UNE NOTE SUR DES MODULES ELASTIQUES

par

J. VARELA B.

Dans [2] on a introduit la notion de structure élastique que voilà: Etant donné un ensemble X muni d'une structure, on dira que X est élastique (ou que la structure sur X est élastique) si X est isomorphe à un de ses sous-ensembles propres muni de la structure induite sur lui par celle de X. Il est clair que pour q'une structure sur un ensemble donné soit élastique il est nécessaire que X soit infini. Dans [2] on a montré, par exemple, que l'espace topologique R (avec sa topologie usuelle) est élastique, mais que R avec sa structure uniforme additive n'est pas élastique. On y trouvera d'autres exemples.

On se propose dans cette note de montrer la proposition suivante:

PROPOSICION.- Soient A un domaine d'integrité et K son corps de fractions. Si E est un A-module tel que tout élément $x \in E$, $x \neq 0$, soit libre, alors $E_{(K)}$ est élastique si E est élastique, où $E_{(K)} = K \otimes_A E$ est l'espace vectoriel associé à E.

Preuve: On peut supposer que $A \neq Z/(2)$, car dans ce cas la proposition est évidente. Ceci dit, comme est élastique, il existe un A-isomorphisme $f: E \to E$ tel que $f(E) \neq E$. Soit $E' = f(E)$, et considérons le diagramme suivant:

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} & E_{(K)} \arrow[dr, "g"] & \\ E \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\overline{f}"'] & & E'_{(K)} \end{tikzcd}$$

où π et $\overline{f}$ sont des A-représentations définies de la façon suivante: $\pi(x) = e \otimes x$, $\overline{f}(x) = e \otimes f(x)$ (e est l'élément unité de A) et g est la K-représentation qui laisse commutatif le diagramme (1). L'hypothèse de que tout élément de E différent de 0 soit libre, implique que π est un A-isomorphisme ([1],§2,no.3).Montrons que $\overline{f}$ est aussi un A-isomorphisme: en effet, si $\pi' : E' \to E'_{(K)}$ est définie par $\pi'(x') = e \otimes x'$, alors

$$\overline{f}(x) = e \otimes f(x) = \pi'(f(x)) = 0$$

entraîne que $f(x) = 0$, et par conséquent, que $x = 0$, car π' est aussi un A-isomorphisme (Tout élément de E' différent de 0 est libre); $\overline{f}$ est donc bien injective. Mais alors g est un K-isomorphisme.

Il nous reste à démontrer que g n'est pas surjective. Mais pour cela, il suffit de voir que $E'_{(K)}$ est un sous-espace propre de $E_{(K)}$. En effet, l'application canonique $\lambda \otimes x' \rightsquigarrow \lambda \otimes x'$ de $E'_{(K)}$ dans $E_{(K)}$ est un K-isomorphisme qui n'est pas surjectif, car si $\lambda \otimes x' =$MO alors $\pi(x') = \lambda \otimes x' = 0$ entraîne que $\pi(x') = 0$, et donc que $x' = 0$; d'autre part, si $x \in E - E'$ et $0 \neq \lambda \in K$, on aura que $\lambda \otimes x \neq \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i (e \otimes x'_i)$ pour tout $\lambda_i \in K$ et tout $x'_i \in E'$, car sinon on aurait

$$e \otimes x = \Sigma_{i=1}^{n} (\lambda^{-1}\lambda_i)(e \otimes x'_i),$$

et en prennant $\rho \in A$ ($\neq Z/(2)$), $0 \neq \rho \neq 1$ et tel que $\rho\lambda^{-1}\lambda_i = \mu_i$ appartienne à A pour $i = 1,\dots,n$;

$$\pi(x) = \lambda^{-1} \pi(\Sigma_{i=1}^{n} \mu_i x_i')$$

et, par conséquent,

$$(\lambda^{-1} - 1)\pi(\Sigma_{i=1}^{n} \mu_i x_i' - x) = 0 ,$$

d'où

$$x = \Sigma_{i=1}^{n} \mu_i x_i' \in E' ,$$

ce qui est contradictoire.

C.Q.F.D.

REFERENCES

[1] BOURBAKI, N.: Algèbre Multilinèaire, París,1958.

[2] VARELA, J.: Tesis, Bogotá,1965.

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia.
Recibido: febrero,1967.