

UNE NOTE SUR DES MODULES ELASTIQUES

par

J. VARELA B.

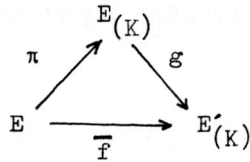
Dans [2] on a introduit la notion de structure élastique que voilà: Etant donné un ensemble X muni d'une structure, on dira que X est élastique (ou que la structure sur X est élastique) si X est isomorphe à un de ses sous-ensembles propres muni de la structure induite sur lui par celle de X . Il est clair que pour qu'une structure sur un ensemble donné soit élastique il est nécessaire que X soit infini. Dans [2] on a montré, par exemple, que l'espace topologique \mathbb{R} (avec sa topologie usuelle) est élastique, mais que \mathbb{R} avec sa structure uniforme additive n'est pas élastique. On y trouvera d'autres exemples.

On se propose dans cette note de montrer la proposition suivante:

PROPOSICION.- Soient A un domaine d'intégrité et K son corps de fractions. Si E est un A -module tel que tout élément $x \in E$, $x \neq 0$, soit libre, alors $E_{(K)}$ est élastique si E est élastique, où $E_{(K)} = K \otimes_A E$ est l'espace vectoriel associé à E .

Preuve: On peut supposer que $A \neq \mathbb{Z}/(2)$, car dans ce cas la proposition est évidente. Ceci dit, comme est élastique, il existe un A -isomorphisme $f: E \rightarrow E$ tel que $f(E) \neq E$. Soit $E' = f(E)$, et considérons le diagramme suivant:

(1)



où π et \bar{f} sont des A -représentations définies de la façon suivante: $\pi(x) = e \otimes x$, $\bar{f}(x) = e \otimes f(x)$ (e est l'élément unité de A) et g est la K -représentation qui laisse commutatif le diagramme (1). L'hypothèse de que tout élément de E différent de 0 soit libre, implique que π est un A -isomorphisme ([1], §2, no.3). Montrons que \bar{f} est aussi un A -isomorphisme: en effet, si $\pi': E' \rightarrow E'(K)$ est définie par $\pi'(x') = e \otimes x'$, alors

$$\bar{f}(x) = e \otimes f(x) = \pi'(f(x)) = 0$$

entraîne que $f(x) = 0$, et par conséquent, que $x = 0$, car π' est aussi un A -isomorphisme (Tout élément de E' différent de 0 est libre); \bar{f} est donc bien injective. Mais alors g est un K -isomorphisme.

Il nous reste à démontrer que g n'est pas surjective. Mais pour cela, il suffit de voir que $E'(K)$ est un sous-espace propre de $E(K)$. En effet, l'application canonique $\lambda \otimes x' \mapsto \lambda \otimes x'$ de $E'(K)$ dans $E(K)$ est un K -isomorphisme qui n'est pas surjectif, car si $\lambda \otimes x' = 0$ alors $\pi(x') = \lambda \otimes x' = 0$ entraîne que $\pi(x') = 0$, et donc que $x' = 0$; d'autre part, si $x \in E - E'$ et $0 \neq \lambda \in K$, on aura que $\lambda \otimes x \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i (e \otimes x'_i)$ pour tout $\lambda_i \in K$ et tout $x'_i \in E'$, car sinon on aurait

$$e \otimes x = \sum_{i=1}^n (\lambda^{-1} \lambda_i) (e \otimes x'_i),$$

et en prenant $\rho \in A$ ($\neq Z/(2)$), $0 \neq \rho \neq 1$ et tel que $\rho \lambda^{-1} \lambda_i = \mu_i$ appartienne à A pour $i = 1, \dots, n$;

$$\pi(x) = \lambda^{-1} \pi\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x'_i\right)$$

et, par conséquent,

$$(\lambda^{-1} - 1)\pi\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x'_i - x\right) = 0,$$

d'où

$$x = \sum_{i=1}^n \mu_i x'_i \in E',$$

ce qui est contradictoire.

C.Q.F.D.

REFERENCES

- [1] BOURBAKI, N.: Algèbre Multilinéaire, Paris, 1958.
- [2] VARELA, J.: Tesis, Bogotá, 1965.

Departamento de Matemáticas
 Universidad Nacional de Colombia.
 Recibido: febrero, 1967.