**Revista Colombiana de Matemáticas**
Volumen 45(2011)2, páginas 167-177

# Funciones localmente inyectivas entre continuos

**Locally One to One Maps between Continua**

Javier Camargo[a]

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia

Resumen. Una función $f$ continua y sobreyectiva definida entre continuos se dice localmente inyectiva si para cualquier punto $x$ del dominio, existe un abierto $U$, con $x$ en $U$, tal que la restricción $f|_U$ es inyectiva. En este escrito, estudiaremos propiedades de las funciones localmente inyectivas definidas de un continuo sobre él mismo. Además, mostraremos condiciones necesarias y suficientes para que un continuo $X$ satisfaga la siguiente afirmación: Si $f : X \to X$ es localmente inyectiva, entonces $f$ es un homeomorfismo.

*Palabras y frases clave.* Funciones entre continuos, funciones localmente inyectivas, dendroides, continuos, homeomorfismos locales.

*2000 Mathematics Subject Classification.* 54E40, 54F15.

Abstract. A map $f$ between topological spaces is called locally one to one provided that for every point $x$ there exists an open set $U$ such that $x \in U$ and $f|_U$ is one to one. We study properties of this kind of maps, when they are defined from a continuum onto itself. Also, we show necesary and sufficient conditions that a continuum $X$ must satisfy to prove the following: If $f : X \to X$ is locally one to one, then $f$ is a homeomorphism.

*Key words and phrases.* Maps between continua, Locally one to one maps, Dendroids, Continua, Local homeomorphisms.

## 1. Introducción

En topología se estudian propiedades de manera local. Por ejemplo, se dice que un espacio es localmente conexo si para cualquier punto y cualquier vecindad que tenga al punto, existe un abierto conexo que tiene al punto y está contenido

[a]Esta investigación fué parcialmente soportada por la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander, proyecto C-2010-1.

en la vecindad inicial. De manera similar, se definen los espacios localmente compactos, espacios que, al igual que los localmente conexos, han sido de gran utilidad en el estudio de la topología. En cuanto a funciones continuas se han estudiado propiedades de manera local de la siguiente forma (ver [4, pág. 12]):

Dada $\mathcal{A}$ una clase de funciones entre continuos, diremos que $f : X \to Y$ es localmente $\mathcal{A}$, denotado por $f \in Loc(\mathcal{A})$, si para cada $x \in X$, existe una vecindad cerrada $N$ de $x$ tal que $f(N)$ es una vecindad cerrada de $f(x)$ y la restricción $f|_N$ está en $\mathcal{A}$.

Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva definida entre continuos. Observemos que si $f$ es inyectiva, entonces $f$ es una biyección definida entre continuos; es decir, $f$ es un homeomorfismo. De esto, si $\mathcal{H}$ es la clase de homeomorfismos e $\mathcal{I}$ es la clase de funciones inyectivas, entonces $\mathcal{H} = \mathcal{I}$ y por tanto, de acuerdo con la definición dada en el párrafo anterior, $Loc(\mathcal{H}) = Loc(\mathcal{I})$. Las funciones de $Loc(\mathcal{H})$ son abiertas, tienen fibras con la misma cardinalidad y además, preservan propiedades topológicas como unicoherencia, irreducibilidad e indescomponibilidad [4, (7.1), pág. 58 y (8.2), pág. 71]. Por estas razones, la clase $Loc(\mathcal{H})$ ha sido, por muchos años, de gran interés en el estudio de la topología, ver por ejemplo [7, pág. 199].

Por otra parte, en [5, pág. 15], se dice que $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos es *localmente inyectiva* si para cada punto $x \in X$, existe un abierto $U$ de $X$ tal que $x \in U$ y la restricción $f|_U : U \to f(U)$ es inyectiva. Es fácil ver que si $f$ es localmente inyectiva en el sentido de [4], entonces $f$ es localmente inyectiva en el sentido de [5]. Sin embargo, si $f : [0,1] \to S^1$ es definida por $f(t) = e^{2\pi i t}$, para cada $t \in [0,1]$, donde $S^1$ es la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$, entonces $f$ es localmente inyectiva en el sentido de [5], pero no en el sentido de [4].

En [5], se estudia el semigrupo de las funciones localmente inyectivas de $S^1$ sobre $S^1$ y se demuestra que éste, es isomorfo a $\mathbb{Z}^+$ [5, teorema 1, pág. 20], probando previamente que si $f : S^1 \to S^1$ es localmente inyectiva, entonces $f$ es topológicamente equivalente a $f_k$, para algún $k \in \mathbb{Z}^+$, donde $f_k : S^1 \to S^1$ se define por $f_k(z) = z^k$, para cada $z \in S^1$.

A continuación, todos nuestros espacios serán continuos (espacios métricos no vacíos, compactos y conexos) y todas nuestra funciones serán continuas y sobreyectivas. Dado un continuo $X$, consideremos la siguiente afirmación:

**Afirmación 1.** Toda función localmente inyectiva $f : X \to X$ es un homeomorfismo.

En este artículo estudiaremos propiedades de las funciones localmente inyectivas definidas de un continuo sobre él mismo, enfocados en dar respuesta a la siguiente pregunta:

**Pregunta 2.** ¿Qué continuos satisfacen la Afirmación 1?

## 2. Definiciones

Un *continuo* es un espacio métrico compacto, conexo y diferente de vacío. Denotaremos por $S^1$ a la circunferencia unitaria en el plano complejo; es decir, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Además, diremos que un continuo $Z$ es una curva cerrada simple si $Z$ es homeomorfo a $S^1$ y diremos que $Z$ es un arco si $Z$ es homeomorfo a $[0,1]$. Diremos que un arco $\alpha$ con puntos finales $p$ y $q$ en un continuo $X$ es un *arco libre*, si $\alpha \setminus \{p,q\}$ es un abierto en $X$.

**Definición 3.** Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva definida entre continuos. Diremos que $f$ es *localmente inyectiva* si para cada $x \in X$, existe una abierto $U$ de $X$ tal que $x \in U$ y la restricción $f|_U : U \to f(U)$ es inyectiva.

La función $f : [0,1] \to S^1$ definida por $f(t) = e^{2\pi i t}$ es localmente inyectiva. Observe que $f$ es una función cociente donde solo identificamos los puntos 0 y 1 en el intervalo cerrado $[0,1]$. De manera más general, observemos la siguiente proposición.

**Proposición 4** (S. Sabogal)**.** *Sean $X$ un espacio $T_1$ y $\sim$ una relación de equivalencia sobre $X$ tal que $\sim$ identifica un número finito de puntos en un número finito de clases. Entonces $j : X \to X/_\sim$ es localmente inyectiva.*

***Demostración***. Sea $x \in X$, definamos $A = \big\{y \in X : y \neq x \text{ y } j^{-1}(j(y)) \neq \{y\}\big\}$. Note que $A$ es finito y como $X$ es $T_1$, $A$ es cerrado. Sea $U = X \setminus A$. Claramente $U$ es abierto, $x \in U$ y $j|_U : U \to j(U)$ es inyectiva. ☑

Sea $k$ un entero positivo. Definimos $f_k : S^1 \to S^1$ por $f_k(z) = z^k$, para cada $z \in S^1$. Es fácil ver que $f_k$ es localmente inyectiva. Además, sabemos que si $g : S^1 \to S^1$ es localmente inyectiva, entonces $g$ es topológicamente equivalente a $f_k$, para algún $k$ [5, teorema 1, pág.20]. Esto es, existen homeomorfismos $h_1$ y $h_2$ tales que $g = h_1 \circ f_k \circ h_2$. Es decir, en cierto modo, las funciones $f_k$ son esencialmente las únicas funciones localmente inyectivas definidas de $S^1$ sobre $S^1$.

Por otra parte, no es difícil demostrar que el arco satisface la afirmación 1; es decir, si $f$ es una función localmente inyectiva definida entre arcos, entonces $f$ tiene que ser un homeomorfismo. Este resultado lo generalizaremos con el teorema 15.

**Ejemplo 5.** Sea $X = S_1 \cup S_2$, donde $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 1\}$. Claramente, $S_1 \cap S_2 = \{1\}$. Así, $X$ es un continuo. Ahora definamos $f : X \to X$ por:

$$f(z) = \begin{cases} z^2, & \text{si } z \in S_1; \\ z, & \text{si } z \in S_2. \end{cases}$$

Es fácil ver que $f$ es localmente inyectiva.

De la definición de función localmente inyectiva se sigue lo siguiente:

***Observación* 6.** Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Si $f$ es localmente inyectiva, entonces $f|_K$ es localmente inyectiva, para cualquier subcontinuo $K$ de $X$.

Los homeomorfismos locales forman una clase importante de funciones muy estudiada en topología; por mencionar algún ejemplo, toda función recubridora es un homeomorfismo local.

**Definición 7.** Una función entre continuos $f : X \to Y$ se dice un *homeomorfismo local* si para cada punto $x$ en $X$ existe un abierto $U$ tal que $x \in U, f(U)$ es abierto en $Y$ y $f|_U$ es un homeomorfismo.

De la definición 7, es claro que todo homeomorfismo local es localmente inyectivo. Sin embargo, la función dada en el ejemplo 5 es localmente inyectiva y no un homeomorfismo local. En la última sección de este escrito, estudiamos algunas propiedades relacionadas con los homeomorfismos locales.

**Definición 8.** Un continuo $X$ se dice *únicamente arcoconexo* si para cada par de puntos $x_1$ y $x_2$ en $X$, existe un único arco en $X$ que tiene como puntos extremos $x_1$ y $x_2$.

La siguiente observación nos será de utilidad más adelante.

***Observación* 9.** Un continuo arcoconexo es únicamente arcoconexo si y sólo si no contiene una curva cerrada simple.

Como todo continuo localmente conexo es arcoconexo [6, teorema 8.23, pág. 130], con la siguiente definición mostramos una clase de continuos únicamente arcoconexos.

**Definición 10.** Un continuo $X$ es una *dendrita* si $X$ es localmente conexo y no contiene una curva cerrada simple.

Dado $X$ un continuo y $x \in X$, la *arcocomponente de $x$ en $X$* es el conjunto de puntos que pueden unirse a $x$ por un arco en $X$. Una *arcocomponente* de un continuo es la arcocomponente de algún punto.

**Definición 11.** Dada una sucesión de cerrados no vacíos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un continuo $X$, definimos el *límite inferior de* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, denotado por $\liminf_{n\to\infty} A_n$, y el *límite superior de* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, denotado por $\limsup_{n\to\infty} A_n$, como:

(1) $\liminf_{n\to\infty} A_n = \{x \in X :$ para cada abierto $U$ con $x \in U,$ existe un $k \in \mathbb{N},$ donde $U \cap A_l \neq \varnothing,$ para cada $l \geq k\}$;

(2) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \{x \in X :$ para cada abierto $U$ con $x \in U,$ tenemos que $U \cap A_l \neq \varnothing,$ para un número infinito de índices$\}$.

Diremos que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ si $A = \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$.

Es conocido que si $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, entonces $A$ es un cerrado diferente del vacío [2, (4.11), pág.26]. Observemos que por la definición 11, $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$. De esta manera tenemos lo siguiente:

***Observación* 12.** Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados no vacíos de un continuo $X$. Entonces $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ si y sólo si $\limsup_{n\to\infty} A_n \subset A$ y $A \subset \liminf_{n\to\infty} A_n$.

La siguiente, es una caracterización de las funciones abiertas [7].

**Teorema 13.** *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Entonces, $f$ es abierta si y sólo si para cada sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $Y$ con $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, tenemos que $\lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$.*

## 3. Continuos sin curvas cerradas simples

Los ejemplos de continuos que hemos presentado hasta este punto para los cuales existe una función localmente inyectiva que no es un homeomorfismo contienen una curva cerrada simple (ver ejemplo 5). Por esta razón, empezaremos estudiando continuos que no contienen una curva cerrada simple.

**Proposición 14.** *Sea $f : [0,1] \to Y$ una función continua y sobreyectiva, donde $Y$ es una dendrita. Si $f$ es localmente inyectiva, entonces $f$ es un homeomorfismo.*

***Demostración*.** Supongamos que existen $a$ y $b$ puntos en $[0,1]$ tales que $a < b$ y $f(a) = f(b)$. Sea $L = f([a,b])$. Como $Y$ es una dendrita y $L \subset Y$, tenemos que $L$ es una dendrita [6, corolario 10.6, pág. 167]. Sabemos que todo continuo tiene al menos dos puntos que no cortan [6, teorema 6.6, pág. 89]. De lo anterior, podemos tomar $y \in L$ tal que $L \setminus \{y\}$ es conexo y $y \neq f(a)$. Sea $c \in ([a,b] \setminus \{a,b\})$ tal que $f(c) = y$. Como $f$ es localmente inyectiva, existe un abierto $U$ de $[0,1]$ tal que $f|_U$ es inyectiva. Así, existe $\delta > 0$ tal que $[c-\delta, c+\delta] \subset (U \cap [a,b])$. Como $f|_{[c-\delta,c+\delta]} : [c-\delta, c+\delta] \to f([c-\delta, c+\delta])$ es una biyección entre compactos, $f|_{[c-\delta,c+\delta]}$ es un homeomorfismo y así, $y$ es punto de corte de $f([c-\delta, c+\delta])$. Entonces, $f([c-\delta, c+\delta])$ y $L \setminus \{y\}$ son conexos en $L$ tales que $f([c-\delta, c+\delta]) \cap L \setminus \{y\} = f([c-\delta, c+\delta]) \setminus \{y\}$ no es conexo. Pero esto contradice que $L$ es una dendrita [6, teorema 10.10, pág.169]. De esta manera, $f$ es inyectiva y, por tanto, un homeomorfismo. ☑

Con el siguiente teorema mostramos una clase de continuos que satisface la afirmación 1.

**Teorema 15.** *Si $X$ es un continuo únicamente arcoconexo, entonces toda función $f : X \to X$ localmente inyectiva es un homeomorfismo.*

***Demostración.*** Sea $f : X \to X$ una función localmente inyectiva. Supongamos que existen dos puntos $x_1$ y $x_2$ en $X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Como $X$ es arcoconexo, existe un arco $\alpha$ de $x_1$ a $x_2$ en $X$. De la observación 6, $f|_\alpha : \alpha \to f(\alpha)$ es localmente inyectiva. Además, $f(\alpha)$ es localmente conexo y no contiene una curva cerrada simple (ver observación 9); es decir, $f(\alpha)$ es una dendrita. De esto, $f|_\alpha$ es un homeomorfismo, por la proposición 14. Pero esto contradice que $x_1$ y $x_2$ están en $\alpha$ y $f(x_1) = f(x_2)$. Así, $f$ es un homeomorfismo. ☑

Con el siguiente resultado mostramos que no es necesario que el espacio sea arcoconexo para que satisfaga la afirmación 1.

**Teorema 16.** *Si $X$ es un continuo con una cantidad finita de arcocomponentes que no contiene una curva cerrada simple, entonces toda función $f : X \to X$ localmente inyectiva es un homeomorfismo.*

***Demostración.*** Sea $f : X \to X$ una función localmente inyectiva. Supongamos que existen $x_1$ y $x_2$ en $X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Notemos que si $x_1$ y $x_2$ están en una misma arcocomponente, entonces existe un arco $\alpha$ que contiene a los dos puntos $x_1$ y $x_2$. Pero la restricción $f|_\alpha$ contradice la proposición 14.

Por otra parte, observemos que la imagen de una arcocomponente debe estar contenida en una arcocomponente. Así, si $x_1$ y $x_2$ son puntos en diferentes arcocomponentes de $X$ y $X$ tiene un número finito de arcocomponentes, entonces $f$ no puede ser sobreyectiva, con lo que contradecimos que $f$ es localmente inyectiva. De esta manera, $f$ es un homeomorfismo. ☑

Del teorema 16, tenemos por ejemplo que toda compactación de $[0, 1)$ con residuo un continuo únicamente arcoconexo, satisface la afirmación 1. En particular, si $X = \mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}\big(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \mathrm{sen}(\frac{1}{x}), 0 < x \leq 1\}\big)$, la curva senoidal cerrada del topólogo, entonces toda función $f : X \to X$ localmente inyectiva es un homeomorfismo.

Con el siguiente ejemplo mostramos que el no contener una curva cerrada simple, no es una condición suficiente para que la afirmación 1 sea satisfecha.

**Proposición 17.** *Existen un continuo $X$ que no contiene una curva cerrada simple y una función localmente inyectiva $f : X \to X$ tal que $f$ no es un homeomorfismo.*

***Demostración.*** Sea el solenoide diádico, denotado por $\Sigma_2$, el conjunto definido por:

$$\Sigma_2 = \big\{\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in (S^1)^{\mathbb{N}} : z_n^2 = z_{n-1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Es bien conocido que $\Sigma_2$ es un continuo con la topología de subespacio de $(S^1)^{\mathbb{N}}$. Además, $\Sigma_2$ es un continuo indescomponible tal que todo subcontinuo propio es un arco; es decir, no contiene una curva cerrada simple [3, 2.1.34, p.83]. Sea $f : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ la función definida por $f\big(\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\big) = \{z_n^3\}_{n=1}^{\infty}$. También sabemos que, $f$ es una función 3 a 1, esto es, para cada $y \in \Sigma_3, |f^{-1}(y)| = 3$ y $f$ es un homeomorfismo local [1, proposición 1, pág. 2145 y proposición 8, pág. 2146]. Como todo homeomorfismo local es una función localmente inyectiva, tenemos que $f$ es localmente inyectiva y no es un homeomorfismo. ☑

Es importante resaltar que $\Sigma_2$, definido en la proposición 17, no contiene una curva cerrada simple y tiene una cantidad no numerable de arcocomponentes. Con esto, la hipótesis en el teorema 16 que afirma que el continuo tiene un número finito de arcocomponentes no se puede omitir. Sin embargo, no sabemos si esta condición se puede cambiar, para pedir que el continuo tenga a lo más una cantidad numerable de arcocomponentes.

**Pregunta 18.** Sea $X$ un continuo con una cantidad a lo más numerable de arcocomponentes que no contiene una curva cerrada simple, entonces: ¿Toda función $f : X \to X$ localmente inyectiva es un homeomorfismo?

## 4. Condiciones de existencia

En esta sección estudiaremos continuos $X$, como el mostrado en el ejemplo 5, para los cuales existe una función localmente inyectiva $f : X \to X$ tal que $f$ no es un homeomorfismo.

**Teorema 19.** *Sea $X$ un continuo que contiene una curva cerrada simple. Si además, la curva cerrada simple contiene un arco libre de $X$, entonces existe una función localmente inyectiva $f : X \to X$ que no es un homeomorfismo.*

***Demostración*.** Sean $X$ un continuo, $S$ una curva cerrada simple en $X$ y $\alpha$ un arco libre de $X$ tal que $\alpha \subset S \subset X$. Sean $p$ y $q$ los puntos finales de $\alpha$. Tomemos $\alpha_0$ un subarco en $\alpha \setminus \{p, q\}$, con puntos finales $p_0$ y $q_0$. Sea $\alpha_1 = \mathrm{Cl}_X(S \setminus \alpha_0)$. Notemos que $S = \alpha_0 \cup \alpha_1$ y $\alpha_0 \cap \alpha_1 = \{p_0, q_0\}$. Sean $h_i : [0,1] \to \alpha_i$ homeomorfismos, para $i \in \{0, 1\}$, tales que $h_0(0) = h_1(1) = p_0$ y $h_1(0) = h_0(1) = q_0$.

Definamos la siguiente relación sobre $X$ :

$$x \sim x', \text{ si y sólo si,}$$
$$x = x' \quad \text{o} \quad x, x' \in S \text{ y existe } t \in [0,1], \text{ tal que } \big\{h_0(t), h_1(t)\big\} = \{x, x'\}.$$

Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $X$. Además, $Y = X/_{\sim}$ es un continuo y $Y$ es homeomorfo a $X$. De esta forma, podemos suponer sin pérdida de generalidad que la función cociente $f$ está definida de $X$ sobre $X$. Como $h_0$ y $h_1$ son homeomorfismos, observemos que la relación de equivalencia sobre $S$ genera una función cociente $f|_S$ topológicamente equivalente a $f_2 : S^1 \to S^1$ definida por $f_2(z) = z^2$.

Finalmente note que $f|_{X\setminus\alpha_0}$ es inyectiva, donde $X\setminus\alpha_0$ es un abierto en $X$. Además, $\alpha\setminus\{p,q\}$ es abierto en $X$ tal que $f|_{\alpha\setminus\{p,q\}}$ es localmente inyectiva y $X=(X\setminus\alpha_0)\cup(\alpha\setminus\{p,q\})$. Así, $f$ es localmente inyectiva. ☑

En la siguiente proposición se muestra la existencia de un continuo que contiene una curva cerrada simple y satisface la afirmación 1. Es decir, el no contener una curva cerrada simple no es una condición necesaria para que el continuo satisfaga la afirmación 1.

**Proposición 20.** *Existe un continuo $X$ que contiene una curva cerrada simple y toda función localmente inyectiva $f:X\to X$ es un homeomorfismo.*

***Demostración.*** Sea $Z=\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^2}\big(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=\mathrm{sen}(\frac{1}{x}), 0<x\leq 1\}\big)$. El continuo $Z$ es conocido como la curva senoidal cerrada del topólogo. Definamos $X$ el espacio cociente $Z/\{(0,-1),(0,1)\}$. Es fácil ver que $X$ es un continuo y además, $X$ es una compactación de $[0,1)$ con residuo una curva cerrada simple $S$. Así, escribiremos $X=R\cup S$ donde $R$ es homeomorfo a $[0,1)$ y $S=\mathrm{Cl}(R)\setminus R$. Mostremos ahora que $X$ satisface la afirmación 1.

Sea $f:X\to X$ una función localmente inyectiva. Observemos que $X$ tiene 2 arcocomponentes. Como $f$ es sobreyectiva, la imagen de cada arcocomponente debe ser una arcocomponente. Además, notemos que $f(S)$ es compacto. Así, $f(S)$ no puede ser $R$. Entonces $f(S)=S$ y $f(R)=R$. Supongamos que $f$ no es un homeomorfismo. Entonces existen dos puntos $x_1$ y $x_2$ de $X$ tales que $f(x_1)=f(x_2)$. Como $f(S)=S$ y $f(R)=R$, $\{x_1,x_2\}\subset R$ o $\{x_1,x_2\}\subset S$. Si $\{x_1,x_2\}\subset R$ y $\alpha$ es el arco que une $x_1$ y $x_2$, entonces $f|_\alpha:\alpha\to f(\alpha)$ es una función localmente inyectiva, por la observación 6. Pero esto contradice la proposición 14, pues, $f(\alpha)\subset R$ y $R$ no contiene una curva cerrada simple. Así, $f|_R$ es una biyección y $\{x_1,x_2\}\subset S$. Nuevamente, usando la observación 6, $f|_S:S\to S$ es localmente inyectiva y, como $f|_S$ no es un homemorfismo, $f|_S$ es topológicamente equivalente a $f_k:S^1\to S^1$ donde $f_k(z)=z^k$, para algún $k>1$. Sea $p$ el punto $\big\{(0,-1),(0,1)\big\}$ en el cociente $X$. Como $k>1$, existe un $x\in S\setminus\{p\}$ tal que $f(x)=p$. Como $f|_S$ es localmente inyectiva, existe un arco $J$ en $S$ tal que $x\in Int_S(J)$ y $f|_J:J\to f(J)$ es un homeomorfismo, donde $p\in Int_S(f(J))$.

Notemos que podemos construir una sucesión de arcos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenidos en $R$ tal que $\lim_{n\to\infty}A_n=J$. Esto en el sentido de la definición 11. Como $f$ es una función continua, entonces $\lim_{n\to\infty}f(A_n)=f(J)$. Pero esto no es posible, ya que no existe una sucesión de arcos en $R$ que converja al arco $f(J)$ (ver figura 1).

Con lo que concluimos que $f|_S$ es un homeomorfismo. Así, $f$ es un homeomorfismo. ☑

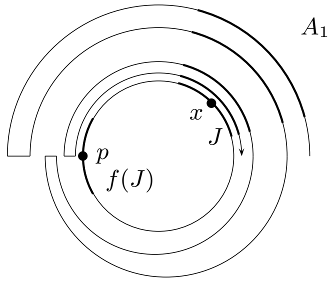


FIGURA 1. Continuo con una circunferencia que satisface la afirmación 1.

## 5. Resultados adicionales

La siguiente es una caracterización de los homeomorfismos locales [4, (4.27), pág. 20].

**Teorema 21.** *Sea $f : X \to Y$ una función continua y sobreyectiva entre continuos. Entonces $f$ es un homeomorfismo local si y sólo si $f$ es abierta y existe un entero positivo $n$ tal que $|f^{-1}(y)| = n$ para cada $y \in Y$.*

Es fácil ver que si $f : X \to Y$ es localmente inyectiva y abierta, entonces $f$ es un homeomorfismo local. A continuación daremos una condición para que una función localmente inyectiva sea abierta.

**Teorema 22.** *Sea $f : X \to Y$ una función localmente inyectiva. Si existe un entero positivo $k$ tal que $|f^{-1}(y)| = k$, para cualquier $y \in Y$, entonces $f$ es abierta.*

***Demostración***. Sean $y \in Y$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Y$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty} y_n = y$. Mostremos que $\text{lím}_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$. Como $f$ es continua, tenemos que $\text{lím sup}_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(y)$. Entonces, por la observación 12, basta probar que $f^{-1}(y) \subset \text{lím inf}_{n\to\infty} f^{-1}(y_n)$.

Supongamos que existe $x \in f^{-1}(y) \setminus \text{lím inf}_{n\to\infty} f^{-1}(y_n)$. Entonces existe un abierto $W$ de $X$ y una subsucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la sucesión natural $\mathbb{N}$, tal que $x \in W$ y $W \cap f^{-1}(y_{n_k}) = \varnothing$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Note que $\text{lím sup}_{k\to\infty} f^{-1}(y_{n_k}) \subset \big(f^{-1}(y) \setminus \{x\}\big)$. Como $|f^{-1}(y)| = k$ para cualquier punto $y \in Y$, entonces existen dos sucesiones $\{x_k^1\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{x_k^2\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $x_k^1 \neq x_k^2$, $\{x_k^1, x_k^2\} \subset f^{-1}(y_{n_k})$, para cada $k \in \mathbb{N}$, y $\text{lím}_{k\to\infty} x_k^1 = \text{lím}_{k\to\infty} x_k^2 = x_0$, para algún $x_0 \in \big(f^{-1}(y) \setminus \{x\}\big)$. Pero esto claramente contradice que $f$ es localmente inyectiva en $x_0$. Así, por el teorema 13, $\text{lím}_{n\to\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$ y $f$ es abierta. ☑

**Corolario 23.** *Sea $f : X \to Y$ una función continua entre continuos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(1) $f$ es localmente inyectiva y abierta;*

*(2) $f$ es localmente inyectiva y existe un entero positivo $k$ tal que $|f^{-1}(y)| = k$, para cada $y \in Y$;*

*(3) $f$ es un homeomorfismo local.*

***Demostración.*** La equivalencia entre las afirmaciones *(1)* y *(3)* se sigue de las definiciones 3 y 7. Como cada homeomorfismo local es localmente inyectivo, tenemos que *(3)* implica *(2)*, por el teorema 21. Finalmente, si suponemos *(2)*, $f$ es abierta, por el teorema 22. Usando nuevamente el teorema 21, tenemos que $f$ es un homeomorfismo local y *(2)* implica *(3)* ☑

**Agradecimiento.** El autor agradece al Seminario de Topología de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander. Especialmente a los profesores Sonia Sabogal y Rafael Isaacs por sus comentarios y discusiones durante la elaboración de este artículo.

## Referencias

[1] J. J. Charatonik and P. Pellicer-Covarrubias, *On Covering Mappings on Solenoids*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2001), 2145–2154.

[2] A. Illanes and S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces. Fundamentals and Recent Advances*, vol. 216, Pure and Applied Mathematics, New York, United States, 1999.

[3] S. Macías, *Topics on Continua*, Pure and Applied Mathematics Series, vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, London, United Kingdom, 2005.

[4] T. Mackowiak, *Continuous Mappings on Continua*, Dissertationes Math., Rozprawy Mat. **158** (1979), 1–95.

[5] S. Sabogal R. Isaacs, *Semigrupos de funciones localmente inyectivas sobre $S^1$*, Lecturas Mat. (1994), 15–20.

[6] Jr. S. Nadler, *Continuum Theory, an Introduction*, vol. 158, Pure and Applied Mathematics, New York, United States, 1992.

[7] G. T. Whyburn, *Analytic Topology*, vol. 28, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence, United States, 1942.

(Recibido en febrero de 2011. Aceptado en julio de 2011)

Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Ciudad Universitaria
Carrera 27, Calle 9, A.A. 678
Bucaramanga, Santander
*e-mail:* jcam@matematicas.uis.edu.co