

# Estimación del modelo de ruido de una imagen de energía local utilizando la distribución Weibull

Noise estimation of a local energy image

TATIANA HERNÁNDEZ CIFUENTES<sup>a,✉</sup>,  
YORLADYS MARTÍNEZ AROCA,  
CARLOS ANTONIO JACANAMEJOY JAMIOY,  
MANUEL GUILLERMO FORERO VARGAS

Universidad de Ibagué, Ibagué , Colombia

**RESUMEN.** La congruencia de fase es una técnica de procesamiento de imágenes relativamente desconocida y potente para la segmentación. No obstante, una limitación de este método es su alta sensibilidad al ruido; en ese sentido, para evitar que el ruido afecte los resultados de la segmentación, es necesaria una buena estimación de su nivel, teniendo en cuenta que en la congruencia de fase, esta estimación se realiza a partir de la imagen de la energía local. Por lo tanto, con el fin de mejorar los resultados de la técnica, es indispensable realizar una buena detección del umbral de ruido. Por esta razón, en este trabajo se introduce un método eficiente para la estimación de los parámetros de una distribución Weibull, empleada para modelar el ruido de la imagen de energía de la congruencia de fase.

*Palabras y frases clave.* Procesamiento de imágenes, métodos computacionales, estimación puntual.

*2020 Mathematics Subject Classification.* 94A08, 62-08, 62F10.

**ABSTRACT.** Phase congruency is a relatively unknown and powerful image processing technique for segmentation, which has been used in image processing. However, a limitation of this technique is its sensitivity to noise. Therefore, to prevent that noise affects segmentation results, it is necessary a good estimation of its level, considering that in phase congruency, this estimation is based on the local energy image. Consequently, to improve the results of this technique, it is essential to perform a good detection of the noise threshold.

In this work, we introduce an efficient method to estimate parameters of a Weibull distribution which is used to modelate the noise of energy image in phase congruency.

*Key words and phrases.* Image processing, Computational methods, Point estimation.

## 1. Introducción

La congruencia de fase (PC, por sus siglas en inglés) es una técnica utilizada en la segmentación de imágenes [18]. Kovesi fue pionero en llevar la PC a la práctica en el procesamiento de imágenes; esto se debe a que antes de sus aportes, las imágenes con ruido, al aplicarles esta técnica producían demasiados bordes falsos, haciendo que su aplicación se redujera a casos poco comunes en aplicaciones reales. Las principales características de la PC propuesta por Kovesi son su robustez al ruido y una buena ubicación de las regiones en las que se producen los bordes. Esta técnica permite ponderar las características importantes de la imagen, independientemente de la intensidad de la señal con valores de cero a uno, por lo que es posible aplicar un nivel de umbral global para identificar las regiones de interés [11].

En trabajos anteriores, Jacanamejoy y Forero [10, 9, 5] presentaron una modificación del método de PC, donde se propuso expandir el ancho de banda del banco de filtros para mejorar la detección de características muy cercanas; esta modificación al banco de filtros tiene una consecuencia negativa, una mayor sensibilidad al ruido. Con el fin de mejorar la estimación del umbral de ruido cuando se cambian los parámetros recomendados por Kovesi, se propuso utilizar la distribución Weibull para modelar el ruido en la imagen de energía [9]. Por lo tanto, en este trabajo se describe en detalle el método de estimación del umbral de ruido, el cual, en comparación con el método propuesto por Kovesi garantiza una mejor aproximación a los diferentes casos de modelos del ruido que aparece en las imágenes de energía.

## 2. Congruencia de fase

La fase  $\bar{\phi}(x)$  que maximiza la ecuación (1), definida en términos de las componentes de Fourier  $A_n$ , de una señal en la posición  $x$ , permite determinar la PC [15]. Es importante aclarar que hay una sutil diferencia entre una componente de frecuencia y una escala, esta diferencia está en el número con el que se pueden identificar. Para hacer la distinción, las escalas se denotan como  $\eta$ , y las componentes con  $n$ , de tal forma que la escala más pequeña,  $\eta = 1$ , es equivalente a la componente más grande,  $n = N$ .

La PC se define matemáticamente de la siguiente forma:

$$PC(x) = \max_{\bar{\phi}(x) \in [0, 2\pi]} \frac{\sum_{n=1}^N A_n \cos(\phi_n(x) - \bar{\phi}(x))}{\sum_{n=1}^N A_n}, \quad (1)$$

donde  $\phi_n(x)$  corresponde a la fase del  $n$ -ésimo armónico. El problema de optimización propuesto en la ecuación (1) se resuelve a partir del cálculo de la energía local  $E(x)$ , que es directamente proporcional a la PC. Por lo tanto, el cálculo preciso de  $E(x)$  es esencial, y de acuerdo Venkatesh y Owensse [19] se define como:

$$E(x) = PC(x) \sum_{n=1}^N A_n(x) \quad (2)$$

Existen diferentes problemas prácticos que involucran el ruido de la imagen y la dispersión de las diferentes componentes de frecuencia. Por ello, una forma completa para el cálculo de la PC se ilustra en la ecuación:

$$PC(x) = W(x) \cdot [1 - \alpha |\delta(x)|] \cdot \frac{|E(x) - T|}{E(x) + \varepsilon} \quad (3)$$

donde,

$$W(x) = \frac{1}{1 + \exp(\gamma(c - s(x)))}, \quad (4)$$

$$s(x) = \frac{1}{N} \left( \frac{\sum_{n=1}^N A_n(x)}{\varepsilon + A_{max}(x)} \right), \quad (5)$$

$W(x)$  es una función sigmoide, y  $s(x)$  es la medida de la dispersión correspondiente al espectro de frecuencias de diferentes componentes,  $c$  es un valor entre cero y uno empleado para fijar un umbral a partir del cual la distribución en frecuencia dada por  $s(x)$  se interpreta como un posible borde, y  $\gamma$  es un factor de ganancia que controla la pendiente de la penalización [11].

El segundo término de la ecuación (3) corresponde a la cuantificación de la PC, el cual es un valor entre cero y uno, donde  $\delta(x)$  es la desviación de fase promedio y  $\alpha$  la sensibilidad de la PC.

La compensación de ruido, dada por la expresión  $|E(x) - T| / (E(x) + \varepsilon)$ , hace que el término sea cero cuando  $E(x) \leq T$ , por lo tanto, es esencial fijar un umbral  $T$  adecuado para evitar detectar bordes falsos cuando hay ruido de fondo, dicho umbral  $T$  se establece de acuerdo con el nivel de ruido de la imagen. La constante  $\varepsilon$  corresponde a un pequeño valor que evita la división por cero, y aparece en las Eq. (3) y (5). Información más detallada acerca del primer y tercer factor de la Ecuación (3) se encuentra en [11] y [12] respectivamente.

### 3. Distribución Weibull

Las distribuciones Normal, Rayleigh y Exponencial se pueden utilizar como modelos del histograma de una imagen [2, 17]. Por ejemplo, la luminancia dentro de las regiones de sombra en las imágenes de sonar se pueden modelar por la

distribución Normal, mientras que la distribución de Rayleigh [16], introducida en 1880, es más precisa en las regiones de reverberación [13]. También, se ha comprobado teórica y experimentalmente que las derivadas de primer orden de una amplia variedad de texturas siguen una distribución Weibull [2, 7, 8]. Por lo tanto, una forma general de modelar los histogramas es utilizar la distribución Weibull [17], cuya función de densidad de probabilidad (pdf) es:

$$f(x; \lambda, \zeta) = \frac{\zeta}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\zeta-1} e^{-(x/\lambda)^\zeta}, \quad (6)$$

y la función de distribución acumulada (cdf)

$$F(x) = 1 - e^{-(x/\lambda)^\zeta} \quad (7)$$

donde  $\lambda > 0$  es el parámetro de escala, y  $\zeta > 0$  es el parámetro de forma de la distribución. Así, de acuerdo a la ecuación (6), si  $\zeta = 1$ , la distribución Weibull es igual a una Exponencial, si  $\zeta = 2$  a una Rayleigh, y si  $\zeta = 3$  se aproxima a una distribución normal [14, 6].

### 3.1. Estimación de parámetros

Para estimar los parámetros de la distribución Weibull se utiliza el estimador de máxima verosimilitud (MLE) [3], por lo tanto, para el caso estudiado la transformación logarítmica de la función de verosimilitud (Log-likelihood) es:

$$\text{Wlkh}(\zeta, \lambda) = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\zeta + (\zeta - 1) \cdot \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{x_i}{\lambda}\right) + n \cdot (\log(\zeta) - \log(\lambda)) \quad (8)$$

Para estimar un máximo en la ecuación (8), se utilizan las derivadas parciales respecto a los dos parámetros,  $\zeta$  y  $\lambda$ , obteniendo las ecuaciones (9) y (10) respectivamente, las cuales ya están simplificadas luego de igualar a cero.

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\zeta\right) - n = 0 \quad (9)$$

$$\frac{n}{\zeta} - \left(\sum_{i=1}^n \log\left(\frac{x_i}{\lambda}\right) \cdot \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\zeta\right) + \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{x_i}{\lambda}\right) = 0 \quad (10)$$

Para hallar  $\zeta$ , se despeja  $\lambda^\zeta$  en la ecuación (9), dicho valor se reemplaza en (10) para obtener así la ecuación (11) que se puede resolver utilizando métodos numéricos.

$$\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\zeta \cdot \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\zeta} = 0 \quad (11)$$

### 4. Método propuesto

La distribución de información de una imagen puede ser determinada por su energía local. Si la energía local se representa por medio de una imagen monocromática, la información puede cuantificarse en niveles de gris; donde los píxeles con valores más altos corresponden a las regiones con más información (bordes, crestas y valles) y los cercanos a cero a las regiones de poco interés, en donde no se debe calcular la congruencia de fase para evitar detectar bordes falsos.

#### 4.1. Estimación de los parámetros de la distribución Weibull

Para estimar el modelo de ruido de la imagen de energía de acuerdo a la distribución Weibull se parte de la ecuación (11), en donde cada  $x_i$  corresponde a un pixel, siendo  $n$  igual al número total de pixeles. Por lo tanto, para hallar  $\zeta$  se utiliza el método de Newton-Raphson [20] según la ecuación

$$x_{i+i} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \tag{12}$$

que para el caso estudiado, la función corresponde a

$$f(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^\zeta \cdot \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^\zeta}, \tag{13}$$

de tal forma que la ecuación (12) se ajusta a

$$\zeta_{j+1} = \zeta_j - \frac{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^{\zeta_j} \cdot \log(x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^{\zeta_j}} + \frac{1}{\zeta_j} + \frac{\sum_{i=1}^n \log(x_i)}{n}}{-\frac{1}{\zeta_j^2} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{\zeta_j} \cdot \log(x_i)^2}{\sum_{i=1}^n x_i^{\zeta_j}} + \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^{\zeta_j} \cdot \log(x_i))^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^{\zeta_j})^2}}, \tag{14}$$

la cual tiene una estructura que implica un alto costo computacional. Con el fin de reducirlo, la primera estrategia es precalcular  $x_i^{\zeta_j}$  y  $\log(x_i)$ , que se denotan como  $z_i$  y  $w_i$ , respectivamente. También se precálculan las sumatorias, puesto que algunas de ellas aparecen más de una vez en la ecuación (14), donde se presentan cuatro tipos de sumatorias diferentes:

$$\sum_{i=1}^n w_i = s_w, \quad \sum_{i=1}^n z_i = s_z, \quad \sum_{i=1}^n w_i \cdot z_i = s_{wz}, \quad \sum_{i=1}^n w_i^2 \cdot z_i = s_{w^2z}, \tag{15}$$

de tal forma que el algoritmo recursivo para hallar  $\zeta$  queda determinado por:

$$\zeta_{j+1} = \zeta_j - \frac{\frac{1}{\zeta_j} + \frac{s_w}{n} - \frac{s_{wz}}{s_z}}{-\frac{s_{w^2z}}{s_z} + \frac{s_{wz}^2}{s_z^2} - \frac{1}{\zeta_j^2}}. \tag{16}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (16), con los datos precalculados se ahorra costo computacional de manera significativa. Por ejemplo, para el caso de la sumatoria  $s_z$ , se pasa de calcular tres veces a solo una vez. Además, debido a que los datos en imágenes se suelen ajustar en una escala de grises de 0 a 255, con lo cual se tiene un histograma de 256 clases, es posible simplificar cada sumatoria teniendo en cuenta la frecuencia de cada clase; de esta manera, la sumatoria de  $n$  datos que dependen del número de píxeles de la imagen se evita calculando únicamente la sumatoria de tan solo 256 términos, en donde cada término corresponde al producto de la clase y su frecuencia, tal como se indica en las siguientes expresiones:

$$\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{k=0}^{255} w_k \cdot y_k, \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i = \sum_{k=0}^{255} y_k \cdot z_k, \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot z_i = \sum_{k=0}^{255} w_k \cdot y_k \cdot z_k, \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i^2 \cdot z_i = \sum_{k=0}^{255} w_k^2 \cdot y_k \cdot z_k, \quad (20)$$

donde  $y_k$  es la frecuencia de la  $k$ -ésima clase. Finalmente, para hallar el parámetro de escala,  $\lambda$ , se utiliza el valor calculado de  $\zeta$  en la ecuación (9).

Es importante tener en cuenta que para estimar el modelo del ruido, la imagen de energía también tiene información; por lo tanto, para una buena aproximación se debe estimar un fondo preliminar a partir del cual se ajusta a la distribución Weibull. Ejemplos de los fondos e histogramas donde se aplicó el método se pueden apreciar en las figuras 1 - 4.

En la figura 1 se analiza el caso de una imagen sintética carente de ruido, de la cual se tiene su imagen de energía en 1b con su respectivo histograma en 1c. En este caso, se evidencia que el histograma se parece a una distribución exponencial, pero cuando se analiza únicamente el fondo, se observa su histograma tiende a tener una forma más cercana a una distribución Rayleigh (ver figura 1e), donde, de acuerdo a la distribución Weibull el parámetro de forma estimado es 1.81. Por otra parte, en la figura 2 se utiliza la imagen sintética con un ruido Gaussiano, y se puede apreciar que el histograma de la imagen de energía toma la forma de una distribución Rayleigh; en este caso, su parámetro de forma estimado fue de 2.00. Las variaciones del parámetro de forma, implican que no siempre es una distribución Rayleigh, por ejemplo, un caso donde se aleja más del ideal es la imagen de una hoja, que se observa en la figura 4,

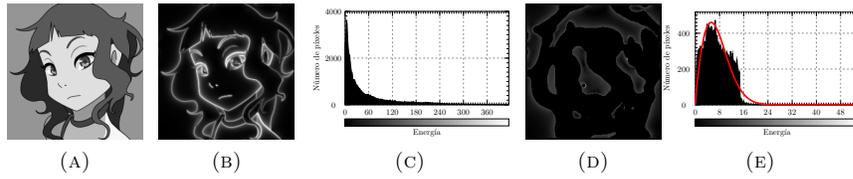


FIGURA 1. (a) Imagen sintética. (b) Imagen de energía. (c) Histograma de (b). (d) Fondo de (b). (e) Histograma de (d), con valores estimados  $\zeta = 1.8138$  y  $\lambda = 8.1635$ .

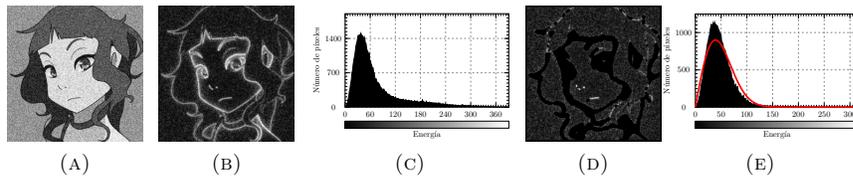


FIGURA 2. (a) Imagen sintética con ruido Gaussiano con  $\sigma$  de 25. (b) Imagen de energía. (c) Histograma de (b). (d) Fondo de (b). (e) Histograma de (d) con valores estimados  $\zeta = 2.0044$  y  $\lambda = 55.2707$ .

donde el parámetro de forma desciende a 1.76, en cambio en la imagen de botes de la figura 3 es de 1.92.

#### 4.2. Estimación del umbral de ruido

Como se mencionó anteriormente, la energía local es mayor en las regiones de interés con respecto al fondo, pese a ello, en niveles de grises intermedios hay mayor probabilidad de que estén mezclados. Por lo tanto, al determinar un valor de umbral para la segmentación de los objetos del fondo hay un compromiso entre el ruido descartado y la información que se quiere preservar; por esta

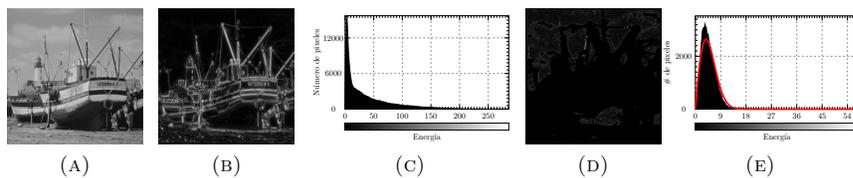


FIGURA 3. (a) Imagen de botes. (b) Imagen de energía. (c) Histograma de (b). (d) Fondo de (b). (e) Histograma de (d) con valores estimados  $\zeta = 1.9193$  y  $\lambda = 5.5662$ .

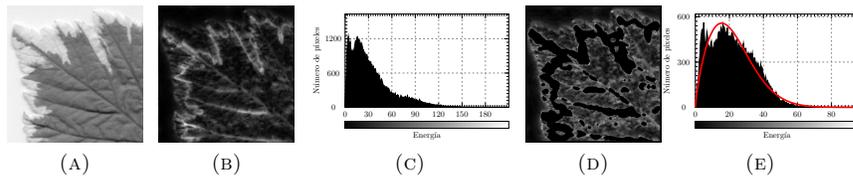


FIGURA 4. (a) Imagen de hoja. (b) Imagen de energía. (c) Histograma de (b). (d) Fondo de (b). (e) Histograma de (d) con valores estimados  $\zeta = 1.7600$  y  $\lambda = 24.7546$ .

razón, la estimación adecuada del umbral propende por encontrar un valor que permita reducir el ruido de la imagen minimizando la pérdida de información.

Teniendo en cuenta un umbral  $x_u$ , de acuerdo a la ecuación (7), el valor de  $F(x_u)$  es igual a la cantidad de ruido a descartar,  $R$ , que corresponde a un valor entre cero y uno. Por lo tanto, a partir de la ecuación (7) se deduce la ecuación (21), la cual, una vez conocidos los parámetros de la distribución Weibull y la cantidad de ruido a descartar permite calcular el valor umbral  $x_u$ .

$$x_u = \lambda (-\ln(1 - R))^{1/\zeta} \quad (21)$$

Cuando un conjunto de imágenes puede caracterizarse mediante un tipo particular de ruido, dado que el parámetro de forma es relativamente constante en todas ellas, una forma rápida de estimar un umbral apropiado  $x_u$ , es encontrar un valor proporcional a la moda del nivel de gris en el histograma de la imagen de energía local. Por lo tanto, empleando la ecuación de la moda de la distribución Weibull  $x_m$  dada por

$$x_m = \lambda \left( \frac{\zeta - 1}{\zeta} \right)^{1/\zeta}, \quad (22)$$

se propone hacer el nivel de umbral  $x_u$  igual a un producto entre el factor  $p$  y la moda, es decir,

$$x_u = px_m. \quad (23)$$

Sustituyendo las ecuaciones (21) y (22) en la ecuación (23), se halla que el factor  $p$  depende únicamente del parámetro de forma, según se observa en la ecuación

$$p = \left( \frac{\zeta \ln(1 - R)}{1 - \zeta} \right)^{1/\zeta}. \quad (24)$$

Esta estrategia es recomendable cuando se ha caracterizado un tipo particular de ruido en las imágenes estudiadas. Por lo tanto, por eficiencia se puede

Imagen	$\lambda$	$\zeta$	$x_u$	$p$	$p_0$
Sintética	8.1635	1.8138	14.9481	2.8485	2.4477
Sintética con ruido	55.2707	2.0044	95.5484	2.4403	2.4477
Botes	5.5662	1.9193	9.8589	2.5992	2.4477
Hoja	24.7546	1.7600	46.1739	3.0058	2.4477

TABLA 1. Umbrales calculados a partir de los parámetros estimados de la distribución Weibull.

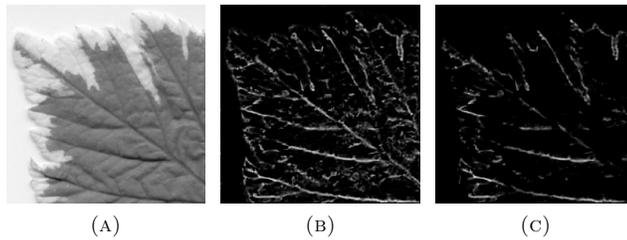


FIGURA 5. (a) Imagen de hoja. (b) PC asumiendo  $\zeta = 2$ . (c) PC tomando  $\zeta = 1.7600$ .

utilizar un valor constante de  $p$  según el parámetro  $\zeta$  estimado para todo un conjunto de imágenes. Por ejemplo, para descartar más del 95 % de ruido, si se tiene  $\zeta \approx 1.1$ , se requiere un factor  $p \approx 23.98$ ; y si  $\zeta \approx 2$  entonces  $p \approx 2.45$ .

Para las imágenes de las figuras 1 - 4, tomando  $R = 0.95$ , en cada caso se calculó el umbral  $x_u$ , el factor  $p$  según el  $\zeta$  estimado y el factor  $p_0$  asumiendo una distribución Rayleigh, es decir  $\zeta = 2$ . Los resultados obtenidos mostrados en la tabla 1 permiten observar el valor de  $\zeta$ , en donde se aprecia que para la imagen "hoja"  $\zeta$  está más alejada de dos y, por lo tanto, su forma se aleja más de una distribución Rayleigh.

En la figura 5 se observa la diferencia en los resultados de la congruencia de fase cuando se asume  $\zeta = 2$  en comparación con la técnica propuesta al calcular el umbral a partir del modelo estimado con la distribución Weibull. En la figura 5b se aprecia una mayor cantidad de ruido en el resultado; en cambio, en la figura 5c, cuando se utiliza el parámetro de forma estimado, se tiene una mejor eliminación de ruido, aunque se pierden algunos bordes. Con el fin de observar de una manera más precisa los resultados se tiene la figura 6, la cual contiene los mismos resultados ilustrados en la figura 5, resaltando en color verde los bordes ideales. De esta manera, se aprecia que un mejor modelo de ruido reduce la detección de bordes falsos, los cuales corresponden a niveles entre blanco y gris en las imágenes 6b y 6c, en donde la figura 6b es la que tiene la mayor cantidad de bordes falsos.

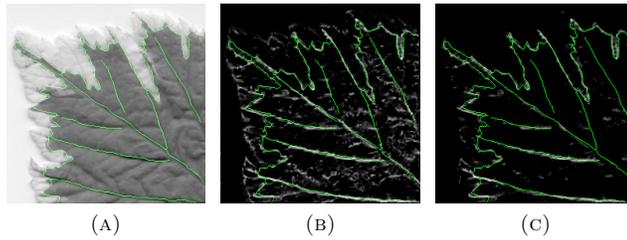


FIGURA 6. Resaltado de bordes ideales en color verde. (a) Imagen de hoja. (b) PC asumiendo  $\zeta = 2$ . (c) PC tomando  $\zeta = 1.7600$ .

Imagen	Dice-Sorensen (DS)	Abdou y Pratt (FOM)
PC asumiendo $\zeta = 2$	0.18371	0.55170
PC tomando $\zeta = 1.7600$	0.20817	0.76070

TABLA 2. Resultado de métricas para comparar los resultados de la detección de bordes en la imagen de hoja.

Para analizar los resultados de forma cuantitativa, se calcularon las métricas del coeficiente de Dice-Sorensen (DS) [4] y la figura de mérito de Abdou y Pratt (FOM) [1]. Dado que las métricas DS y FOM se emplean en imágenes binarias, se umbralizó el resultado de congruencia de fase en el nivel 0.23. La tabla 2 muestra los diferentes índices obtenidos, en donde se evidencia que de acuerdo a las dos métricas escogidas hay mejor detección de bordes en el caso en que se toma  $\zeta = 1.7600$ ; es decir, cuando se calcula el umbral utilizando el modelo de ruido empleando la distribución Weibull.

En el caso de la imagen "sintética", los niveles de intensidad del fondo están localizados en la parte oscura de la escala de grises, como se observa en la figura 1e, donde la mayor parte del fondo tiene niveles entre cero y dieciséis; por lo cual, si el umbral es superior a este valor, dado que es una imagen con poco ruido, los resultados de la congruencia de fase no son afectados de manera significativa. En los casos de la "imagen sintética con ruido" y los "botes", ilustrados en las figuras 2e y 3e respectivamente, el parámetro de forma es cercano a dos, es decir, la distribución del ruido se aproxima a una Rayleigh, por lo que sus resultados no se diferencian significativamente respecto a los obtenidos con la técnica de Kovsi [12].

## 5. Conclusiones

La congruencia de fase es una poderosa técnica de procesamiento de imágenes para la segmentación. Sin embargo, una limitación importante es su sensibilidad al ruido y su cálculo no es adecuado cuando el ruido de la imagen de energía no puede estimarse de forma precisa mediante una distribución Rayleigh. Por

lo tanto, para evitar que el ruido afecte los resultados de la segmentación, se propuso un nuevo método de estimación del nivel de ruido a partir de la distribución de Weibull de la imagen de energía local. No obstante, su cálculo automático aún es un problema en estudio, lo cual conlleva a limitar su uso a personal experto.

En este sentido, como paso siguiente se sugiere la automatización del cálculo del umbral de ruido que permita una buena respuesta de la congruencia de fase independientemente de los parámetros y tipo de imagen. Lo anterior resulta ser esencial para optimizar el tiempo invertido en el procesamiento de imágenes y mejorar tanto su confiabilidad como reproducibilidad al reducir la intervención humana.

### Referencias

- [1] I.E. Abdou and W.K. Pratt, *Quantitative design and evaluation of enhancement/thresholding edge detectors*, Proceedings of the IEEE **67** (1979), no. 5, 753–763.
- [2] I Ben Ayed, Nacera Hennane, and Amar Mitiche, *Unsupervised variational image segmentation/classification using a weibull observation model*, IEEE Transactions on Image Processing **15** (2006), no. 11, 3431–3439.
- [3] J Constante, A Cuesta, and D Jijón, *Fitting methods of two-parameter weibull of wind series and electric-wind potential estimation métodos de ajuste de weibull de dos parámetros en series de viento y estimación del potencial eolo-eléctrico*, Arenal **1** (2021), no. 78,889, 78–889.
- [4] Lee R Dice, *Measures of the amount of ecologic association between species*, Ecology **26** (1945), no. 3, 297–302.
- [5] Manuel G. Forero and Carlos A. Jacanamejoy, *Unified mathematical formulation of monogenic phase congruency*, Mathematics **9** (2021), no. 23, 3080.
- [6] M Ganji, H Bevrani, N Hami Golzar, and S Zabihi, *The weibull-rayleigh distribution, some properties, and applications.*, Journal of Mathematical Sciences **218** (2016), no. 3.
- [7] Jan-Mark Geusebroek and Arnold WM Smeulders, *Fragmentation in the vision of scenes*, null, IEEE, 2003, p. 130.
- [8] Jan-Mark Geusebroek, Arnold WM Smeulders, et al., *A physical explanation for natural image statistics*, Proceedings of the 2nd International Workshop on Texture Analysis and Synthesis (Texture 2002), Heriot-Watt University, 2002, pp. 47–52.

- [9] Carlos Jacanamejoy, Nohora Meneses-Casas, and Manuel G Forero, *Image feature detection based on phase congruency by monogenic filters with new noise estimation*, Iberian Conference on Pattern Recognition and Image Analysis, Springer, 2019, pp. 577–588.
- [10] Carlos A. Jacanamejoy and Manuel G. Forero, *A note on the phase congruence method in image analysis*, Iberoamerican Congress on Pattern Recognition, Springer, 2018, pp. 384–391.
- [11] Peter Kovési, *Image features from phase congruency*, Videre: Journal of computer vision research **1** (1999), no. 3, 1–26.
- [12] ———, *Matlab and octave functions for computer vision and image processing*, Available at <http://www.peterkovesi.com/matlabfns/#phasecong>, 2013.
- [13] Max Mignotte, Christophe Collet, Patrick Perez, and Patrick Bouthemy, *Sonar image segmentation using an unsupervised hierarchical mrf model*, IEEE transactions on image processing **9** (2000), no. 7, 1216–1231.
- [14] Douglas C Montgomery and George C Runger, *Applied statistics and probability for engineers*, John Wiley & Sons, 2010.
- [15] M Concetta Morrone and Robyn A Owens, *Feature detection from local energy*, Pattern recognition letters **6** (1987), no. 5, 303–313.
- [16] Lord Rayleigh, *Xii. on the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science **10** (1880), no. 60, 73–78.
- [17] H Steven Scholte, Sennay Ghebreab, Lourens Waldorp, Arnold WM Smeulders, and Victor AF Lamme, *Brain responses strongly correlate with weibull image statistics when processing natural images*, Journal of Vision **9** (2009), no. 4, 29–29.
- [18] Heidi M Sosik and Robert J Olson, *Automated taxonomic classification of phytoplankton sampled with imaging-in-flow cytometry*, Limnology and Oceanography: Methods **5** (2007), no. 6, 204–216.
- [19] S Venkatesh and R Owens, *An energy feature detection scheme*, ICIP’89: IEEE International Conference on Image Processing: conference proceedings, 5-8 September 1989, Singapore, IEEE, 1989.
- [20] Tjalling J Ypma, *Historical development of the newton–raphson method*, SIAM review **37** (1995), no. 4, 531–551.

(Recibido en mayo de 2024. Aceptado en mayo de 2024)

ÁREA DE MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD DE IBAGUÉ  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES  
CARRERA 22 CALLE 67 B/AMBALÁ  
IBAGUÉ, COLOMBIA  
*e-mail:* [tatiana.hernandez@unibague.edu.co](mailto:tatiana.hernandez@unibague.edu.co)  
*e-mail:* [yorladys.martinez@unibague.edu.co](mailto:yorladys.martinez@unibague.edu.co)  
*e-mail:* [carlos.jacanamejoy@unibague.edu.co](mailto:carlos.jacanamejoy@unibague.edu.co)  
*e-mail:* [manuel.forero@unibague.edu.co](mailto:manuel.forero@unibague.edu.co)