y_t - L_{y1}) - (L_{y1} - b)^3 (4y_t - 3b - L_{y1})]}{24L_{y1}^2} \quad (44)$$

$$M_{yT} = \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (45)$$

$$M_{yT} = \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 [L_{y1}(a_1 + 3a_2) - 2L_{x1}(L_{y1} - b)]}{384L_{x1}^2 L_{y1}^3} \\ - \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - h_y) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 [L_{y1}(a_1 + 3a_2) - 2L_{x1}(L_{y1} - h_y)]}{384L_{x1}^2 L_{y1}^3} \\ + \frac{\sigma_{max} L_{x1} \{ L_{y1}^4 (2a_1 - L_{x1}) - (L_{y1} - b)^3 [2a_1 L_{y1} - L_{x1}(L_{y1} - b)] \}}{24L_{y1}^3} \quad (46)$$

2.1.6 Caso VI

$$R = \int_{y_t-b-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}}^{y_t-b} \int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z dx dy + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z dx dy \\ + \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z dx dy \quad (47)$$

$$R = \frac{\sigma_{max} \left\{ 2L_{y1}^3 [4L_{x1}^3 + a_2(3a_1^2 + a_2^2)] - 8L_{x1}(L_{y1} - b) \{ L_{x1}^2 (L_{y1} - b)^2 - 3a_2 L_{y1} [L_{x1}(L_{y1} - b) - a_1 L_{y1}] \} \right\}}{48L_{x1}^2 L_{y1}^2} \\ - \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - h_y) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3}{48L_{x1}^2 L_{y1}^2} \quad (48)$$

$$M_{xT} = \int_{y_t-b-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}}^{y_t-b} \int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy \\ + \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy \quad (49)$$

$$M_{xT} = \frac{\sigma_{max} L_{x1} L_{y1} (4y_t - L_{y1})}{24} - \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - h_y) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 [2L_{x1}(4y_t - 3h_y - L_{y1}) + L_{y1}(a_1 - a_2)]}{384L_{x1}^3 L_{y1}^2} \\ - \frac{\sigma_{max} (4y_t - 3b - L_{y1}) \{ 4L_{x1}^3 (L_{y1} - b)^3 - 3L_{y1} a_2 [2L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1} a_1]^2 - L_{y1}^3 a_2^3 \}}{96L_{x1}^2 L_{y1}^2} \\ - \frac{\sigma_{max} a_2 \{ 4[L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1} a_1]^3 - L_{y1}^2 (a_1^2 - a_2^2) [3L_{x1}(L_{y1} - b) - 2L_{y1} a_1] \}}{96L_{x1}^3 L_{y1}} \quad (50)$$

$$M_{yT} = \int_{y_t-b-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}}^{y_t-b} \int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \\ + \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (51)$$

$$M_{yT} = \frac{\sigma_{max} \{ L_{x1}^3 L_{y1}^4 (2a_1 - L_{x1}) - L_{x1}^3 (L_{y1} - b)^3 [2a_1 L_{y1} - L_{x1}(L_{y1} - b)] - L_{y1}^3 a_2^3 [L_{y1} a_1 - 2L_{x1}(L_{y1} - b)] \}}{24L_{x1}^2 L_{y1}^3} \\ - \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - h_y) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 [L_{y1}(a_1 + 3a_2) - 2L_{x1}(L_{y1} - h_y)]}{384L_{x1}^2 L_{y1}^3} \quad (52)$$

2.1.7 Caso VII

$$R = \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z dx dy + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b} \int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z dx dy \quad (53)$$

$$R = \frac{\sigma_{max} \{ L_{x1}^2 [L_{y1}^3 + (b - L_{y1})^3] + 3L_{y1} a_2 (b - h_y) [L_{y1} a_1 - L_{x1}(2L_{y1} - b - h_y)] \}}{6L_{x1} L_{y1}^2} \quad (54)$$

$$M_{xT} = \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b} \int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy \quad (55)$$

$$M_{xT} = \frac{\sigma_{max} a_2 L_{x1}^2 (h_y - b) [4L_{x1}(b^2 + bh_y + h_y^2) + 3L_{y1}(a_1 - 2L_{x1})(b + h_y) - 6y_t[L_{x1}(b + h_y - 2L_{y1}) + a_1 L_{y1}]]}{12L_{x1}^3 L_{y1}} + \frac{\sigma_{max} L_{x1} [L_{y1}^3 (4y_t - L_{y1}) - (L_{y1} - b)^3 (4y_t - 3b - L_{y1})]}{24L_{y1}^2} \quad (56)$$

$$M_{yT} = \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b} \int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (57)$$

$$M_{yT} = \frac{\sigma_{max} \{L_{x1}^3 [(b - L_{y1})^4 - L_{y1}^4] + 2L_{x1} b L_{y1} a_1 [b^2 - 3L_{y1}(b - L_{y1})] - 2a_2^3 L_{y1}^3 (b - h_y)\}}{24L_{x1} L_{y1}^3} \quad (58)$$

2.1.8 Caso VIII

$$R = \int_{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}}^{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (59)$$

$$R = \frac{\sigma_{max} L_{y1} [L_{x1}^3 - (L_{x1} - a_1)^3]}{6L_{x1}^2} \quad (60)$$

$$M_{xT} = \int_{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t - L_{y1}}^{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy \quad (61)$$

$$M_{xT} = \frac{\sigma_{max} L_{y1} [L_{x1}^4 (4y_t - L_{y1}) - (L_{x1} - a_1)^3 [4L_{x1} y_t - L_{y1} (L_{x1} - a_1)]]}{24L_{x1}^3} \quad (62)$$

$$M_{yT} = \int_{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t - L_{y1}}^{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (63)$$

$$M_{yT} = \frac{\sigma_{max} a_1^3 L_{y1} (2L_{x1} - a_1)}{24L_{x1}^2} \quad (64)$$

2.1.9 Caso IX

$$R = \int_{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t - b}^{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (65)$$

$$R = \frac{\sigma_{max} \{L_{y1}^3 [L_{x1}^3 - (L_{x1} - a_1)^3] - L_{x1}^3 (L_{y1} - b)^3\}}{6L_{x1}^2 L_{y1}^2} \quad (66)$$

$$M_{xT} = \int_{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t - b}^{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy \quad (67)$$

$$M_{xT} = \frac{\sigma_{max} \{L_{y1}^3 [L_{x1}^4 (4y_t - L_{y1}) - (L_{x1} - a_1)^3 [4L_{x1} y_t - L_{y1} (L_{x1} - a_1)]] - L_{x1}^4 (L_{y1} - b)^3 (4y_t - 3b - L_{y1})\}}{24L_{x1}^3 L_{y1}^2} \quad (68)$$

$$M_{yT} = \int_{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t - b}^{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (69)$$

$$M_{yT} = \frac{\sigma_{max} \left\{ a_1^3 L_{y1}^4 (2L_{x1} - a_1) - L_{x1}^3 (L_{y1} - b)^3 [2L_{y1}a_1 - L_{x1}(L_{y1} - b)] \right\}}{24L_{x1}^2 L_{y1}^3} \quad (70)$$

2.1.10 Caso X

$$R = \int_{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z dx dy + \int_{y_t - b}^{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z dx dy \\ + \int_{y_t - b - \frac{2L_{x1}(L_{y1}-b) - L_{y1}(a_1-a_2)}{2L_{x1}}}^{y_t - b} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z dx dy \quad (71)$$

$$R = \frac{\sigma_{max} \left\{ 8L_{y1}^3 [L_{x1}^3 - (L_{x1} - a_1)^3] - L_{x1}^3 (L_{y1} - b)^3 + [2L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 \right\}}{48L_{x1}^2 L_{y1}^2} \quad (72)$$

$$M_{xT} = \int_{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t - b}^{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy \\ + \int_{y_t - b - \frac{2L_{x1}(L_{y1}-b) - L_{y1}(a_1-a_2)}{2L_{x1}}}^{y_t - b} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy \quad (73)$$

$$M_{xT} = \frac{\sigma_{max} \left\{ L_{y1}^3 a_1 [L_{x1} (3L_{x1}^2 - 3L_{x1}a_1 + a_1^2) (4y_t - L_{y1}) - L_{y1} (L_{x1} - a_1)^3] - L_{x1}^4 (L_{y1} - b)^3 (4y_t - 3b - L_{y1}) \right\}}{24L_{x1}^3 L_{y1}^2} \\ + \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 [2L_{x1}(4y_t - 3b - L_{y1}) + L_{y1}(a_1 - a_2)]}{384L_{x1}^3 L_{y1}^2} \quad (74)$$

$$M_{yT} = \int_{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t - b}^{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy \\ + \int_{y_t - b - \frac{2L_{x1}(L_{y1}-b) - L_{y1}(a_1-a_2)}{2L_{x1}}}^{y_t - b} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (75)$$

$$M_{yT} = \frac{\sigma_{max} \left\{ a_1^3 L_{y1}^4 (2L_{x1} - a_1) - L_{x1}^3 (L_{y1} - b)^3 [2L_{y1}a_1 - L_{x1}(L_{y1} - b)] \right\}}{24L_{x1}^2 L_{y1}^3} \\ + \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 [L_{y1}(a_1 + 3a_2) - 2L_{x1}(L_{y1} - b)]}{384L_{x1}^2 L_{y1}^3} \quad (76)$$

2.1.11 Caso XI

$$R = \int_{y_t - b - \frac{2L_{x1}(L_{y1}-b) - L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}}^{y_t - b} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z dx dy + \int_{y_t - b - \frac{2L_{x1}(L_{y1}-b) - L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}}^{y_t - b} \int_{\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z dx dy \\ + \int_{y_t - b}^{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t - L_{y1} - y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z dx dy + \int_{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z dx dy \quad (77)$$

$$R = \frac{\sigma_{max} \left\{ 4[L_{y1}a_2 - L_{x1}(L_{y1} - b)]^3 + L_{y1}^3 [4L_{x1}^3 - 4(L_{x1} - a_1)^3 + 3a_2(a_1^2 - a_2^2)] \right\}}{24L_{x1}^2 L_{y1}^2} - \frac{\sigma_{max} a_2 (L_{y1} - b)(a_1 - a_2)}{2L_{x1}} \quad (78)$$

$$\begin{aligned}
M_{xT} = & \int_{y_t-b}^{y_t-b-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t-b-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}} \int_{\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy \\
& + \int_{y_t-b}^{y_t-\frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t-\frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy
\end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned}
M_{xT} = & \frac{\sigma_{max}(4y_t - 3b - L_{y1}) \{ 4[L_{y1}a_2 - L_{x1}(L_{y1} - b)]^3 - 3L_{y1}^2 a_2(a_1 - a_2)[4L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}(a_1 + a_2)] \}}{96L_{x1}^2 L_{y1}^2} \\
& - \frac{\sigma_{max} a_2 \{ 4[L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}a_1]^3 - L_{y1}^2(a_1^2 - a_2^2)[3L_{x1}(L_{y1} - b) - 2L_{y1}a_1] \}}{96L_{x1}^3 L_{y1}} \\
& + \frac{\sigma_{max} L_{y1} [L_{y1}(L_{x1} - a_1)^4 - 4L_{x1}y_t(L_{x1} - a_1)^3 + L_{x1}^4(4y_t - L_{y1})]}{24L_{x1}^3}
\end{aligned} \tag{80}$$

$$\begin{aligned}
M_{yT} = & \int_{y_t-b}^{y_t-b-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t-b-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}} \int_{\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \\
& + \int_{y_t-b}^{y_t-\frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t-\frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy
\end{aligned} \tag{81}$$

$$M_{yT} = \frac{\sigma_{max} [L_{x1}^4(L_{y1} - b)^4 - 2a_1L_{x1}^3L_{y1}(L_{y1} - b)^3 - 2a_2^3L_{x1}L_{y1}^3b + L_{y1}^4(a_1^3 + a_2^3)(2L_{x1} - a_1)]}{24L_{x1}^2 L_{y1}^3} \tag{82}$$

2.1.12 Caso XII

$$\begin{aligned}
R = & \int_{y_t-h_y}^{y_t-b-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t-b-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}} \int_{\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z dx dy \\
& + \int_{y_t-b}^{y_t-\frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z dx dy + \int_{y_t-\frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z dx dy
\end{aligned} \tag{83}$$

$$\begin{aligned}
R = & \frac{\sigma_{max} \{ (a_1 + a_2)^2 [L_{y1}(a_1 + a_2) - 6L_{x1}(L_{y1} - h_y)] - 24L_{x1}a_1a_2(h_y - b) \}}{48L_{x1}^2} \\
& + \frac{\sigma_{max} \{ 6L_{y1}a_2(L_{y1} - b)^2 - (L_{y1} - h_y)^2 [2L_{x1}(L_{y1} - h_y) - 3L_{y1}(a_1 - a_2)] \}}{12L_{y1}^2}
\end{aligned} \tag{84}$$

$$\begin{aligned}
M_{xT} = & \int_{y_t-h_y}^{y_t-b-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t-b-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}} \int_{\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy \\
& + \int_{y_t-b}^{y_t-\frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2}+\frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t-\frac{L_{y1}(L_{x1}-a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy
\end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned}
M_{xT} = & \frac{\sigma_{max} L_{y1} \{ (4y_t - L_{y1})L_{x1}^4 - (L_{x1} - a_1)^3 [L_{x1}(4y_t - L_{y1}) + L_{y1}a_1] \}}{24L_{x1}^3} - \frac{\sigma_{max} L_{x1}(L_{y1} - b)^3 (4y_t - 3b - L_{y1})}{24L_{y1}^2} \\
& + \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 [2L_{x1}(4y_t - 3b) - L_{y1}(2L_{x1} - a_1 + a_2)]}{384L_{x1}^3 L_{y1}^2} \\
& - \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}(a_1 + a_2)]^3 [2L_{x1}(4y_t - 3b) - L_{y1}(2L_{x1} - a_1 - a_2)]}{384L_{x1}^3 L_{y1}^2} \\
& - \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - h_y) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 [2L_{x1}(4y_t - 3h_y) - L_{y1}(2L_{x1} - a_1 + a_2)]}{384L_{x1}^3 L_{y1}^2}
\end{aligned} \tag{86}$$

$$M_{yT} = \int_{y_t-h_y}^{y_t-b} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t-b} \int_{\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \\ + \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t-L_{y1}-y)L_{x1}}{L_{y1}}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t}^{y_t} \int_{\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (87)$$

$$M_{yT} = \frac{\sigma_{max} [L_{x1}^4 (L_{y1} - b)^4 - 2a_1 L_{x1}^3 L_{y1} (L_{y1} - b)^3 - 2a_2^3 L_{x1} L_{y1}^3 b + L_{y1}^4 (a_1^3 + a_2^3) (2L_{x1} - a_1)]}{24 L_{x1}^2 L_{y1}^3} \\ + \frac{\sigma_{max} [2L_{x1} (L_{y1} - h_y) - L_{y1} (a_1 - a_2)]^3 [L_{y1} (a_1 + 3a_2) - 2L_{x1} (L_{y1} - h_y)]}{384 L_{x1}^2 L_{y1}^3} \quad (88)$$

2.1.13 Caso XIII

$$R = \int_{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t-y)L_{x1}}{L_{y1}} - L_{x1}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b} \int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (89)$$

$$R = \frac{\sigma_{max} \{3a_2 L_{x1}^2 L_{y1} [(L_{y1} - b)^2 - (L_{y1} - h_y)^2] - L_{y1}^3 (L_{x1} - a_1)^3\}}{6 L_{x1}^2 L_{y1}^2} \\ + \frac{\sigma_{max} \{L_{x1}^3 [L_{y1}^3 - (L_{y1} - b)^3] - 3a_1 a_2 L_{x1} L_{y1}^2 (h_y - b)\}}{6 L_{x1}^2 L_{y1}^2} \quad (90)$$

$$M_{xT} = \int_{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t-y)L_{x1}}{L_{y1}} - L_{x1}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b} \int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy \quad (91)$$

$$M_{xT} = \frac{\sigma_{max} \{a_2 h_y^2 [2h_y - 3(L_{y1} + y_t)] + b^2 [2b(L_{x1} - a_2) + 3a_2 (L_{y1} + y_t)]\}}{6 L_{y1}} \\ + \frac{\sigma_{max} (L_{x1} - a_1)^3 [L_{y1} (L_{x1} - a_1) - 4L_{x1} y_t]}{24 L_{y1}^2} + \frac{\sigma_{max} a_2 (b - h_y) [2y_t (a_1 - 2L_{x1}) - a_1 (b + h_y)]}{4 L_{x1}} \\ + \frac{\sigma_{max} L_{x1} [2L_{y1}^2 (2L_{y1} y_t - 3b^2) - 3b^4 - 4y_t (L_{y1} - b)^3]}{24 L_{y1}^2} \quad (92)$$

$$M_{yT} = \int_{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t - \frac{L_{y1}(L_{x1} - a_1)}{L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t-y)L_{x1}}{L_{y1}} - L_{x1}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b} \int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (93)$$

$$M_{yT} = \frac{\sigma_{max} \{L_{x1}^3 (L_{y1} - b)^3 [L_{x1} (L_{y1} - b) - 2a_1 L_{y1}] + L_{y1}^3 [a_1^3 L_{y1} (2L_{x1} - a_1) + 2a_2^3 L_{x1} (h_y - b)]\}}{24 L_{x1}^2 L_{y1}^3} \quad (94)$$

2.1.14 Caso XIV

$$R = \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t-b - \frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}} \int_{-\frac{a_2}{2}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \\ + \int_{y_t-b}^{y_t-b - \frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}} \int_{\frac{a_1}{2} + \frac{(y_t-y)L_{x1}}{L_{y1}} - L_{x1}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (95)$$

$$R = \frac{\sigma_{max} \{L_{y1}^2 a_2^3 + 3L_{y1}^2 a_2 (2L_{x1} - a_1)^2 - 12L_{x1} b (a_1 - a_2) [L_{y1} (a_1 - 2L_{x1}) + L_{x1} b]\}}{24 L_{x1}^2 L_{y1}} \quad (96)$$

$$\begin{aligned}
M_{xT} = & \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t-b} \int_{-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy \\
& + \int_{y_t-b}^{y_t-b} \int_{-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy
\end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned}
M_{xT} = & \frac{\sigma_{max} \{ a_2 L_{y1}^3 [a_1 a_2^2 - (2L_{x1} - a_1)^3] - 24 L_{x1}^3 y_t (a_1 - a_2) (L_{y1} - b)^2 \}}{48 L_{x1}^3 L_{y1}} \\
& - \frac{\sigma_{max} \{ b (a_1 - a_2) [3 L_{y1} a_1 (2y_t - b) + 2 L_{x1} b (3 L_{y1} - 2b)] \}}{12 L_{x1} L_{y1}} \\
& + \frac{\sigma_{max} L_{y1} \{ 3 a_1 y_t [a_1 a_2 + 4 L_{x1} (L_{x1} - a_2)] - a_2^3 (L_{y1} - y_t) \}}{24 L_{x1}^2}
\end{aligned} \tag{98}$$

$$\begin{aligned}
M_{yT} = & \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t-b} \int_{-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \\
& + \int_{y_t-b}^{y_t-b} \int_{-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1-a_2)}{2L_{x1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy
\end{aligned} \tag{99}$$

$$M_{yT} = \frac{\sigma_{max} \{ 2 L_{x1} [a_1^3 b + a_2^3 (L_{y1} - b)] - L_{y1} a_1 a_2^3 \}}{24 L_{x1}^2} \tag{100}$$

2.1.15 Caso XV

$$\begin{aligned}
R = & \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t-b} \int_{-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z dx dy \\
& + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b} \int_{-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z dx dy
\end{aligned} \tag{101}$$

$$\begin{aligned}
R = & \frac{\sigma_{max} \{ 2 L_{x1} [L_{y1}^3 - (L_{y1} - h_y)^3] - 3 L_{y1} (a_1 - a_2) [2 (L_{y1} - b)^2 - (L_{y1} - h_y)^2] \}}{12 L_{y1}^2} \\
& - \frac{\sigma_{max} \{ 6 L_{x1} (a_1 - a_2) [4 a_1 b - h_y (a_1 - a_2)] + L_{y1} [(L_{x1} - a_1 - a_2)^3 - 12 L_{x1}^2 (a_1 - a_2)] \}}{48 L_{x1}^2}
\end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned}
M_{xT} = & \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t-b} \int_{-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy \\
& + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b} \int_{-\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy
\end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned}
M_{xT} = & \frac{\sigma_{max} \{ [L_{x1} (L_{y1} - b) - L_{y1} a_1]^3 [L_{x1} (4y_t - 3b) - L_{y1} (L_{x1} - a_1)] - L_{y1}^3 (L_{x1} - a_1)^3 [4 L_{x1} y_t - L_{y1} (L_{x1} - a_1)] \}}{24 L_{x1}^3 L_{y1}^2} \\
& + \frac{\sigma_{max} \{ L_{x1} L_{y1}^3 (4y_t - L_{y1}) - L_{x1} (L_{y1} - b)^3 (4y_t - 3b - L_{y1}) \}}{24 L_{y1}^2} \\
& + \frac{\sigma_{max} \{ 2 L_{x1} (L_{y1} - b) - L_{y1} (a_1 - a_2) \}^3 [2 L_{x1} (4y_t - 3b) - L_{y1} (2 L_{x1} - a_1 + a_2)]}{384 L_{x1}^3 L_{y1}^2} \\
& - \frac{\sigma_{max} \{ 2 L_{x1} (L_{y1} - b) - L_{y1} (a_1 + a_2) \}^3 [2 L_{x1} (4y_t - 3b) - L_{y1} (2 L_{x1} - a_1 - a_2)]}{384 L_{x1}^3 L_{y1}^2} \\
& - \frac{\sigma_{max} \{ 2 L_{x1} (L_{y1} - h_y) - L_{y1} (a_1 - a_2) \}^3 [2 L_{x1} (4y_t - 3h_y) - L_{y1} (2 L_{x1} - a_1 + a_2)]}{384 L_{x1}^3 L_{y1}^2}
\end{aligned} \tag{104}$$

$$M_{yT} = \int_{y_t-b}^{y_t} \int_{-\frac{a_1}{2}}^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + \int_{y_t-b}^{y_t-b} \int_{\frac{-2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \\ + \int_{y_t-h_y}^{y_t-b} \int_{\frac{2L_{x1}(L_{y1}-b)-L_{y1}(a_1+a_2)}{2L_{x1}}}^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (105)$$

$$M_{yT} = \frac{\sigma_{max} \left\{ 16a_1^3 L_{x1}^2 L_{y1} (2L_{x1} - a_1) + [2L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 [L_{y1}(a_1 + 3a_2) - 2L_{x1}(L_{y1} - b)] \right\}}{384L_{x1}^2 L_{y1}^3} \\ - \frac{\sigma_{max} \left\{ L_{x1}^3 (L_{y1} - b)^3 [2L_{y1}a_1 - L_{x1}(L_{y1} - b)] + [L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}a_1]^3 [L_{y1}a_1 + L_{x1}(L_{y1} - b)] \right\}}{24L_{x1}^2 L_{y1}^3} \\ - \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - b) - L_{y1}(a_1 + a_2)]^3 [L_{y1}(a_1 - 3a_2) - 2L_{x1}(L_{y1} - b)]}{384L_{x1}^2 L_{y1}^3} \\ - \frac{\sigma_{max} [2L_{x1}(L_{y1} - h_y) - L_{y1}(a_1 - a_2)]^3 [L_{y1}(a_1 + 3a_2) - 2L_{x1}(L_{y1} - h_y)]}{384L_{x1}^2 L_{y1}^3} \quad (106)$$

2.2 Casos especiales

Hay dos casos: Caso X) cuando los momentos M_{x1} y M_{x2} son cero; Caso Y) cuando los momentos M_{y1} y M_{y2} son cero.

2.2.1. Caso Y

La Fig. 5 muestra los tres casos posibles para una zapata combinada en forma de T sometida a una carga axial y un momento alrededor del eje X proporcionado por cada columna (M_{y1} y M_{y2} son cero).

Para el caso Y-I, se asume que toda la superficie inferior de la zapata está comprimida y se utilizan las Ec. (15) a (22).

Para los casos Y-IIA y Y-IIB, se asume que toda la superficie inferior de la zapata está parcialmente comprimida.

Las presiones generadas por el suelo sobre la zapata se determinan mediante la ecuación general del plano de presiones, a partir de tres puntos conocidos.

Ahora, los tres puntos conocidos del plano de presión son:

$$p_1 \left(\frac{a_1}{2}, y_t, \sigma_{max} \right); p_2 \left(-\frac{a_1}{2}, y_t, \sigma_{max} \right); p_3 \left(\frac{a_2}{2}, y_t - L_{y1}, 0 \right) \quad (107)$$

La ecuación general del plano de presión se determina de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} x - \frac{a_1}{2} & y - y_t & \sigma_z - \sigma_{max} \\ -a_1 & 0 & 0 \\ \frac{a_2 - a_1}{2} & -L_{y1} & -\sigma_{max} \end{vmatrix} \quad (108)$$

Resolviendo el determinante de la Ec. (108) se obtiene la presión en cualquier punto “ σ_z ”:

$$\sigma_z = \frac{\sigma_{max}(L_{y1} - y_t + y)}{L_{y1}} \quad (109)$$

Para el caso Y-IIA, las ecuaciones para R y M_{xT} son:

$$R = 2 \int_{y_t-b}^{y_t} \int_0^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy + 2 \int_{y_t-L_{y1}}^{y_t-b} \int_0^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (110)$$

$$R = \frac{\sigma_{max} [a_1 b (2L_{y1} - b) + a_2 (L_{y1} - b)^2]}{2L_{y1}} \quad (111)$$

$$M_{xT} = 2 \int_{y_t-b}^{y_t} \int_0^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy + 2 \int_{y_t-L_{y1}}^{y_t-b} \int_0^{\frac{a_2}{2}} \sigma_z y dx dy \quad (112)$$

$$M_{xT} = \frac{\sigma_{max} b (a_1 - a_2) [2b^2 + 6L_{y1}y_t - 3b(L_{y1} + y_t)]}{6L_{y1}} \\ + \frac{\sigma_{max} [a_2 L_{y1}^2 (3y_t - L_{y1})]}{6L_{y1}} \quad (113)$$

Para el caso Y-IIB, las ecuaciones para R y M_{xT} son:

$$R = 2 \int_{y_t-L_{y1}}^{y_t} \int_0^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z x dx dy \quad (114)$$

$$R = \frac{\sigma_{max} a_1 L_{y1}}{2} \quad (115)$$

$$M_{xT} = 2 \int_{y_t-L_{y1}}^{y_t} \int_0^{\frac{a_1}{2}} \sigma_z y dx dy \quad (116)$$

$$M_{xT} = \frac{\sigma_{max} a_1 L_{y1} (3y_t - L_{y1})}{6} \quad (117)$$

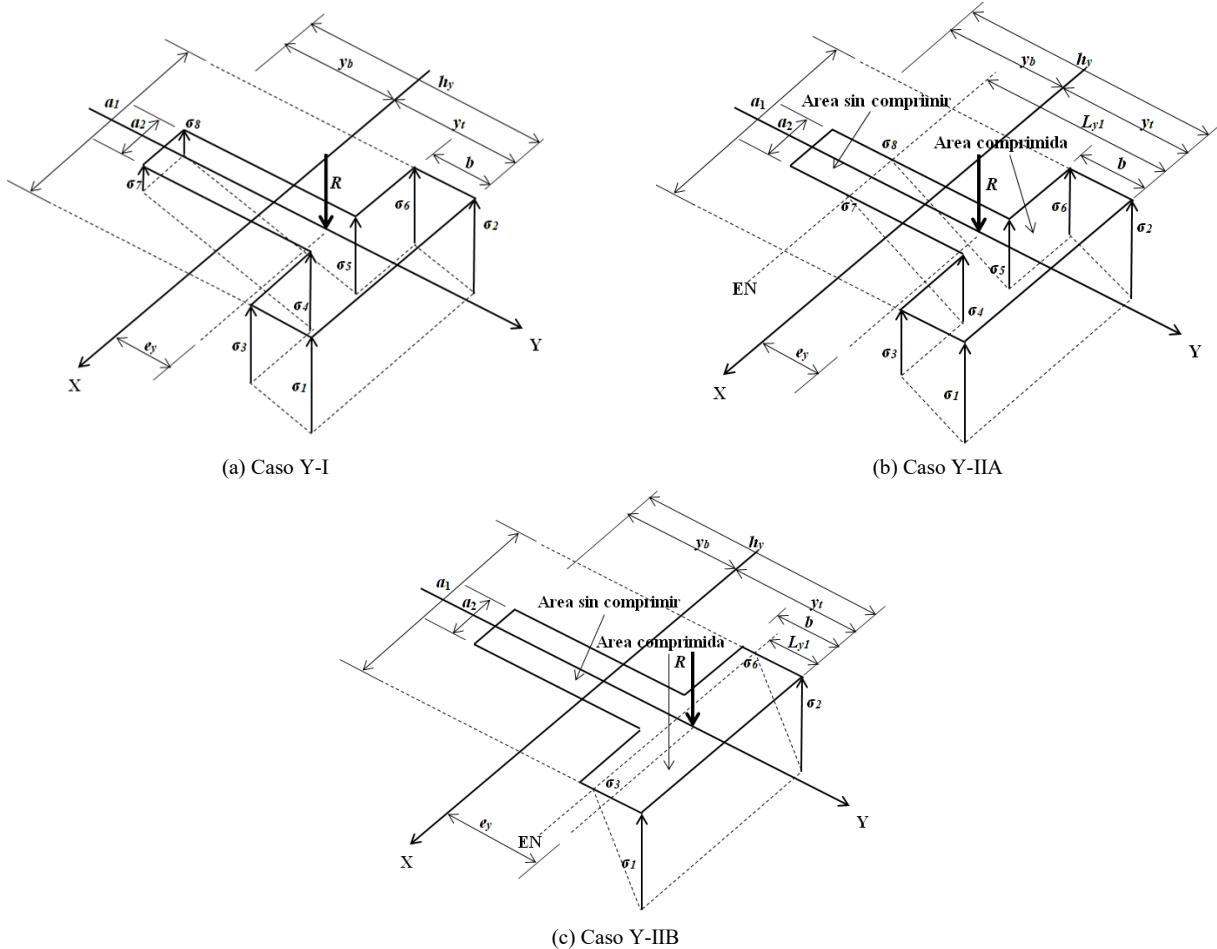


Figura 5. Caso Y para flexión uniaxial.
Fuente: Autores.

2.2.2. Caso X

Para una zapata combinada en forma de T sometida a carga axial y un momento alrededor del eje Y proporcionado por cada columna (M_{x1} y M_{x2} son cero).

Para el caso X, se deben utilizar todas las ecuaciones de la flexión biaxial, porque puede existir un momento resultante M_{xT} .

2.3 Area óptima para zapatas combinadas en forma de T

La superficie mínima (función objetivo) para todos los casos es:

$$A_{min} = (a_1 - a_2)b + a_2 h_y \quad (118)$$

En la Tabla 1 se muestran las ecuaciones de las funciones de restricción para la flexión biaxial en cada caso.

Las funciones que deben limitarse en la dirección del eje Y son:

No limitadas: $L_1 \geq c_1/2$ y $L_2 \geq c_3/2$.

Limitadas en la columna 1: $L_1 = c_1/2$ y $L_2 \geq c_3/2$.

Limitadas en la columna 2: $L_1 \geq c_1/2$ y $L_2 = c_3/2$.

Limitadas en las dos columnas: $L_1 = c_1/2$ y $L_2 = c_3/2$.

Nota: c_1 y c_3 son los lados de las columnas en la dirección Y.

Tabla 1.

Funciones de restricción para flexión biaxial.

Caso	Funciones de restricción
I	Ec. (1)-(5), (7)-(9), (15)-(22), $0 \leq \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8 \leq \sigma_{max}$
II	Ec. (1), (2), (7)-(9), (24), (26), (28), $L_{y1} \leq b, L_{x1} \leq a_1$
III	Ec. (1), (2), (7)-(9), (30), (32), (34), $L_{y1} \geq b, L_{x1} \leq a_1$
IV	Ec. (1), (2), (7)-(9), (36), (38), (40), $L_{y1} \geq b, L_{x1} \leq a_1$
V	Ec. (1), (2), (7)-(9), (42), (44), (46), $L_{y1} \geq h_y, L_{x1} \leq a_1$
VI	Ec. (1), (2), (7)-(9), (48), (50), (52), $L_{y1} \geq h_y, L_{x1} \leq a_1$
VII	Ec. (1), (2), (7)-(9), (54), (56), (58), $L_{y1} \geq h_y, L_{x1} \leq a_1$
VIII	Ec. (1), (2), (7)-(9), (60), (62), (64), $L_{y1} \leq b, L_{x1} \geq a_1$
IX	Ec. (1), (2), (7)-(9), (66), (68), (70), $L_{y1} \geq b, L_{x1} \geq a_1$
X	Ec. (1), (2), (7)-(9), (72), (74), (76), $L_{y1} \geq b, L_{x1} \geq a_1$
XI	Ec. (1), (2), (7)-(9), (78), (80), (82), $L_{y1} \geq b, L_{x1} \geq a_1$
XII	Ec. (1), (2), (7)-(9), (84), (86), (88), $L_{y1} \geq b, L_{x1} \geq a_1$
XIII	Ec. (1), (2), (7)-(9), (90), (92), (94), $L_{y1} \geq b, L_{x1} \geq a_1$
XIV	Ec. (1), (2), (7)-(9), (96), (98), (100), $L_{y1} \geq b, L_{x1} \geq a_1$
XV	Ec. (1), (2), (7)-(9), (102), (104), (106), $L_{y1} \geq b, L_{x1} \geq a_1$

Nota: en todos los casos debe incluirse $h_y = L_1 + L + L_2$, $h_y \geq b$, $L_1 \leq b/2$, $a_2 \leq a_1$.

Fuente: Autores.

Tabla 2.

Funciones de restricción para flexión uniaxial.

Caso	Funciones de restricción
Y-I	Ec. (1)-(5), (7)-(9), (15)-(22), $0 \leq \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8 \leq \sigma_{max}$
Y-IIA	Ec. (1), (2), (7)-(9), (111)-(113), $L_{y1} \geq b, L_{y1} \leq h_y$
Y-IIB	Ec. (1), (2), (7)-(9), (115)-(117), $L_{y1} \leq b$

Nota: en todos los casos debe incluirse $h_y = L_1 + L + L_2$, $h_y \geq b$, $L_1 \leq b/2$, $a_2 \leq a_1$.
Fuente: Autores.

En la Tabla 2 se muestran las ecuaciones de las funciones de restricción para la flexión uniaxial en cada caso.

Las funciones que deben limitarse en la dirección del eje Y son las mismas que las de flexión biaxial.

3 Ejemplos numéricos

Tres ejemplos numéricos se muestran para zapatas combinadas en forma de T que soportan dos columnas, y cada ejemplo presenta cuatro tipos de restricciones, las restricciones son: La restricción 1 es para lados sin restricciones ($L_1 \geq c_1/2$ y $L_2 \geq c_3/2$); La restricción 2 es para un lado limitado en la columna 1 ($L_1 = c_1/2$ y $L_2 \geq c_3/2$); La restricción 3 es para un lado limitado en la columna 2 ($L_1 \geq c_1/2$ y $L_2 = c_3/2$); La restricción 4 es para dos lados limitados (lados opuestos) ($L_1 = c_1/2$ y $L_2 = c_3/2$). El ejemplo 1 es para una zapata combinada en forma de T sometida a carga axial y momentos en los ejes X e Y debido a las columnas. El ejemplo 2 es para una zapata combinada en forma de T sometida a una carga axial y un momento en el eje Y debido a las columnas. El ejemplo 3 es para una zapata combinada en forma de T sometida a una carga axial y un momento en el eje X debido a las columnas.

Los datos para el ejemplo 1 son: $c_1 = 0.40\text{ m}$, $c_3 = 0.40\text{ m}$, $P_1 = 1250\text{ kN}$, $P_2 = 250\text{ kN}$, $M_{x1} = 300\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{x2} = 150\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{y1} = 200\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{y2} = 200\text{ kN}\cdot\text{m}$, $L = 6.00\text{ m}$, $\sigma_{max} = 200\text{ kN/m}^2$. Los datos para el ejemplo 2 son los mismos que los del ejemplo 1, pero $M_{x1} = 0\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{x2} = 0\text{ kN}\cdot\text{m}$. Los datos para el ejemplo 3 son los mismos que los del ejemplo 1, pero $M_{y1} = 0\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{y2} = 0\text{ kN}\cdot\text{m}$.

La Tabla 3 presenta los resultados del ejemplo 1.

La Tabla 4 presenta los resultados del ejemplo 2.

La Tabla 5 presenta los resultados del ejemplo 3.

Tabla 3.

Ejemplo 1 para $P_1 = 1250\text{ kN}$, $P_2 = 250\text{ kN}$, $M_{x1} = 300\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{x2} = 150\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{y1} = 200\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{y2} = 200\text{ kN}\cdot\text{m}$.

Caso	Extremos libres	Limitado en L_1	Limitado en L_2	Limitado en L_1 y L_2
I	13.11	17.10	13.11	17.10
II	45.00	*	*	*
III	15.85	*	15.85	*
IV	21.93	*	*	*
V	15.62	*	15.62	*
VI	11.59	11.73	11.59	15.51
VII	15.53	*	15.53	*
VIII	23.45	22.36	23.45	22.36
IX	12.61	16.78	12.61	16.78
X	14.09	14.46	14.09	14.46
XI	12.98	16.58	12.98	16.58
XII	14.94	*	14.94	*
XIII	12.88	16.46	12.88	16.46
XIV	13.12	13.44	13.12	13.44
XV	12.71	*	12.71	*

Note: * No hay solución disponible.

Fuente: Autores.

Tabla 4.

Ejemplo 2 para $P_1 = 1250\text{ kN}$, $P_2 = 250\text{ kN}$, $M_{x1} = 0\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{x2} = 0\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{y1} = 200\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{y2} = 200\text{ kN}\cdot\text{m}$.

Caso	A_{min} (m ²)			
	Extremos libres	Limitado en L_1	Limitado en L_2	Limitado en L_1 y L_2
I	12.57	12.80	12.57	12.80
II	45.00	*	*	*
III	15.55	*	15.53	*
IV	21.91	*	*	*
V	15.26	*	15.26	*
VI	15.37	12.25	12.90	12.90
VII	15.06	*	15.05	*
VIII	22.45	22.45	22.45	22.45
IX	12.56	15.82	12.56	15.82
X	13.61	13.79	13.61	13.79
XI	15.66	15.48	10.40	15.48
XII	13.15	*	13.51	*
XIII	12.56	15.45	12.56	15.45
XIV	12.68	12.82	12.68	12.82
XV	11.88	12.78	11.14	12.16

Note: * No hay solución disponible.

Fuente: Autores.

Tabla 5.

Ejemplo 3 para $P_1 = 1250\text{ kN}$, $P_2 = 250\text{ kN}$, $M_{x1} = 300\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{x2} = 150\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{y1} = 0\text{ kN}\cdot\text{m}$, $M_{y2} = 0\text{ kN}\cdot\text{m}$.

Caso	A_{min} (m ²)			
	Extremos libres	Limitado en L_1	Limitado en L_2	Limitado en L_1 y L_2
Y-I	11.50	16.74	11.50	16.74
Y-IIA	11.34	11.87	11.34	11.87
Y-IIB	15.00	18.70	15.00	18.70

Fuente: Autores.

4 Resultados y Discusión

Los resultados de la Tabla 3 muestran lo siguiente:

- El valor de “ A_{min} ” es el mismo para las restricciones 1 y 3, excepto en los casos II y IV que no hay solución disponible en la restricción 3.
- El valor de “ A_{min} ” es el mismo para las restricciones 2 y 4, excepto en el caso VI que sí hay solución disponible, pero es diferente.
- Las áreas mínimas “ A_{min} ” se presentan en el caso VI para las restricciones 1, 2 y 3, y en el caso XIV para la restricción 4.

Los resultados de la Tabla 4 presentan lo siguiente:

- El valor de “ A_{min} ” es el mismo para las restricciones 1 y 3, excepto en los casos II y IV que no hay solución disponible en la restricción 3, y también para los casos III, VI, VII, XI XII, XV estos son diferentes.
- El valor de “ A_{min} ” es el mismo para las restricciones 2 y 4, excepto en los casos VI y XV que sí hay solución disponible, pero estos son diferentes.
- Las áreas mínimas “ A_{min} ” se presentan en el caso XV para la restricción 1, en el caso VI para la restricción 2, en el caso XI para la restricción 3 y en el caso XV para la restricción 4.

Los resultados de la Tabla 5 muestran lo siguiente:

- El valor de “ A_{min} ” es el mismo para las restricciones 1 y 3.
- El valor de “ A_{min} ” es el mismo para las restricciones 2 y 4.
- Las áreas mínimas “ A_{min} ” se presentan en el caso Y-IIA para todas las restricciones.

En las Tablas 6-8 se muestran en detalle las propiedades mecánicas y geométricas de los casos que presentan las áreas mínimas de cada ejemplo.

Tabla 6.

Propiedades mecánicas y geométricas de los casos que presentan las áreas mínimas del ejemplo 1.

Caso	R (kN)	M_{xT} (kN-m)	M_{yT} (kN-m)	L_1 (m)	L_2 (m)	L_{xI} (m)	L_{yI} (m)	a_1 (m)	a_2 (m)	b (m)	h_y (m)	y_t (m)	A_{min} (m ²)
Extremos libres													
VI	1500	2034.12	400	0.20	0.20	0.92	6.40	3.38	1.00	2.18	6.40	2.26	11.59
Limitado en L_1													
VI	1500	2663.63	400	0.20	1.19	0.92	7.39	3.32	1.00	1.87	7.39	2.68	11.73
Limitado en L_2													
VI	1500	2034.12	400	0.20	0.20	0.92	6.40	3.38	1.00	2.18	6.40	2.26	11.59
Limitado en L_1 y L_2													
XIV	1500	1328.82	400	0.20	0.20	21.83	6.83	8.04	1.00	1.00	6.40	1.79	13.44

Fuente: Autores.

Tabla 7.

Propiedades mecánicas y geométricas de los casos que presentan las áreas mínimas del ejemplo 2.

Caso	R (kN)	M_{xT} (kN-m)	M_{yT} (kN-m)	L_1 (m)	L_2 (m)	L_{xI} (m)	L_{yI} (m)	a_1 (m)	a_2 (m)	b (m)	h_y (m)	y_t (m)	A_{min} (m ²)
Extremos libres													
XV	1500	1095.78	400	0.25	0.20	50.00	5.54	6.44	1.00	1.00	6.45	1.98	11.88
Limitado en L_1													
VI	1500	4437.68	400	0.20	3.78	0.92	9.98	3.27	1.00	1.00	9.98	4.16	12.25
Limitado en L_2													
XI	1500	0	400	4.20	0.20	8.40	20.05	1.00	1.00	10.40	10.40	5.20	10.40
Limitado en L_1 y L_2													
XV	1500	1081.82	400	0.20	0.20	38.73	5.50	6.76	1.00	1.00	6.40	1.92	12.16

Fuente: Autores

Los resultados de la Tabla 6 muestran lo siguiente:

- Todos los valores son iguales para las restricciones 1 y 3.
- El valor menor de “ a_1 ” se encuentra en la restricción 2 y el mayor en la restricción 4. Todos los valores de “ a_2 ” son iguales. El valor menor de “ b ” se encuentra en la restricción 4 y el mayor en las restricciones 1 y 3. El valor

mayor de “ h_y ” se encuentra en la restricción 2 y el menor en las restricciones 1, 3 y 4.

- El área mínima “ A_{min} ” aparece en el caso VI para las restricciones 1 y 3, y la mayor aparece en el caso XIV para la restricción 4.

Tabla 8.

Propiedades mecánicas y geométricas de los casos que presentan las áreas mínimas del ejemplo 3.

Caso	R (kN)	M_{xT} (kN-m)	M_{yT} (kN-m)	L_1 (m)	L_2 (m)	L_{yI} (m)	a_1 (m)	a_2 (m)	b (m)	h_y (m)	y_t (m)	A_{min} (m ²)
Extremos libres												
Y-IIA	1500	1476.28	0	0.50	0.20	6.44	5.64	1.00	1.00	6.70	2.18	11.34
Limitado en L_1												
Y-IIA	1500	1582.81	0	0.20	0.20	5.12	6.47	1.00	1.00	6.40	1.96	11.87
Limitado en L_2												
Y-IIA	1500	1476.28	0	0.50	0.20	6.44	5.64	1.00	1.00	6.70	2.18	11.34
Limitado en L_1 y L_2												
Y-IIA	1500	1582.81	0	0.20	0.20	5.12	6.47	1.00	1.00	6.40	1.96	11.87

Fuente: Autores

Los resultados de la Tabla 7 muestran lo siguiente:

- El valor menor de “ a_1 ” se encuentra en la restricción 3 y el mayor en la restricción 4. Todos los valores de “ a_2 ” son iguales. El valor mayor de “ b ” se encuentra en la restricción 3 y el menor en las restricciones 1, 2 y 4. El

valor mayor de “ h_y ” se encuentra en la restricción 4 y el menor en la restricción 4.

- El área mínima “ A_{min} ” aparece en el caso XI para la restricción 3, y la mayor aparece en el caso VI para la restricción 2.

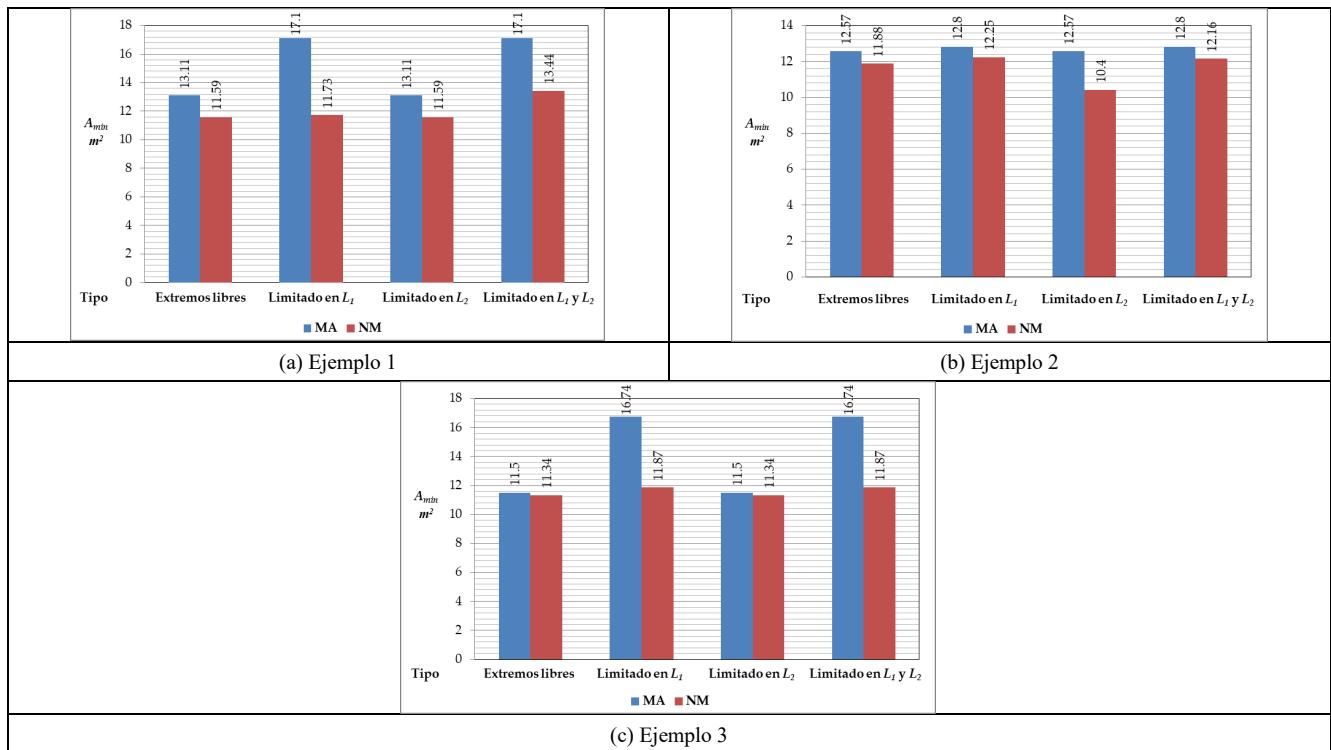


Figura 6. Comparación entre el MA y el NM.

Fuente: Autores.

- La restricción 3 muestra una zapata combinada rectangular.

Los resultados de la Tabla 8 muestran lo siguiente:

- Todos los valores son iguales para las restricciones 1 y 3, y para las restricciones 2 y 4.
- El valor menor de “ a_1 ” se encuentra en las restricciones 1 y 3, y el mayor en las restricciones 2 y 4. Todos los valores de “ a_2 ” son iguales. Todos los valores de “ b ” son iguales. El valor mayor de “ h_y ” se encuentra en las restricciones 1 y 3, y el menor en las restricciones 2 y 4.
- El área mínima “ A_{min} ” aparece en el caso Y-IIA para las restricciones 1 y 3, y la mayor aparece en el caso Y-IIA para las restricciones 2 y 4.

La Fig. 6 muestra la comparación entre el MA (modelo actual) y el NM (nuevo modelo).

En los tres ejemplos se muestra un ahorro utilizando el NM con respecto al CM. Para el ejemplo 1, el mayor ahorro se produce con un 31.40% al limitar L_1 . Para el ejemplo 2, el mayor ahorro se produce con un 17.26% al limitar L_2 . Para el ejemplo 3, el mayor ahorro se produce con un 29.09% al limitar L_1 y L_2 .

5 Conclusiones

El modelo presentado en este documento aplica únicamente para el área mínima de una zapata combinada en forma de T que soporta dos columnas alineadas sobre el eje longitudinal. Las consideraciones de este trabajo son: la zapata es rígida y el suelo que soporta a la zapata es elástico

y homogéneo, que cumple con la flexión biaxial, es decir, la variación de la presión del suelo es lineal.

Algunos autores presentan las ecuaciones para encontrar las dimensiones y la superficie mínima de una zapata, pero toda la superficie de la zapata está comprimida (ver Caso I para los tres ejemplos).

El presente trabajo concluye lo siguiente:

- El modelo propuesto presenta la superficie mínima y las funciones de restricción para los quince casos posibles (flexión biaxial) y los tres casos posibles (flexión uniaxial).
- El modelo puede ser utilizado como una revisión de la capacidad de carga admisible del suelo, tomando en cuenta la función objetivo “ σ_{max} ”, y las mismas funciones de restricción para flexión biaxial o flexión uniaxial.
- Los ejemplos muestran un ahorro significativo con el nuevo modelo en comparación con el modelo actual, como se puede observar en la Fig. 6 de las comparaciones, se tener un ahorro económico para el ejemplo 1 del 31.40%, para el ejemplo 2 un ahorro del 17.26%, y para el ejemplo 3 un ahorro del 29.09%.
- La principal ventaja de este estudio es que impacta directamente en el costo de construcción de la zapata, ya que, al presentar menor área de contacto con el suelo, genera menor volumen de relleno de zapata.
- El modelo propuesto puede utilizarse para zapatas combinadas rectangulares; simplemente se establece $a_1 = a_2$ y $b = h_y$.

6. Cuando M_{xT} es cero, la fuerza resultante se encuentra a lo largo del eje X (véase la Tabla 7).
7. Cuando M_{yT} es cero, la fuerza resultante se encuentra a lo largo del eje Y (véase la Tabla 8).
8. El modelo puede utilizarse para las siguientes consideraciones:
 - a) Lados sin restricciones ($L_1 \geq c_1/2$ y $L_2 \geq c_3/2$).
 - b) Un lado restringido en la columna 1 ($L_1 = c_1/2$ y $L_2 \geq c_3/2$).
 - c) Un lado restringido en la columna 2 ($L_1 \geq c_1/2$ y $L_2 = c_3/2$).
 - d) Dos lados restringidos (lados opuestos) ($L_1 = c_1/2$ y $L_2 = c_3/2$).

Las siguientes investigaciones pueden ser:

1. Diseño de costo mínimo asumiendo que el área de contacto con el suelo está parcialmente comprimida.
2. Área mínima para zapatas combinadas de correas asumiendo que el área de contacto con el suelo está parcialmente comprimida.
3. Área mínima para zapatas en suelos arenosos como se muestra en la Fig. 1(a).
4. Área mínima para zapatas en suelos arcillosos como se muestra en la Fig. 1(b).

Referencias

- [1] Bowles, J.E., Foundation analysis and design; McGraw-Hill, New York, USA, 2001.
- [2] Shahin, M.A., and Cheung, E.M., Stochastic design charts for bearing capacity of strip footings. *Geomechanics and Engineering*, 3(2), pp. 153-167, 2011. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2011.3.2.153>
- [3] Dixit, M.S., and Patil K.A., Experimental estimate of N_y values and corresponding settlements for square footings on finite layer of sand, *Geomechanics and Engineering*, 5(4), pp. 363-377, 2013. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2013.5.4.363>
- [4] Erzín, Y. and Gul, T.O., The use of neural networks for the prediction of the settlement of pad footings on cohesionless soils based on standard penetration test, *Geomechanics and Engineering*, 5(6), pp. 541-564, 2013. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2013.5.6.541>
- [5] Colmenares, J.E., Kang, S.-R., Shin, Y-J., and Shin, J-H., Ultimate bearing capacity of conical shell foundations, *Structural Engineering and Mechanics*, 52(3), pp. 507-523, 2014. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2014.52.3.507>
- [6] Cure, E., Sadoglu, E., Turker, E., and Uzuner, B.A., Decrease trends of ultimate loads of eccentrically loaded model strip footings close to a slope, *Geomechanics and Engineering*, 6(5), pp. 469-485, 2014. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2014.6.5.469>
- [7] Fattah, M.Y., Yousif, M.A., and Al-Tameemi, S.M.K., Effect of pile group geometry on bearing capacity of piled raft foundations, *Structural Engineering and Mechanics*, 54(5), pp. 829-853, 2015. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2015.54.5.829>
- [8] Uncuoğlu, E., The bearing capacity of square footings on a sand layer overlying clay, *Geomechanics and Engineering*, 9(3), pp. 287-311, 2015. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2015.9.3.287>
- [9] Anil, O., Akbaş, S.O., Babagiray, S., Gel, A.C., and Durucan, C., Experimental and finite element analyses of footings of varying shapes on sand, *Geomechanics and Engineering*, 12(2), pp. 223-238, 2017. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2017.12.2.223>
- [10] Khatri, V.N., Debbarma, S.P., Dutta, R.K., and Mohanty, B., Pressure-settlement behavior of square and rectangular skirted footings resting on sand, *Geomechanics and Engineering*, 12(4), pp. 689-705, 2017. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2017.12.4.689>
- [11] Mohebkhah, A., Bearing capacity of strip footings on a stone masonry trench in clay, *Geomechanics and Engineering*, 13(2), pp. 255-267, 2017. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2017.13.2.255>
- [12] Zhang, W.-X., Wu, H., Hwang, H.-J., Zhang, J.-Y., Chen, B., and Yi, W.-J., Bearing behavior of reinforced concrete column-isolated footing substructures, *Engineering Structures*, 200, art. 109744, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109744>
- [13] Turedi, Y., Emirlar, B., Ornek, M., and Yıldız, A., Determination of the bearing capacity of model ring footings: Experimental and numerical investigations, *Geomechanics and Engineering*, 18(1), pp. 29-39, 2019. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2019.18.1.029>
- [14] Gnananandarao, T., Khatri, V.N., and Dutta, R.K., Bearing capacity and settlement prediction of multi-edge skirted footings resting on sand, *Ingeniería e Investigación*, 40(3), pp. 9-21, 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.15446/ing.investig.v40n3.83170>
- [15] Gör, M., Analyzing the bearing capacity of shallow foundations on two-layered soil using two novel cosmology-based optimization techniques, *Smart Structures Systems*, 29(3), pp. 513-522, 2022. DOI: <https://doi.org/10.12989/ss.2022.29.3.513>
- [16] Chaabani, W., Remadna, M.S., and Abu-Farsakh, M., Numerical Modeling of the Ultimate bearing capacity of strip footings on reinforced sand layer overlying clay with voids, *Infrastructures*, 8(1), art. 3, 2023. DOI: <https://doi.org/10.3390/infrastructures8010003>
- [17] Vitone, D.M.A., and Valsangkar, A.J., Stresses from loads over rectangular areas, *Journal of Geotechnical Engineering*, 112(10), pp. 961-964, 1986. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1986\)112:10\(961\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1986)112:10(961))
- [18] Michalowski, R.L., Upper-bound load estimates on square and rectangular footings, *Géotechnique*, 51(9), pp. 787-798, 2001. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.2001.51.9.787>
- [19] Özmen, G., Determination of base stresses in rectangular footings under biaxial bending, *Teknik Dergi Digest*, [online]. 22(4), pp. 1519-1535, 2011. Available at: http://www.imo.org.tr/resimler/dosya_ekler/7b559795bd3f63b_ek.pdf?dergi=472
- [20] Aydogdu, I., New iterative method to calculate base stress of footings under biaxial bending, *International Journal of Engineering and Applied Sciences*, 8(4), pp. 40-48, 2016. DOI: <https://doi.org/10.24107/ij eas.281460>
- [21] Girgin, K., Simplified formulations for the determination of rotational spring constants in rigid spread footings resting on tensionless soil, *Journal of Civil Engineering Management*, 23(4), pp. 464-474, 2017. DOI: <https://doi.org/10.3846/13923730.2016.1210218>
- [22] Al-Gahtani, H.J., and Adekunle, S.K., A boundary-type approach for the computation of vertical stresses in soil due to arbitrarily shaped foundations, *World Journal of Engineering*, 16(3), pp. 419-426, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1108/WJE-02-2018-0051>
- [23] Rawat, S., Mittal, R.K., and Muthukumar, G., Isolated rectangular footings under biaxial bending: a critical appraisal and simplified analysis methodology, *Practice Periodical on Structural Design and Construction*, 25(3), art. 0471, 2020. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)SC.1943-5576.0000471](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000471)
- [24] López-Machado, N.A., Perez, G., Castro, C., Perez, J.C.V., López-Machado, L.J., Alviar-Malabet, J.D., Romero-Romero, C.A., Guerrero-Cuaspaz, D.P., and Montesinos-Machado, V.V., A structural design comparison between two reinforced concrete regular 6-Level buildings using soil-structure interaction in linear range, *Ingeniería e Investigación*, 42(1), art. 86819, 2022. DOI: <https://doi.org/10.15446/ing.investig.v42n1.86819>
- [25] Lezgy-Nazargah, M., Mamazizi, A., and Khosravi, H., Analysis of shallow footings rested on tensionless foundations using a mixed finite element model, *Structural Engineering and Mechanics*, 81(3), pp. 379-394, 2022. DOI: <https://doi.org/10.12989/sem.2022.81.3.379>
- [26] Teng, W.C., Foundation Design, Prentice-Hall Inc., New Delhi, India, 1979.
- [27] Highter, W.H., and Anders, J.C., Dimensioning footings subjected to eccentric loads, *Journal of Geotechnical Engineering*, 111(5), pp. 659-665, 1985. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1985\)111:5\(659\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1985)111:5(659))
- [28] Galvis, F.A., and Smith-Pardo, P.J., Axial load biaxial moment interaction (PMM) diagrams for shallow foundations: design aids, experimental verification, and examples, *Engineering Structures*, 213, art. 110582, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110582>

- [29] Rodriguez-Gutierrez, J.A., and Aristizabal-Ochoa, J.D., Rigid spread footings resting on soil subjected to axial load and biaxial bending. I: Simplified analytical method, International Journal of Geomechanics, 13(2), pp. 109-119, 2013. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000218](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000218)
- [30] Rodriguez-Gutierrez, J.A., and Aristizabal-Ochoa, J.D., Rigid spread footings resting on soil subjected to axial load and biaxial bending. II: Design aids, International Journal of Geomechanics, 13(2), pp. 120-131, 2013. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0000210](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0000210)
- [31] Maheshwari, P., and Khatri, S., Influence of inclusion of geosynthetic layer on response of combined footings on stone column reinforced earth beds, Geomechanics and Engineering, 4(4), pp. 263-279, 2012. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2012.4.4.263>
- [32] Konapure, C.G., and Vivek, B., Analysis of Combined rectangular footing by Winkler's Model and Finite Element Method, International Journal of Engineering and Innovative Technology, [online]. 3(5), pp. 128-132, 2013. Available at: https://www.ijedit.com/Vol%203/Issue%205/IJEIT1412201311_21.pdf
- [33] Vivek, B., Arkal, L.S., Bandgar, R.V., and Kalekhan, F.A.S., Comparative study on conventional and simplified elastic analysis of rectangular combined footing, International Journal of Research in Engineering and Technology, 3(4), pp. 422-427, 2014. DOI: <https://doi.org/10.15623/ijret.2014.0304076>
- [34] Ravi-Kumar, C., Satish-Kumar, M., Kondala-Rao, M., and Gopika, N., Numerical analysis of rectangular combined footings resting on soil for contact pressure, International Journal of Civil Engineering and Technology, [online]. 9(9), pp. 1425-1431, 2018. Available at: <https://iaeme.com/Home/issue/IJCET?Volume=9&Issue=9>
- [35] Kashani, A.R., Camp, C.V., Akhani, M., and Ebrahimi, S., Optimum design of combined footings using swarm intelligence-based algorithms, Advances in Engineering Software, 169, art. 103140, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2022.103140>
- [36] Al-Douri, E.M.F., Optimum design of trapezoidal combined footings, Tikrit Journal of Engineering Sciences, 14(1), pp. 85-115, 2007. DOI: <https://doi.org/10.25130/tjes.14.1.05>
- [37] Luévanos-Rojas, A., Optimization for trapezoidal combined footings: Optimal design, Advances in Concrete Construction, 16(1), pp. 21-34, 2023. DOI: <https://doi.org/10.12989/acc.2023.16.1.021>
- [38] Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., and Medina-Elizondo, M., A new model for T-shaped combined footings Part I: Optimal dimensioning, Geomechanics and Engineering, 14(1), pp. 51-60, 2018. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2018.14.1.051>
- [39] Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., and Medina-Elizondo, M., A new model for T-shaped combined footings Part II: Mathematical model for design, Geomechanics and Engineering, 14(1), pp. 61-69, 2018. DOI: <https://doi.org/10.12989/gae.2018.14.1.061>
- [40] Moreno-Landeros, V.M., Luévanos-Rojas, A., Santiago-Hurtado, G., López-León, L.D., Olgun-Coca, F.J., López-León, A.L., and Landaz-Gómez, A.E., Optimal cost design of RC T-Shaped combined footings, Buildings 14(11), art. 3688, 2024. DOI: <https://doi.org/10.3390/buildings14113688>
- [41] Aishwarya, K.M., and Balaji, N.C., Analysis and design of eccentrically loaded corner combined footing for rectangular columns, in: International Conference on Advances in Sustainable Construction Materials, Guntur, India, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0144289>
- [42] Moreno-Hernández, M.A., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., y Medina-Elizondo, M., Modelación matemática para zapatillas combinadas de correa en esquina apoyadas sobre el terreno: parte 1. Computación y Sistemas, 26(3), pp. 1269-1282, 2022. DOI: <https://doi.org/10.13053/cys-26-3-4079>
- [43] Luévanos-Rojas, A., Santiago-Hurtado, G., Moreno-Landeros, V.M., Olgun-Coca, F.J., López-León, L.D., and Diaz-Gurrola, E.R., Mathematical modeling of the optimal cost for the design of strap combined footings, Mathematics, 12(2), art. 294, 2024. DOI: <https://doi.org/10.3390/math12020294>
- [44] Montes-Paramo, P., Luévanos-Rojas, A., López-Chavarría, S., Medina-Elizondo, M., y Sandoval-Rivas, R., Área óptima para zapatillas combinadas rectangulares asumiendo que la superficie de contacto con el suelo trabaja parcialmente a compresión. Ingeniería, Investigación y Tecnología, 24(2), pp. 1-15, 2023. DOI: <https://doi.org/10.22201/fi.25940732e.2023.24.2.012>
- [45] Das, B.M., Sordo-Zabay, E. y Arriola-Juárez, R., Principios de ingeniería de cimentaciones, Cengage Learning Latín América, D.F., México, 2006.
- [46] McCormac, J.C., and Brown, R.H., Design of Reinforced Concrete, John Wiley & Sons, Inc., D.F., México, 2014.

A. Luévanos-Rojas, recibió su título en Ing. Civil en 1981, MSc. en Ciencias con Especialidad en Planeación y Construcción de Obras en 1990 y Dr. en Ingeniería con Especialidad en Sistema de Planeación y Construcción en 2009, todos ellos de la Universidad Juárez del Estado de Durango, Durango, México. Además, es MSc. en Estructuras en 1983 del Instituto Politécnico Nacional, Distrito Federal, México. MSc. en Administración en 2004 de la Universidad Autónoma de Coahuila. Profesor e Investigador de la Universidad Juárez del Estado de Durango (2006-2014). Profesor e Investigador de la Universidad Autónoma de Coahuila (2015-Actual). El autor tiene más de 148 artículos publicados en revistas de investigación científica internacionales. Autor de dos libros. Editor Asociado de 11 revistas internacionales. También ha participado en 100 como parte de Comités de Programas Técnicos, 15 como Editor y 19 como presidente en varios Congresos Internacionales. Pertenece al Sistema Nacional de Investigadores de México Nivel II (SNI-II). Él es Investigador Estatal Honorífico por el Estado de Coahuila, México. Ha recibido varias distinciones: Maestro distinguido ULSA (Universidad La Salle Laguna) 2002, 2007, 2010. Investigador del año 2023 por UAC (Universidad Autónoma de Coahuila). Premio al mejor artículo científico del año 2023 por UAC (Universidad Autónoma de Coahuila). Ha sido incluido en el “2023 World’s Top 2% Scientists List” por la Universidad de Stanford. Mathematical Engineering Excellence Award por “Math Scientist Awards” 2025. Best Researcher Award por “International Top Research Awards” 2025.

ORCID: 0000-0002-0198-3614

B.L. Estrada-Mendoza, recibió su título en Licenciatura en Administración de Empresas Turísticas 1992 del Instituto Tecnológico de Zacatepec, Cuernavaca, Morelos, México; MSc. en Administración con acentuación en Finanzas 2014 y Dr. en Administración y Alta Dirección 2023, estos dos de la Universidad Autónoma de Coahuila, Torreón, Coahuila, México. Profesor e Investigador de la Universidad Autónoma de Coahuila (2015-Actual). Ella es Investigador Estatal Honorífico por el Estado de Coahuila, México. ORCID: 0000-0002-3954-5310

M. Juárez-Ramírez, recibió su título en Ing. Industrial en Producción en 1993 del Instituto Tecnológico de Saltillo, Saltillo, Coahuila, México; MSc. en Productividad en 1999 y MSc. en Administración de Empresas en 2002 de la Universidad Autónoma del Noreste, Piedras Negras, Coahuila, México y Dr. en Administración y Alta Dirección en 2023 de la Universidad Autónoma de Coahuila, Torreón, Coahuila, México. Trabajó como: Gerente de Producción y Planeación (Operación) de Intrex Global Solutions Company: Eagle Pass, Texas, US (2007-2009); Gerente de Procesos y Mejora Continua de Southwest Metal Finishing Company: New Berlin, Wisconsin, US (2010-2017). Profesor e Investigador de la Universidad Autónoma de Coahuila (2017-Actual).

ORCID: 0009-0005-3870-0146