

## ESTRUCTURA DE LA TIERRA A PARTIR DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD $g(r)$

(Homenaje a Halliday - Resnick)

Jorge Alberto NARANJO\* y Gaspar MONSALVE\*\*

**Resumen:** Partiendo de algunos datos (suministrados por Halliday y Resnick) de la aceleración de la gravedad a diferentes profundidades en la tierra es posible hacer un cálculo aproximado de densidades y presiones en el interior de la tierra y del período de un péndulo geodiametral.

**Abstract:** Starting from data (provided by Halliday and Resnick) about the gravity acceleration at different depths in the earth it is possible to make an approximate calculation of densities and pressures inside the earth and the period of a geodiametral pendulum.

### INTRODUCCIÓN

Si se dispone de datos suficientes acerca del valor de la aceleración de la gravedad a distintas profundidades de la Tierra, puede hacerse un diagnóstico razonable de la densidad media de la masa del planeta hasta cada radio interior, de la densidad de cada cascarón o concha de radio  $r$ , de la presión que reina a cada profundidad, y del período de oscilación de un péndulo geodiametral (que es como el tiempo propio de la estructura gravitatoria de la tierra).

### Las ecuaciones generales para un $g(r)$ dado

Asumamos que se tiene conocida la aceleración  $g(r)$  a lo largo del radio,  $0 \leq r \leq R$ . Asumida la simetría esférica de la distribución de masa, se tendrá que:

$$\frac{GM(r)}{r^2} = \frac{4\pi}{3} \overline{\rho(r)} G \frac{r^3}{r^2} = g(r)$$

Con  $\overline{\rho(r)}$  la densidad media de la masa para la esfera de radio  $r$ ; y por tanto, que

$$\overline{\rho(r)} = \frac{3}{4\pi G} \frac{g(r)}{r} \quad (1)$$

La densidad en cada cascarón de radio  $r$  y de espesor  $dr$  resulta:

$$\rho(r) = \frac{\overline{\rho(r+dr)}(r+dr)^3 - \overline{\rho(r)}r^3}{(r+dr)^3 - r^3} = \frac{1}{4\pi G} \left( 2 \frac{g(r)}{r} + \frac{dg}{dr} \right) \quad (2)$$

\*Profesor Titular, Facultad de Minas, Departamento de Ingeniería Civil, A.A.1027, Medellín.

\*\* Estudiante Ingeniería de Geología, Facultad de Minas, A.A. 1027, Medellín

Y con éstas, se calcula fácil la variación de la presión  $p(r)$  con la distancia al centro:

$$-\frac{dp}{dr} = \rho(r)g(r) \quad (3)$$

Además se tendrá para el péndulo geodiametral que

$$\ddot{r} + g(r) = 0 \quad (4)$$

o bien que  $d(\dot{r}^2) = dv^2 = -2g(r)dr$ , ecuación incremental que permite hallar la velocidad de caída a lo largo del pozo, con lo que se halla fácil el período del péndulo geodiametral,

$$T = 4 \int_{R_t}^0 \frac{dr}{v(r)} \quad (5)$$

### Distribución homogénea de masas

La densidad de la Tierra es de 5.52 g/cc, y su radio medio es de 6370 km ( $=R_t$ ). Si la Tierra fuese una esfera homogénea, se tendría, por (1), que

$$g(r) = \frac{4\pi G}{3} \langle \rho \rangle r \quad (6)$$

con  $\overline{\rho(r)} = \rho(r) = \langle \rho \rangle$ . Entonces (3) produciría que

$$p(r) - p_{atm} = \frac{2}{3} \pi G \langle \rho \rangle^2 R_t^2 \left(1 - \frac{r^2}{R_t^2}\right) \quad (7)$$

La presión en el centro sería

$$p(0) = p_{atm} + \frac{2}{3} \pi G \langle \rho \rangle^2 R_t^2 = p_{atm} + 1.73 * 10^{12} \text{ din} / \text{cm}^2 \quad (8)$$

El péndulo geodiametral sería un oscilador armónico simple:

$$\ddot{r} + \frac{4\pi G}{3} \langle \rho \rangle r = 0 \quad (9)$$

con período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3}{4\pi \langle \rho \rangle G}} \cong 84.5 \text{ min} \quad (10)$$

### La distribución real no es homogénea.

Si la distribución fuera homogénea la gravedad disminuiría en forma lineal de la superficie al centro, ec. (6). Los datos presentados por Halliday y Resnick en su Física muestran que  $g(r)$  varía en forma muy distinta. En tal caso los resultados se alteran notablemente respecto del caso homogéneo. En las tablas y figuras siguientes se muestran los comportamientos de las densidades y presiones, gravedades conocidas, inferidos de las ecuaciones (1) a (5), utilizadas en forma incremental. El período de oscilación, en estas “oscilaciones armónicas” del péndulo geodiametral, resulta ser 0.8 veces el previsto por (10), y la presión en el centro resulta ser 2 veces la prevista por (8).

TABLA 1. Se presenta para cada profundidad (o radio) el valor de la aceleración de la gravedad, la densidad de cada esfera de radio  $r$ , la densidad media en cada concha o estrato esférico y los incrementos de presión debidos al peso de cada una de estas conchas esféricas.

Profundidad (km)	Radio (km)	Gravedad ( $m/s^2$ )	Densidad al interior ( $g/cm^3$ )	Densidad del cascarón ( $g/cm^3$ )	$\Delta P$ ( $dina/cm^2$ )* $10^8$ <sup>(1)</sup>
0	6400	9.82	5.492		0
33	6367	9.85	5.537	2.59	83.9857
100	6300	9.89	5.619	3.01	198.392
200	6200	9.92	5.727	3.42	338.587
300	6100	9.95	5.838	3.5	346.868
413	5987	9.98	5.966	3.62	406.741
600	5800	10.01	6.177	3.85	719.435
800	5600	9.99	6.385	4.31	861.88
1000	5400	9.95	6.595	4.56	911.806
1200	5200	9.91	6.821	4.71	937.043
1400	5000	9.88	7.072	4.81	952.941
1600	4800	9.86	7.352	4.93	973.184
1800	4600	9.85	7.664	5.06	998.261
2000	4400	9.86	8.021	5.17	1017.52
2200	4200	9.9	8.437	5.24	1033.89
2400	4000	9.98	8.93	5.31	1050.66
2600	3800	10.09	9.504	5.48	1094.18
2800	3600	10.26	10.2	5.55	1119.11
2900	3500	10.37	10.6	5.62	576.634
4000	2400	8	11.93	9.97	11377

<sup>(1)</sup> Incremento de presión en cada cascarón.

El último cascarón puede pensarse como la esfera más interna, a profundidades mayores que 4000 Km (radio entre 0 y 2400 Km). El incremento de la presión allí se puede calcular suponiendo una esfera homogénea, usando una expresión análoga a (8), con densidad igual a  $11.93 g/cm^3$ . De este modo se obtiene:

$$\Delta P = 1.1453 * 10^{12} \text{ din/cm}^2.$$

La presión total en el centro  $P(0)$  puede calcularse sumando todos los incrementos hallados, obteniendo lo siguiente:

$$P(0) = P_{atm} + 3.645 \cdot 10^{12} \text{ din/cm}^2.$$

que resulta ser más del doble de la presión en el centro de la tierra calculada en el caso de esfera homogénea.

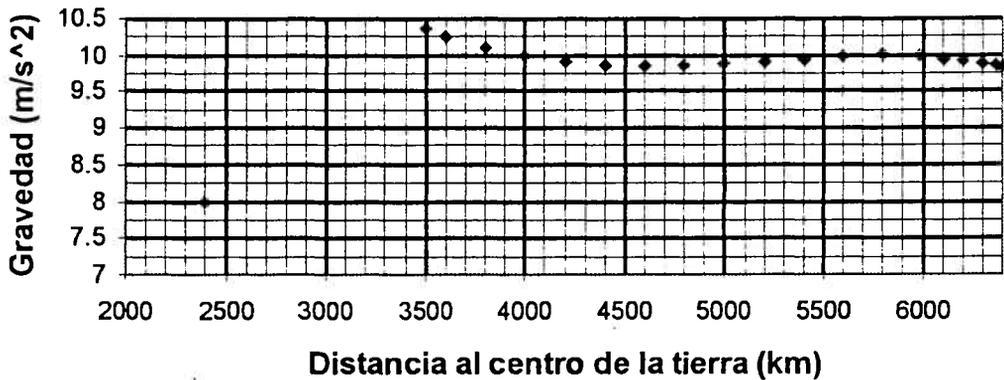


FIG 1. Se muestran los distintos valores que toma la aceleración de la gravedad a diferentes profundidades. Obsérvese el brusco ascenso cuando se pasa de un radio de 2400 Km a uno de 3500 Km.

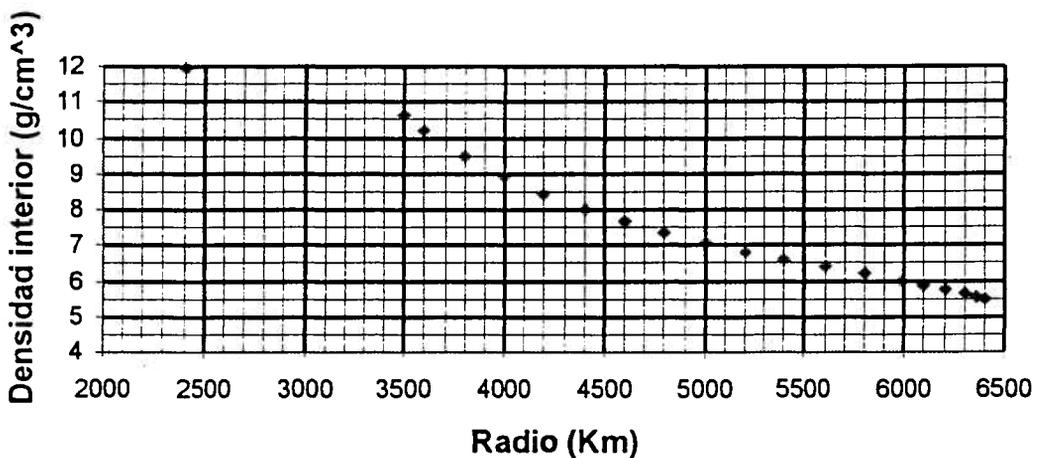


FIG 2. Cada punto de esta gráfica da información acerca de la densidad media aproximada al interior de cada radio (densidad de la esfera de radio  $r$ ).

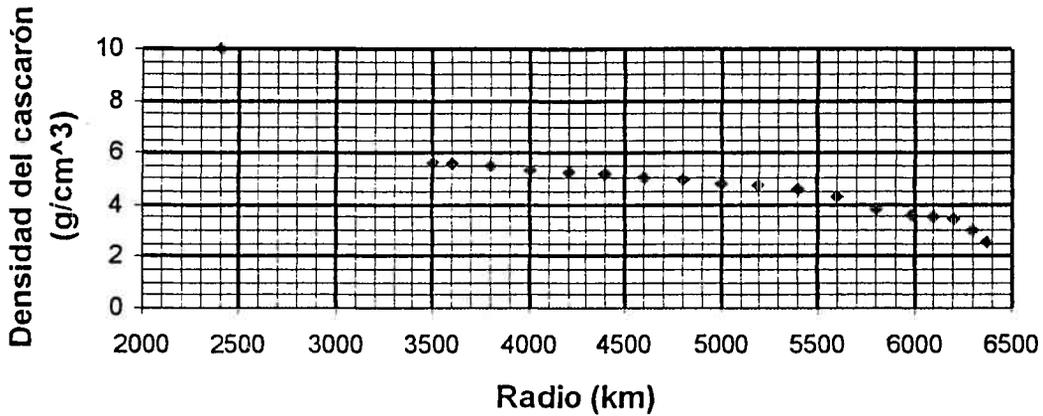


FIG 3. Gráfica que presenta la densidad media de cada cascarón o estrato esférico para cada radio (distancia al centro de la tierra). El valor de la densidad se le asigna al radio interno de tales cascarones.

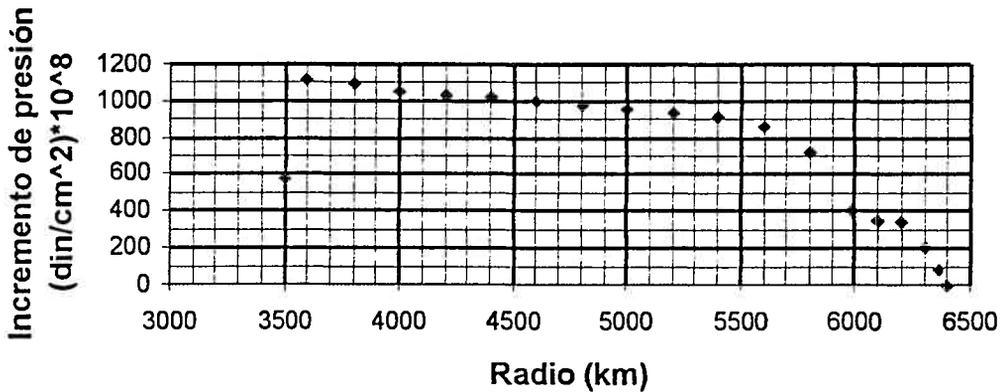


FIG 4. Se ilustra para cada radio el incremento en la presión ( $\Delta P$ ) debido al peso de cada uno de los cascarones o estratos esféricos.

### Limitaciones de estos análisis.

La Tierra sin embargo, gira alrededor de su eje, y esto induce una aceleración centrífuga no incluida en los casos aquí considerados. Con esta rotación se rompe la simetría esférica, clave en los análisis presentados. Además el movimiento de giro no es solidario, el núcleo central tiene una velocidad angular y un eje de giro diferentes de los de la parte externa. Hay pues movimientos transversales, tangentes a las propias cáscaras, esfuerzos cortantes de carácter viscoelástico, y como hay campos magnéticos saliendo y entrando en forma aproximadamente radial a ese núcleo, hay fuerzas electromagnéticas que desplazan las partes

en las propias cáscaras en dirección normal a la velocidad de la superficie. Los campos térmicos son además de alto gradiente radial, y debe haber esfuerzos térmicos radiales que habrían de agregarse a las presiones aquí consideradas. Todo esto hace que el equilibrio del planeta y la distribución interna de sus densidades, presiones, formas de simetría, velocidades de rotación y ejes sea un problema complejo, de carácter "termo-magneto - reogeodinámico".

No obstante ello, los análisis previos ofrecen estimaciones no tan malas de la estructura interna, y su valor pedagógico nos parece ejemplar. Las ecuaciones básicas no han perdido su poder predictivo: Como enseña Batchelor, a partir de estas ecuaciones se estima en primera aproximación la estructura de estrellas y núcleos galácticos.

### **BIBLIOGRAFÍA:**

BATCHELOR, G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press. 1967.

FULLER, M. LAJ. C. HERRERO-BERVERA, E. The Reversal of the Earth's Magnetic Field. American Scientist, Volume 84. 1996. Páginas 552 - 561

HALLIDAY, RESNICK. Física. Nueva Edición Actualizada. Editorial C.E.C.S.A. México. 1977. Capítulo 16. Problema 35.