LA ECUACION $\frac{d\varphi}{dt} = -\operatorname{grad} f(\varphi(t))$ EN UN ESPACIO DE HILBERT.

por

Guillermo RESTREPO

Sea H un espacio de Hilbert real y sea $f: H \to R^1$ una una función de clase C^2. Entonces $f': H \to H^*$, la primera derivada de f, está definida para cada $x \in H$. Si $j: H \to H^*$ es la identificación de Riesz de H con H^*, definimos $\operatorname{grad} f = j^{-1} \circ f': H \to H$. De ahora en adelante usaremos la notación $F = -\operatorname{grad} f$. Si suponemos que F es localmente acotada, entonces la ecuación diferencial

$\frac{d\varphi}{dt} = F(\varphi(t))$ con la condición inicial $\varphi(0) = x$, admite una solución local única que denotamos por $\varphi_x(t)$.

Nos proponemos en esta nota investigar la convergencia de $\varphi_x(t)$ cuando t tiende a infinito.

TEOREMA L.- Sea $f: H \to R^1$ de clase C^1. Supóngase:

i) f es acotada inferiormente

ii) f es localmente acotada

iii) $f(x) \to \infty$ si $\|x\| \to \infty$

Entonces $\varphi_x(t)$ existe para todo $t \geq 0$ y $\varphi_x(t)$ converge débilmente cuando $t \to \infty$.

Demostración: Supongamos que $\varphi_x(t)$ existe para

$$0 \leq t \leq a,$$

a finito. Sea $t_n \to a$. Entonces,

$$\varphi_x(t_n) - \varphi_x(t_m) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} (\varphi_x(\lambda t_n + (1-\lambda) t_m) d\lambda$$

$$= \int_0^1 (t_n - t_m)(\varphi_x'(\lambda t_n + (1-\lambda)t_m))d\lambda \ .$$

Ahora, como $\frac{d\varphi}{dt} = -\text{ grad } f(\varphi(t)) = F(\varphi(t))$, se sigue que

$$(1) \quad \|\varphi_x(t_n) - \varphi_x(t_m)\| \leq \int_0^1 |t_n - t_m| \|F(\varphi_x(\lambda t_n + (1-\lambda)t_m))\| \, d\lambda$$

$$\leq |t_n - t_m|^{1/2} \left(\int_0^1 \|F(\varphi_x(\lambda t_n + (1-\lambda)t_m))\|^2 d\lambda\right)^{1/2}$$

por la desigualdad de Schwartz.

Sea $h(t) = f(\varphi_x(t))$; entonces,

$$(2) \qquad h'(t) = \langle f'(\varphi_x(t)), \varphi_x'(t)\rangle = -\|F(\varphi_x(t))\|^2 .$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\|\varphi_x(t_n) - \varphi_x(t_m)\| \leq |t_n - t_m|^{1/2}(h(t_n) - h(t_m)).$$

Como f es acotada inferiormente, y por (2) h es decreciente, se sigue que

$$\|\varphi_x(t_n) - \varphi_x(t_m)\| \leq M|t_n - t_m|^{1/2},$$

para algún $M > 0$, lo cual demuestra que $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi_x(t_n)$ existe. Por el teorema de existencia local de ecuaciones diferenciales ([1];pág. 55), se concluye que $\varphi_x(t)$ existe para todo $t \geq 0$.

Vamos ahora a demostrar que $\varphi_x(t)$ converge débilmente a un punto de H cuando $t \to \infty$. La relación (2) muestra que $h(t) = f(\varphi_x(t))$ es decreciente, y la condición i) del teorema muestra que $h(t)$ es acotada; por tanto,

$$\lim_{x\to\infty} h'(t) = 0 = \lim_{t\to\infty} (-\|F(\varphi_x(t))\|^2),$$

esto es, $\lim_{t\to\infty} \text{grad } f(\varphi_x(t)) = 0$. Sea $y \in H$ y sea $g(t) = \langle y,\varphi_x(t)\rangle$. Entonces $g(t)$ está definida para todo $t \geq 0$, y $g'(t) = \langle y,\varphi_x'(t)\rangle = \langle y,-\text{grad } f(\varphi_x(t))\rangle \to 0$ si $t \to \infty$. Por tanto, $\lim_{t\to\infty} \langle y,\varphi_x(t)\rangle = \lambda(y)$ existe para todo $y \in H$. Es fácil ver que $\lambda \in H^*$, y como podemos identificar H^* con H, se concluye que $\varphi_x(t)$ converge débilmente a un punto de H. (aquí se utiliza la condición iii) del teorema.)

En el siguiente teorema damos condiciones que aseguran que $\varphi_x(t)$ converge (débilmente) a un punto crítico de f. Nótese que la condición iii) asegura que $\|\varphi_x(t)\| \leq M$.

TEOREMA 2.- _Sean_ $f:H \to R^1$ _de clase_ C^2, H _un espacio de Hilbert. Supóngase:_

i) f _satisface las condiciones del teorema_ 1.

ii) grad $f:H \to H$ _es continuo de la topología débil de_ H _a la topología débil de_ H.

Entonces las trayectorias $\varphi_x(t)$ _de la ecuación diferen-_ $\frac{d\varphi}{dt} = -\text{ grad } f(\varphi(t))$ están definidas para todo $t \geq 0$ y $\varphi_x(t)$ _converge débilmente a un punto crítico de_ f _cuando_ $t \to \infty$.

Demostración: Por el teorema 1, $\varphi_x(t)$ converge débilmente a un cierto $z \in H$ cuando $t \to \infty$. Sea $t_n \to \infty$. Entonces $(\varphi_x(t_n))$ es una sucesión acotada y converge a z débilmente. Ahora,

$$\langle \text{grad } f(z), y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \text{grad } f(\varphi_x(t_n)), y\rangle = 0,$$

por la condición ii). Por tanto, z es un punto crítico de f.

TEOREMA 3.- Sea $f:H \to R^1$ de clase C^2, H un espacio de Hilbert. Supóngase:

i) f es acotada inferiormente y localmente acotada.

ii) $\langle \text{grad } f(x) - \text{grad } f(y), x-y\rangle \geq C\|x-y\|^2$, $C>0$.

Entonces las trayectorias $\varphi_x(t)$ de la ecuación diferencial $\frac{d\varphi}{dt} = -\text{grad } f(\varphi(t))$ están definidas para todo $t \geq 0$ y $\varphi_x(t)$ converge en la topología de la norma a un punto crítico de f.

Demostración: Se tiene que

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx))dt$$

$$= \int_0^1 \langle \text{grad } f(tx), tx\rangle \frac{1}{t}\, dt;$$

por la hipótesis ii),

$$f(x) - f(0) \geq \int_0^1 \frac{1}{t}\left[\langle \text{grad } f(0), tx\rangle + C\|tx\|^2\right]dt$$

$$= \langle \text{grad } f(0), x\rangle + C\|x\|^2$$

$$= \|x\|\left(\langle \text{grad } f(0), \frac{x}{\|x\|}\rangle + C\|x\|\right).$$

Ahora,

$$\langle \text{grad } f(0), \frac{x}{\|x\|} \rangle \geq -\|\text{grad } f(0)\|,$$

y, por tanto,

$$f(x) \geq f(0) + \|x\|(-\text{grad } f(0) + C\|x\|);$$

esta relación muestra que $f(x) \to \infty$ si $\|x\| \to \infty$. Por tanto, por el teorema 1, $\varphi_x(t)$ existe para todo $t \geq 0$. Ahora,

$$\langle \text{grad } f(\varphi_x(t_1) - \text{grad } f(\varphi_x(t_2)), \varphi_x(t_2) - \varphi_x(t_2) \rangle$$

$$\geq C\|\varphi_x(t_1) - \varphi_x(t_2)\|^2;$$

por tanto,

$$\|\varphi_x(t_1) - \varphi_x(t_2)\| \leq \frac{1}{C}\|\text{grad } f(\varphi_x(t_1)) - \text{grad } f(\varphi_x(t_2))\|$$

Esta relación y el hecho de que $\lim_{t\to\infty} \text{grad } f(\varphi_x(t)) = 0$, demuestra que $\lim_{t\to\infty} \varphi_x(t) = y$ para algún $y \in H$ en la topología de la norma. Claramente y es un punto crítico de f.

REFERENCIAS

[1] LANG, S.: Introduction to differentiable manifolds, Nueva York: Int. Pub; 1962.

[2] PALAIS, R.S.: Morse theory on Hilbert manifolds, Topology, vol.2, 1963.

Centro de Investigación del IPN,
Méjico.

Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá.

(Recibido, febrero de 1967)