Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen II,1968, págs.1- 5

UNE CARACTERISATION DES ANNEAUX FORTEMENT RÉGULIERS

par

Constantino M. de BARROS

On montre que la classe des anneaux fortement réguliers introduits et étudiés par Arens-Kaplansky [1] coïncide avec celle des anneaux dont le demi-groupe multiplicatif est inverse, donc coïncide avec celle des anneaux réguliers dont l'ensemble de leurs idempotents est commutatif.

1. Soit A un anneau. Si A possède un unique élément unité à droite e, alors e est aussi une unité à gauche. En effet, soit $U_d(A)$ l'ensemble des éléments unités à droite de A. Pour chaque $e \in U_d(A)$, soit ρ_e l'application de A dans A telle que $\rho_e(x) = ex - x + e$. On a

(a) $\rho_e(A) \subset U_d(A)$. En effet, pour tout $y \in A$ on a $y\rho_e(x) = y$,

(b) la restriction de ρ_e a $U_d(A)$ est injective. En effet, soient e', $e'' \in U_d(A)$, alors $\rho_e(e') = \rho_e(e'')$ entraîne

$$ee' - e' + e = ee'' - e'' + e,$$

mais $ee' = e = ee''$, donc $e' = e''$.

Supposons $U_d(A) = e$. D'après (a) pour tout $x \in A$ on a $\rho_e(x) = e$, c'est-à-dire $ex = x$. Par conséquent e est un élément unité de A.

2. LEMME. *Soient* A *un anneau et* e *un élément idempotent de* A. *Les quatre conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) e *appartient au centre de l'anneau* A;

(ii) e *commute avec tout autre élément idempotent de* A;

(iii) e *est l'élément unité du sous-anneau* Ae;

(iv) $eA = Ae = eAe$.

Démonstration. (i) entraîne (ii) en vertu de la définition du centre d'un anneau.

Pour montrer que (ii) entraîne (iii), il suffit, d'apres le §1, de montrer que e est l'unique élément unité à droite de Ae. Il est clair que, pour tout $x \in Ae$ on a $x = xe$. Si e' est un autre élément unité à droite, il serait idempotent, d'où $e' = e'e = ee' = e$.

(iii) entraîne (iv) car, pour tout $x \in Ae$, on a $x = xe = ex = exe$, d'où $Ae \subset eAe$. Comme $eAe \subset Ae$, on a $Ae = eAe$. De façon analogue on montre que $eA = eAe$, d'où $eAe = eA = Ae$.

(iv) entraîne (i), car pour tout $y \in A$, on a $ye, ey \in Ae$, d'où $ye = eye = ey$.

COROLLAIRE 1 . *Soit* $I(A)$, *resp.* $Z(A)$, *l'ensemble des éléments idempotents de* A, *resp. le centre de* A. *Si* $I(A)$ *est commutatif, alors* $I(A) \subset Z(A)$.

3. Si e est un élément idempotent de A, alors pour tout $a \in A$ on a

$(eae - ea)^2 = (eae - ea)(eae - ea)$

$$= eaeae - eaea - eaeae + eaea = 0 ;$$

on a aussi $(eae - ae)^2 = 0$. Il en resulte:

(j) Si A n'admet pas des éléments nilpotents differents de zéro, alors tout élément idempotent de A appartient au centre de A.

THÉORÈME. Soit A un anneau. Les trois conditions suivantes sont équivalentes:

(1) Pour tout $a \in A$ il existe $x \in A$ tel que $a = a^2x$ (resp. $a = xa^2$).

(2) Pour tout $a \in A$ il existe $x \in A$ tel que $a = axa$ et A n'admet pas des éléments nilpotents differents de zéro.

(3) Pour tout $a \in A$ il existe un unique élément de A, noté $a^{\#}$, tel que $a = aa^{\#}a$ et $a^{\#} = a^{\#}a \cdot a^{\#}$.

Démonstration. (1) entraîne (2). En effet, si $a = a^2x$, alors

$$(axa - a)(axa - a) = ax(a^2x)a - axa^2 - (a^2x)a + a^2$$
$$= axa^2 - axa^2 - a^2 + a^2 = 0.$$

Il est clair que (1) entraîne que A n'admet pas des éléments nilpotents differents de zéro, donc $a = axa$.

On sait [2] | th. 1.17 que (3) est équivalente à

(3') Pour tout $a \in A$ il existe $x \in A$ tel que $a = axa$ et $I(A)$ est commutatif.

(2) entraîne (3'). En effet, à cause de (j) on a $I(A) \subset Z(A)$.

(3') entraîne (1). Étant $I(A)$ commutatif, alors

$I(A) \subset Z(A)$ en vertu du corollaire 1. Donc $a = axa$ entraîne que $ax, xa \in I(A)$, par conséquent $a = axa = a^2x$.

On dit |1| qu'un anneau A est fortement régulier s'il vérifit l'axiome (1) du théorème ci-dessus. La proprieté (3) du théorème ci-dessus signifie que le demigroupe multiplicatif de A est inverse.

COROLLAIRE 2. *Si A est un anneau fortement régulier, alors pour tout $a \in A$ on a $aa^{\#} = a^{\#}a$.*

PROPOSITION . *Pour qu'un anneau A soit fortement régulier il faut et il suffit que tout idéal a principal à gauche (resp. à droite) soit engendré par un élément idempotent central.*

Démonstration. La condition est necessaire à cause de (3) du théorème, du lemme et du corollaire 2, puisque $e = aa^{\#} = a^{\#}a$ est un idempotent central.

Si a appartient à l'idéal á gauche engendré par l'idempotent central e, alors en vertu de (iv) du lemme il existe $x, y \in A$ tels que $a = ye$ et $e=ax$, donc $a = ye = yee = ae = a^2x$.

Il est facile de tirer de la lttérature des demigroupes, voir [2], et des résultats ci-dessus, d'autres caractérisations pour les anneaux fortement réguliers.

REFERENCES

[1] ARENS, R.F. and KAPLANSKY,I., Topological representations of algebras, Trans.Amer.Math.Soc.,t.63(1948) 457-481.

[2] CLIFFORD,A.H. and PRESTON,G.B., The algebraic theory of semigroups, vol.1,2 (Math.Surveys, no. 7, A-

merican Math.Soc.), Providence, R.I.,1961,1967.

Instituto de Matemática da
Universidade Fluminense

(Recibido en marzo de 1968)