SOBRE DERIVACIONES GENERALIZADAS

por

J.M. ANDERSON

En el libro citado en la bibliografía, JACOBSON introduce el concepto de (s_1, s_2)-derivación. Aquí se muestra que una vasta clase de (s_1, s_2)-derivaciones son interiores; de manera que este trabajo es un suplemento al corolario 1, página 174, de [1].

<u>DEFINICION</u>. <u>Sean</u> A <u>y</u> B <u>anillos</u>. <u>Si</u> s_1 <u>y</u> s_2 son homomorfismos de A en B, entonces una aplicación $d: A \to B$ se llama una (s_1, s_2)-derivación si: 1) $d(a + b) = d(a) + d(b)$, y 2) $d(ab) = d(a)s_1(b) + s_2(a)d(b)$.

Se obtiene un ejemplo de (s_1, s_2)-derivación cuando A y B son ambos iguales al cuerpo de los números complejos, s_1 es el automorfismo que envía un número complejo en su conjugado, s_2 es el automorfismo identidad, y se define d por la relación

$$d(z) = \frac{i}{2}(z - \overline{z}).$$

Si $A \subseteq B$ y si $s_1 = s_2$ es la aplicación idéntica, entonces una (s_1, s_2)-derivación no es otra cosa que una derivación en el sentido ordinario.

Es fácil ver que los siguientes subconjuntos de A

$$A_{(s_1, s_2)} = \{x \in A \mid s_1(x) = s_2(x)\}$$

y

$$A_d = \{x \in A \mid d(x) = 0\}$$

son sub-anillos de A. Es claro que $s_1 = s_2$ si y sólo si $A_{(s_1,s_2)} = A$; y que $d = 0$ si y sólo si $A_d = A$.

TEOREMA 1. *Si d es una (s_1,s_2)-derivación, diferente de cero, con $s_1 \neq s_2$, de un anillo conmutativo A en un anillo conmutativo B sin divisores de cero distintos de cero, entonces*

$$A_{(s_1,s_2)} = A_d .$$

Demostración. Sea $x \in A_d$; como $d \neq 0$, existe $y \in A$ tal que $d(y) \neq 0$; se tiene entonces

$$d(xy) = d(x)s_1(y) + s_2(x)d(y) = s_2(x)d(y) ,$$
$$d(yx) = d(y)s_1(x) + s_2(y)d(x) = d(y)s_1(x) ;$$

como A es conmutativo, $d(xy) = d(yx)$, de donde

$$d(y)[s_2(x) - s_1(x)] = 0.$$

Y como $d(y) \neq 0$, se tiene $s_2(x) - s_1(x) = 0$, puesto que B no tiene divisores de cero distintos de cero. Luego resulta $x \in A_{(s_1,s_2)}$. Recíprocamente, sea $x \in A_{(s_1,s_2)}$, es decir, tal que $s_1(x) = s_2(x)$. Entonces

$$\begin{aligned} d(xy) &= d(x)s_1(y) + s_2(x)d(y) \\ &= d(y)s_1(x) + s_2(x)d(x) = d(yx) ; \end{aligned}$$

por tanto, para todo $y \in A$ se tiene

$$d(x)\left[s_1(y) - s_2(y)\right] = 0,$$

y como $s_1 \neq s_2$, se tiene $d(x) = 0$, es decir, $x \in A_d$.

l.q.q.d.

DEFINICION. La aplicación d_x, donde x es un elemento de B,

$$d_x = x_L s_1 - x_R s_2$$

donde x_L es multiplicación por la izquierda y x_R es multiplicación por la derecha, se llama una (s_1, s_2)-derivación interior.

Se puede verificar fácilmente que, para cada $x \in B$, d_x es una (s_1, s_2)-derivación. Enunciamos ahora el resultado principal:

TEOREMA 2. Sea d una (s_1, s_2)-derivación de un cuerpo A en un cuerpo B, con $s_1 \neq s_2$. Entonces d es una (s_1, s_2)-derivación interior.

Demostración. Si $d = 0$, basta tomar $x = 0$. Si $d \neq 0$, consideremos $a \in A - A_d$; sabemos entonces (teorema 1) que

$$\sigma(a) = \frac{d(a)}{s_1(a) - s_2(a)}$$

está bien definido, ya que $s_1(a) \neq s_2(a)$ y $d(a) \neq 0$. Mostremos que si $b \in A - A_d$, entonces $\sigma(a) = \sigma(b)$. En efecto:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(a)}{\sigma(b)} &= \frac{d(a)}{s_1(a) - s_2(a)} \frac{s_1(b) - s_2(b)}{d(b)} \\ &= \frac{d(a)s_1(b) - d(a)s_2(b)}{d(b)s_1(a) - d(b)s_2(a)} \\ &= \frac{d(ab) - s_2(a)d(b) - d(a)s_2(b)}{d(ab) - s_2(b)d(a) - d(b)s_2(b)} = 1\end{aligned}$$

Póngase entonces $x = \sigma(a)$. Es claro que así

$$\begin{aligned} d(a) &= \sigma(a)[s_1(a) - s_2(a)] \\ &= xs_1(a) - s_2(a)x , \end{aligned}$$

para todo $a \in A$.

l.q.q.d.

Universidad de Puerto Rico
Mayagüez, Puerto Rico.
Recibido, abril de 1967.

REFERENCIAS

[1] JACOBSON,N.: Structure of Rings, American Math.Soc., Providence, Rhode Island,1956.

N.de la R.: El autor utiliza la palabra <<cuerpo>> para designar un cuerpo conmutativo.

El autor desea expresar su más profundo agradecimiento a los Profesores Jean DIEUDONNE y G.H. MEISTERS.