

# Funciones de cuantificación en el cálculo de la congruencia de fase

Quantization functions in phase congruence calculation

KARLA LILIANA PENAGOS VIATELA<sup>✉</sup>,  
MAXIMILIANO MACHADO HIGUERA,  
CARLOS ANTONIO JACANAMEJOY JAMIOY,  
MANUEL G. FORERO

Universidad de Ibagué, Ibagué , Colombia

**RESUMEN.** La congruencia de fase es una técnica de detección de bordes de imágenes que, mediante el análisis de la fase de los componentes de frecuencia de una señal, permite encontrar la ubicación de los bordes. Según la función matemática utilizada para la cuantificación de la congruencia de fase, el resultado de la segmentación presenta variabilidad, lo cual puede resultar en una mejora potencial en la detección. Por ello, en este trabajo se realiza un estudio de la función exponencial, boxcar y cuártica utilizando dos métricas para la evaluación de técnicas de segmentación, el índice de Dice-Sorensen y la figura de mérito de Pratt. Para este estudio, se introduce una pequeña base de datos que incluye 30 imágenes originales y sus correspondientes imágenes de referencia. Además, para comparar la congruencia de fase con las técnicas basadas en el gradiente, se compararon los resultados con los obtenidos con el método de detección Canny, encontrando que la congruencia de fase permite una mejor detección de bordes en la mayoría de los casos.

*Palabras y frases clave.* Procesamiento de imágenes, métodos computacionales, métodos computacionales para procesamiento de imágenes.

*2020 Mathematics Subject Classification.* 94A08, 62-08, 68U10.

**ABSTRACT.** Phase congruency is an image edge detection technique that allows for the localization of edges by analyzing the phase of frequency components within a signal. The quantification of phase congruency using different mathematical functions introduces variability in the segmentation results, which can potentially enhance edge detection. Therefore, this study investigates the exponential, boxcar, and quartic functions, employing two metrics, namely

the Dice-Sorensen index and Pratt's figure of merit, for segmentation evaluation. For this study, a small database comprising 30 original images and their corresponding ground truth images is introduced. Furthermore, to compare phase congruency with gradient-based techniques, the results were compared with those obtained with the Canny detection method, finding that phase congruency allows better edge detection in most cases.

*Key words and phrases.* Image processing, Computational methods, Computing methodologies for image processing.

## 1. Introducción

La detección de bordes es una técnica de procesamiento de imágenes digitales que detecta los contornos de los objetos a partir de los cambios de brillo. Los bordes pueden utilizarse para determinar el tamaño, la orientación y las propiedades de la región de interés dentro de una imagen. Existen diferentes técnicas utilizadas para la detección de bordes. Una de ellas es la congruencia de fase, una técnica aún bastante desconocida en el campo, la cual fue propuesta por Kovesi en 1996 y se basa en el análisis de la fase de los componentes de frecuencia de una señal para encontrar la ubicación de los bordes en una imagen [7]. Sin embargo, es importante destacar que la implementación de la congruencia de fase es matemática y computacionalmente más compleja que las técnicas tradicionales de detección de bordes, requiriendo el ajuste de un mayor número de parámetros en comparación con los métodos más populares [4]. A diferencia de los detectores de bordes más tradicionales, como las máscaras de convolución de Roberts, Prewitt, Sobel y Feldman, y los detectores de bordes de Canny [2] y Deriche, que están diseñados para detectar bordes escalonados, la congruencia de fase también permite detectar crestas y valles.

La función utilizada para calcular la congruencia de fase mediante filtros monogénicos (MPC) ha sido objeto de estudio en investigaciones recientes [9, 5, 4]. En general, la MPC puede entenderse como el producto de tres factores, como se observa en la ecuación (1), donde el primer factor corresponde a la ponderación de la distribución de frecuencias, el segundo a la cuantificación de la congruencia de fase y por último la compensación del ruido. Siendo el segundo de especial interés porque refleja los fundamentos de la técnica, mientras que los otros dos factores se deben a las limitaciones de una implementación práctica [4].

$$MPC(x) = W(x)PCQ(x)NC(x) \quad (1)$$

En un estudio previo se evaluó la congruencia de fase utilizando diferentes funciones de cuantificación [5], donde los mejores resultados se obtuvieron al utilizar la función exponencial, boxcar y cuártica. Las imágenes de los bordes, resultantes de aplicar las diferentes funciones de cuantificación, se compararon únicamente con una métrica de evaluación. Además, las imágenes utilizadas no se eligieron de forma arbitraria, introduciendo así un sesgo no intencionado en el

resultado. Por ello, en este trabajo se utilizan treinta imágenes originales, seleccionadas aleatoriamente, puesto que este número se considera estadísticamente válido proporcionando una base sólida para realizar inferencias y obtener conclusiones confiables sobre el rendimiento del método [10, 8]. También, se incluye una segunda métrica, la figura de mérito de Abdou y Pratt, para complementar la evaluación de los resultados.

Este documento está organizado de la siguiente manera. En la sección 2 se describen los materiales utilizados para realizar los experimentos propuestos y el método empleado. La sección 3 presenta los resultados obtenidos al segmentar las imágenes a partir de la congruencia de fase y el método de detección de Canny. La sección 4 presenta las conclusiones extraídas del trabajo. También se exhiben las imágenes y los resultados obtenidos al comparar la detección obtenida con las funciones de cuantificación de congruencia de fase, el método de Canny y las imágenes de referencia, utilizando los índices de Dice y la figura de mérito de Abdou y Pratt.

## 2. Materiales y métodos

Para construir la base de datos se utilizaron veinte fotografías de diferentes objetos y diez imágenes sintéticas, todas en escala de grises, que incluyen principalmente los tres tipos de bordes claramente observables. Se construyó una imagen ground truth de cada una de ellas, que fue evaluada por dos personas. Para obtener la congruencia de fase de las imágenes obtenidas se utilizó un software previamente desarrollado en Java como complemento del software ImageJ [6] para evaluar la base de datos y la referencia.

Para evaluar la utilidad de la base de datos construida, se procesaron las imágenes con las técnicas de detección de bordes Canny y de congruencia de fase. Se eligió la técnica de Canny porque aún se considera en el estado del arte entre las técnicas tradicionales basadas en gradiente y la congruencia de fase que actualmente está en estudio, porque presenta mejores resultados que la técnica de Canny, ya que responde a tres tipos diferentes de borde. Para binarizar las imágenes resultantes de estas dos técnicas, se emplearon los pasos sugeridos por Canny, es decir, la supresión no máxima y el umbral de histéresis.

### 2.1. Funciones de cuantificación

En un estudio anterior [5], se determinó que las funciones exponencial, boxcar y cuártica ofrecen la mejor detección de bordes cuando se emplean como funciones de cuantificación. Por lo cual, en este trabajo se escogieron las mismas funciones, las cuales se definen formalmente a continuación:

**Definición 2.1** (Función Exponencial). Dada la función

$$f_E : [-\pi, \pi] \longrightarrow [0, 1].$$

definida

$$f_E = \exp(-k|x|) \quad (2)$$

con  $k > 0$ .

Entonces se dice que la función  $f_E$  es una Función Exponencial para este trabajo.

**Definición 2.2** (Función tipo Cuartica). Dada la función

$$f_C : [-\pi, \pi] \longrightarrow [0, 1].$$

definida

$$f_C(x) = \max(-\alpha x^4 + 1, 0), \forall x. \quad (3)$$

Con  $\alpha \geq 0$ .

Entonces se dice que la función  $f_C$  es una Función tipo Cuartica para este trabajo.

**Definición 2.3** (Función tipo Boxcar). Dada la función

$$f_B : [-\pi, \pi] \longrightarrow [0, 1].$$

definida

$$f_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < x_0, \\ 0.1 & \text{if } |x| = x_0, \\ 0 & \text{if } |x| > x_0. \end{cases} \quad (4)$$

Entonces se dice que la función  $f_B$  es una Función tipo Boxcar para este trabajo.

Las funciones utilizadas para cuantificar la congruencia de fase tienen características en común: simetría par con máximo global en uno y codominio de cero a uno. Teniendo en cuenta estas características, se planteó el concepto de apertura para una función de acuerdo a la definición 2.4, esto se hizo con el fin de poder comparar los resultados de detección de bordes en cuanto a la configuración de sus parámetros.

**Definición 2.4** (Propiedad de apertura de una función). Sea una función par

$$f(x) : [-\pi, \pi] \longrightarrow \Omega = [0, 1].$$

Se define el parámetro  $x_0$  como la apertura de la función  $f(x)$ , donde el intervalo  $[-x_0, x_0] \subset [-\pi, \pi]$  cumple que:

- $f(x) = 0.1$  siempre que  $x = \pm x_0$
- $f(x) > 0.1$  siempre que  $x \in (-x_0, x_0)$ .

En la figura 1 se aprecian las diferentes funciones de cuantificación utilizadas, indicando de manera gráfica el concepto de apertura.

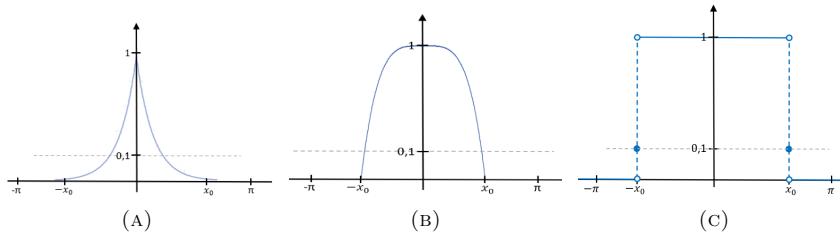


FIGURA 1. Funciones de cuantificación. (a) Exponencial. (b) Tipo cuártica. (c) Tipo Boxcar.

## 2.2. Métricas para evaluar técnicas de detección de bordes

En este trabajo, se utilizaron como métricas la figura de mérito de Pratt de Abdou y Pratt (FOM) y el coeficiente de Dice-Sorensen (DS). Estas métricas se utilizan sobre imágenes binarizadas y devuelvan valores entre cero y uno, donde cero significa que no hay similitudes encontradas entre la imagen resultante y la ground truth, y el uno significa que la imagen ideal es igual a la imagen resultante, es decir, que todos los píxeles en la imagen de los bordes detectados se encuentran en la misma posición que los píxeles de la imagen referencia. Se decidió utilizar estas dos métricas porque son complementarias, es decir, el índice Dice-Sorensen pondera los píxeles de forma binaria, con uno y cero si hay o no coincidencia de los bordes, y la figura de mérito de Abdou y Pratt tiene en cuenta la distancia entre ellos.

El coeficiente de similitud de Dice, también conocido como índice de Dice-Sorensen o simplemente coeficiente de Dice, y que denotamos por DS, es una herramienta estadística que mide la similitud entre dos conjuntos de datos, A y B, por medio del cálculo de la intersección de ambos conjuntos, es decir, aquellos elementos que tienen en común. Este índice se ha convertido en una de las herramientas más usadas para la validación de algoritmos de segmentación de imágenes [3]

$$DS = \frac{2|A \cap B|}{|A| + |B|} \quad (5)$$

Abdou y Pratt propusieron esta métrica en 1978 [1], la cual utiliza la distancia euclíadiana para comparar la imagen referencia y la imagen resultante. La figura de mérito está dada por

$$FOM = \frac{1}{\max(N_i, N_d)} \sum_{i=1}^{N_d} \frac{1}{1 + \alpha d_i^2} \quad (6)$$

donde  $\alpha$  es un factor de escala y  $d_i$  es la distancia entre un píxel de borde y el píxel más cercano en la imagen ideal.

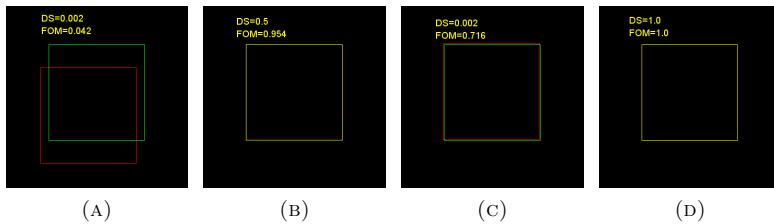


FIGURA 2. Métricas para la evaluación de bordes, en verde los bordes de referencia, en rojo los bordes detectados que no coinciden con la referencia, y en amarillo los bordes que coinciden. (a) Mala detección de bordes. (b) Coincidencia de dos lados. (c) Coincidencia de dos píxeles. (d) Coincidencia total.

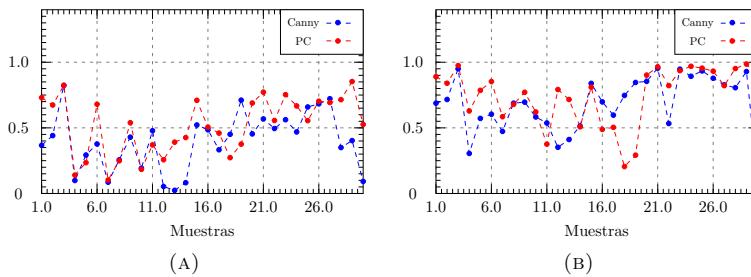


FIGURA 3. Índices de evaluación de bordes obtenidos sobre treinta imágenes de muestra. (a) Dice-Sorensen. (b) Figura de mérito.

En la figura 3 se observa el modo en que se pueden complementar las dos figuras de mérito, esto es porque por ejemplo para el caso en que solo coinciden dos píxeles la métrica DS indica una pobre detección de bordes, pero si se observan las figuras 2a y 2c al complementar con la figura de mérito se puede establecer un mejor criterio para saber cual de los dos casos es una mejor detección de bordes.

### 3. Análisis de los resultados

En la figura 3 se presentan las gráficas de los índices Dice-Sorensen y la figura de mérito calculadas al comparar las 30 imágenes de referencia y los resultados obtenidos con los métodos de detección de bordes Canny y las funciones de cuantificación de congruencia de fase. Tanto en la evaluación hecha por el método de Dice-Sorensen como con la figura de mérito, en la mayoría de las imágenes, la congruencia de fase produce mejores índices que el método de Canny para la detección de bordes. Esto se debe a que la congruencia de fase responde asertivamente a los tres tipos de bordes, mientras que el método de Canny fue diseñado específicamente para los bordes de tipo escalonado. En los casos en los que hay bordes de tipo cresta o valle, se pueden inducir errores al interpretar el resultado obtenido con la figura de mérito, esto sucede porque

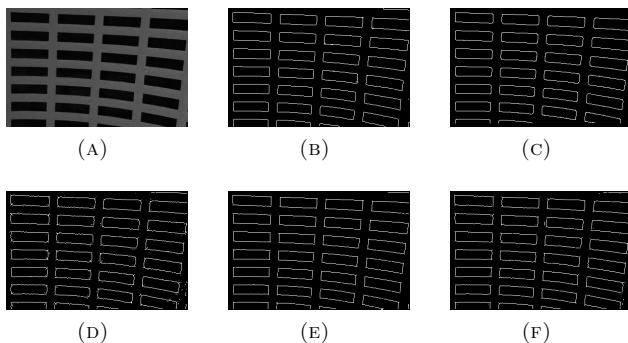


FIGURA 4. Análisis de la muestra 3 utilizando diferentes técnicas de detección de bordes. (a) Original. (b) Resultado ideal. (c) Canny. (d) PC con función Boxcar. (e) PC con función exponencial. (f) PC con función cuártica.

en las situaciones mencionadas se detectan dobles bordes que están en las proximidades del borde real, por esta razón, es importante el uso complementario de las dos métricas.

En la figura 4, se muestra el caso de una imagen que según los dos índices utilizados tiene resultados similares con los dos métodos de detección de bordes estudiados aquí, tal como puede verse en la figura 3. Como se aprecia en la imagen original, ilustrada en la figura 4a, todos los bordes son de tipo paso, por lo cual ambas técnicas consiguen buenos resultados. En cambio, en la figura 5 se ilustra un caso donde los resultados de las dos técnicas difieren significativamente; lo cual puede atribuirse a que los bordes en la imagen original son de tipo valle, donde la técnica de Canny no funciona adecuadamente.

#### 4. Conclusiones

- Se comprobó que la congruencia de fase permite la detección de bordes más precisa, de acuerdo con estudios anteriores que se han realizado sobre estas técnicas. Esto se debe en parte a que la congruencia de fase responde bien a los bordes de tipo cresta y valle, y Canny está diseñado para detectar bordes tipo escalonado.
- El resultado de la detección de bordes varía según una función matemática, utilizada para cuantificar la congruencia de fase, cuyas características comunes son que están centradas en el origen, tienen simetría uniforme y un máximo global igual a 1. Por este motivo, se realizó un estudio en profundidad de las características de la función de cuantificación cuantificación, encontrando que la mejor respuesta se obtiene cuando la función función exponencial seguida de la cuártica.

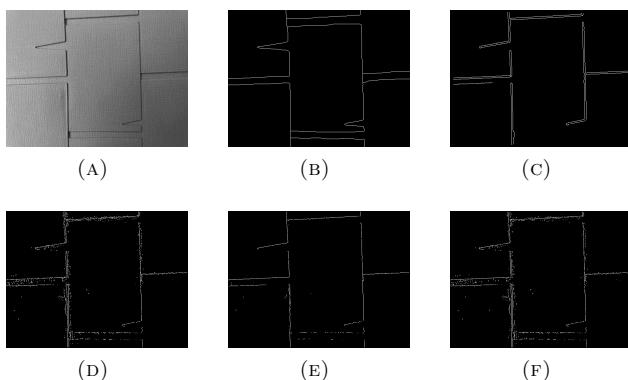


FIGURA 5. Análisis de la muestra 13 utilizando diferentes técnicas de detección de bordes. (a) Original. (b) Resultado ideal. (c) Canny. (d) PC con función Boxcar. (e) PC con función exponencial. (f) PC con función cuártica.

- Cabe resaltar que, en los casos donde el método de Canny obtuvo mejores resultados, la diferencia de los índices de Dice-Sorensen y la figura de mérito, entre la congruencia de fase y Canny son muy bajos. Por el contrario, en los casos donde la PC presenta mejores resultados, esta diferencia es bastante considerable.

## Referencias

- [1] I.E. Abdou and W.K. Pratt, *Quantitative design and evaluation of enhancement/thresholding edge detectors*, Proceedings of the IEEE **67** (1979), no. 5, 753–763.
- [2] John Canny, *A computational approach to edge detection*, IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence (1986), no. 6, 679–698.
- [3] Lee R Dice, *Measures of the amount of ecologic association between species*, Ecology **26** (1945), no. 3, 297–302.
- [4] Manuel G Forero and Carlos A Jacanamejoy, *Unified mathematical formulation of monogenic phase congruency*, Mathematics **9** (2021), no. 23, 3080.
- [5] Manuel G. Forero, Carlos A. Jacanamejoy, and Santiago Rivera-Nieto, *Study of phase congruency quantization function properties for image edge detection*, Applications of Digital Image Processing XLIV (Andrew G. Tescher and Touradj Ebrahimi, eds.), vol. 11842, International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2021, pp. 472 – 490.

- [6] Carlos A Jacanamejoy and Manuel G Forero, *Phase congruency implementation in imagej using radix-2 fft*, Applications of Digital Image Processing XLIV, vol. 11842, SPIE, 2021, pp. 449–455.
- [7] Peter Kovesi, *Invariant measures of image features from phase information*, Ph.D. thesis, University of Western Australia, 1996.
- [8] Sang Gyu Kwak and Jong Hae Kim, *Central limit theorem: the cornerstone of modern statistics*, Korean journal of anesthesiology **70** (2017), no. 2, 144.
- [9] Wang Lijuan, Zhang Changsheng, Liu Ziyu, Sun Bin, and Tian Haiyong, *Image feature detection based on phase congruency by monogenic filters*, Control and Decision Conference (2014 CCDC), The 26th Chinese, IEEE, 2014, pp. 2033–2038.
- [10] Edward J Mascha and Thomas R Vetter, *Significance, errors, power, and sample size: the blocking and tackling of statistics*, Anesthesia & Analgesia **126** (2018), no. 2, 691–698.

(Recibido en mayo de 2024. Aceptado en mayo de 2024)

INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
 UNIVERSIDAD DE IBAGUÉ  
 FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES  
 CARRERA 22 CALLE 67 B/AMBALÁ  
 IBAGUÉ, COLOMBIA  
*e-mail:* 2420162018@estudiantesunibague.edu.co  
*e-mail:* maximiliano.machado@unibague.edu.co  
*e-mail:* carlos.jacanamejoy@unibague.edu.co  
*e-mail:* manuel.forero@unibague.edu.co