Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen II,1968, págs.12-20

DESARROLLO ASINTÓTICO DE LA FUNCIÓN $\Sigma_{k=o}^{o}(-1)^k.\frac{x^k}{(k!)^3}$

por
Yu TAKEUCHI

§1 INTRODUCCIÓN. La función de Bessel $J_o(2\sqrt{x})$, la función exponencial e^{-x} y otras, pertenecen a la familia de las siguientes funciones enteras:

$$(1) \qquad f_n(x) = \Sigma_{k=o}^{\infty}(-1)^k,\frac{x^k}{(k!)^n} \quad , n = 1, 2, \ldots$$

En este artículo se halla un desarrollo asintótico de la función $f_3(x)$ cuando $x \to \infty$; el procedimiento podrá servir para encontrar fórmulas asintóticas de $f_n(x)$ para cualquier n natural.

§2 UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL PARA $f_n(x)$. Sea

$$(2) \qquad h_n(t) = f_n(e^{nt}) = \Sigma_{k=o}^{\infty}(-1)^k.\frac{e^{nkt}}{(k!)^n} \quad ;$$

entonces $h_n(t)$ es una función entera. Derivando (2) con respecto a t, n veces, se tiene

$$\frac{d^n h_n(t)}{dt^n} = \Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^k,\frac{(nk)^n e^{nkt}}{(k!)^n}$$

$$= \Sigma_{k=1}^{\infty}(-1)^k,\frac{n^n e^{nkt}}{((k-1)!)^n}$$

$$= -n^n e^{nt}\,\Sigma_{k=o}^{\infty}\,(-1)^k.\frac{e^{nkt}}{(k!)^n}$$

o bien

(3) $$\frac{d^n h_n(t)}{dt^n} + n^n e^{nt} h_n(t) = 0$$

Sea $x = e^t$; entonces $d/dt = (dx/dt)(d/dx) = e^t d/dx = xd/dx$; por lo tanto, de (3), tenemos la siguiente ecuación diferencial para $f_n(x)$:

(4) $$(x \frac{d}{dx})^n f_n(x^n) + (n^n) x^n f_n(x^n) = 0$$

§3 SOLUCIÓN ASINTÓTICA DE LA ECUACIÓN (4) PARA EL CASO $n = 3$

Sea

(5) $$F(x) = f_3(x^3) = \Sigma_{k=o}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{3k}}{(k!)^3} ;$$

entonces de (4), se tiene:

$$(x \frac{d}{dx})^3 F(x) + 27x^3 F(x) = 0 ,$$

o,

(6) $$\frac{d^3F}{dx^3} + \frac{3}{x}\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{1}{x^2}\frac{dF}{dx} + 27F = 0$$

Para eliminar la segunda derivada, sea

(7) $$F(x) = y(x)/x \quad ;$$

entonces (6) se transforma en

(8) $$y''' + \frac{1}{x^2} y' + (27 - \frac{1}{x^3}) y = 0 .$$

Sabemos que una ecuación diferencial del tipo (8) admite soluciones asintóticas de la siguiente forma

(9) $$y \sim e^{\alpha x} \left\{ 1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_4}{x^4} + \dots \right\}$$

cuando $x \to +\infty$ ([1], [2], [3]). Para encontrar los valores de los coeficientes $A_1, A_2, A_3, \dots$, primero derivamos

(9) con respecto a x:

$$(10)\begin{cases} y' \sim \alpha e^{\alpha x}\left\{1+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2-(A_1/\alpha)}{x^2}+\frac{A_3-(2A_2/\alpha)}{x^3}+\dots\right\} \\ y'' \sim \alpha^2 e^{\alpha x}\left\{1+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2-(2A_1/\alpha)}{x^2}+\right. \\ \qquad\left.+\frac{A_3-(4A_2/\alpha)+(2A_1/\alpha^2)}{x^3}+\dots\right\} \\ y''' \sim \alpha^3 e^{\alpha x}\left\{1+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2-(3A_1/\alpha)}{x^2}+\frac{A_3-(6A_2/\alpha)+(6A_1/\alpha^2)}{x^3}\right. \\ \qquad\left.+\dots\right\} \end{cases}$$

Reemplazando (9) y (10) en la ecuación (8), se tiene:

$$\alpha^3 e^{\alpha x}\left\{1+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2-(3A_1/\alpha)}{x^2}+\frac{A_3-(6A_2/\alpha)+(6A_1/\alpha^2)}{x^3}+\dots\right\}$$
$$+\alpha e^{\alpha x}\left\{\frac{1}{x^2}+\frac{A_1}{x^3}+\frac{A_2-(A_1/\alpha)}{x^4}+\dots\right\}$$
$$+\left(27-\frac{1}{x^3}\right)\left\{e^{\alpha x}\right\}\left\{1+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x^3}+\dots\right\}=0$$

Comparando los coeficientes de 1, $1/x$, $1/x^2$, $1/x^3$, ..., se obtiene:

$$(11)\qquad \alpha=-3,\ -3\omega,\ -3\omega^2 \qquad (\omega=(-1+i\sqrt{3})/2)$$

$$(12)\qquad A_1=1/(3\alpha),\ A_2=2/(9\alpha^2),\ A_3=14/(81\alpha^3),\dots$$

Por lo tanto, tenemos tres soluciones asintóticas de la ecuación (8), como sigue:

$$(13)\begin{cases} y_1 \sim e^{-3x}\left\{1-\frac{1}{9x}+\frac{2}{81x^2}-\quad\dots\right\}\sim 0 \quad (x\to+\infty) \\ y_2 \sim e^{-3\omega x}\left\{1-\frac{1}{9\omega x}+\frac{2}{81\omega^2 x}-\frac{14}{2187x^3}+\dots\right\} \end{cases}$$

$$y_3 \sim e^{-3\omega^2 x}\left\{1 - \frac{1}{9\omega^2 x} + \frac{2}{81\omega x} + \frac{14}{2187x^3} + \dots\right\}$$

donde hemos usado que $\omega^4 = \omega$. Entonces de (7) y (13) se obtiene un desarrollo asintótico de la función $F(x)$ como combinación lineal de y_2, y_3:

$$(14)\qquad F(x) = \Sigma_{k=o}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{3k}}{(k!)^3}$$

$$\sim B\,\frac{e^{-3\omega x}}{x}\left\{1 - \frac{1}{9\omega x} + \frac{2}{81\omega^2 x^2} - \frac{14}{2187x^3} + \dots\right\}$$

$$+\ C\,\frac{e^{-3\omega^2 x}}{x}\left\{1 - \frac{1}{9\omega^2 x} + \frac{2}{81\omega x^2} - \frac{14}{2187x^3} + \dots\right\}$$

donde B y C son constantes adecuadas.

§4 DETERMINACIÓN DE LAS CONSTANTES EN (14)

A partir de la ecuación diferencial es imposible determinar los valores de las constantes B y C en (14). En este parágrafo emplearemos otro método para encontrar una aproximación de la función $F(x)$ cuando $x \to +\infty$.

LEMA 1. Sean

$$f(x) = \Sigma_{k=o}^{\infty} a_k x^k, \qquad g(x) = \Sigma_{k=o}^{\infty} b_k x^k$$

$(a_k, b_k \geq 0)$ dos series convergentes para todo $x > 0$; si $b_k = a_k(1 + o(1))$, entonces

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)/f(x) = 1$$

es decir, $g(x) \sim f(x)$ cuando $x \to +\infty$.

Demostración: Sea

$$b_k = a_k(1 + c_k);$$

entonces

$$(15)\quad g(x)/f(x) = (\Sigma_o^{\infty} a_k x^k + \Sigma_o^{\infty} a_k c_k x^k)/(\Sigma_o^{\infty} a_k x^k)$$

$$= 1 + \frac{\Sigma_o^\infty a_k c_k x^k}{\Sigma_o^\infty a_k x^k}$$

Como $c_k = o(1)$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe N entero positivo tal que

(16) $\qquad k > N$ implica $|c_k| < \varepsilon/2$

Para este N se tiene evidentemente que

$$\lim_{x\to+\infty} (\Sigma_1^N |a_k c_k| \; x^k)/(\Sigma_o^\infty a_k x^k) = 0;$$

luego existe x_o tal que

(17) $\qquad x > x_o$ implica $(\Sigma_1^N \; |a_k c_k| x^k)/(\Sigma_o^\infty a_k x^k) < \varepsilon/2.$

Por lo tanto, de (15), (16) y (17) tenemos:

$$\left|\frac{g(x)}{f(x)} - 1\right| \leq \frac{\Sigma_o^\infty |a_k c_k| x^k}{\Sigma_o^\infty a_k x^k}$$

$$= \frac{\Sigma_o^N |a_k c_k| x^k}{\Sigma_o^\infty a_k x^k} + \frac{\Sigma_{N+1}^\infty |a_k c_k| x^k}{\Sigma_o^\infty a_k x^k}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\Sigma_{N+1}^\infty a_k x^k}{\Sigma_o^\infty a_k x^k} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \blacksquare$$

(i) Utilizando la fórmula de Stirling, tenemos:

$$(3k)! \sim \sqrt{(2\pi)}(3k)^{3k+1/2} \cdot e^{-3k} \qquad (k \to +\infty)$$

$$(k!)^3 \sim (\sqrt{(2\pi)} k^{k+1/2} \cdot e^{-k})^3 = 2\pi\sqrt{(2\pi)} k^{3k+3/2} e^{-3k},$$

luego

(18) $$(k!)^3 \sim \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{k(3k)!}{3^{3k}} \qquad (k \to +\infty);$$

del lema 1 tenemos:

(19) $$\Sigma_{k=o}^\infty \frac{x^{3k}}{(k!)^3} \sim \Sigma_{k=o}^\infty \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{(3x)^{3k}}{k(3k)!} \qquad (x\to+\infty)$$

Por otra parte, si $\omega = \cos(2\pi/3) + i\,\mathrm{sen}(2\pi/3) = (-1+i\sqrt{3})/2$ se tiene:

$$\omega + \omega^2 + \omega^3 = 0, \quad \omega^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^2)^3 = 0;$$

entonces tenemos:

$$(20) \qquad \Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{X^{3k}}{(k!)^3} = \frac{1}{3}\left\{e^X + e^{\omega X} + e^{\omega^2 X}\right\}.$$

Integrando la identidad (20) de 0 a X, se obtiene:*

$$\Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{X^{3k}}{(3k+1)(3k)!} = \frac{1}{3}\left\{e^X + \frac{1}{\omega}e^{\omega X} + \frac{1}{\omega^2}e^{\omega^2 X}\right\};$$

entonces del lema 1 tenemos:

$$(21) \qquad \Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{X^{3k}}{k(3k)!} \sim \frac{1}{X}\Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{3X^{3k+1}}{(3k+1)(3k)!}$$
$$= \frac{1}{X}\left\{e^X + \frac{1}{\omega}e^{\omega X} + \frac{1}{\omega^2}e^{\omega^2 X}\right\}.$$

Entonces de (19) y (21) tenemos:

$$(22) \qquad \Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(k!)^3} \sim \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{1}{3x}\left\{e^{3x} + \frac{e^{3\omega x}}{\omega} + \frac{e^{3\omega^2 x}}{\omega^2}\right\}. \blacksquare$$

(ii) Utilizando la fórmula de Stirling tenemos:

$$(18') \qquad ((2k)!)^3 \sim \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\frac{2k}{3^{6k}}(6k)! \qquad (k \to +\infty)$$

entonces:

$$(19') \qquad \Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{(x^3)^{2k}}{((2k)!)^3} \sim \Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2.2\pi}\frac{(3x)^{6k}}{k(6k)!}$$

Sea

$$\tau = \cos(2\pi/6) + i\,\mathrm{sen}(2\pi/6) = (1+i\sqrt{3})/2 = -\omega^2,$$

entonces por un procedimiento análogo a (i), se tiene la siguiente fórmula asintótica, cuando $x \to +\infty$:

---

* $1 + (1/\omega) + (1/\omega^2) = 0$

$$(22') \quad \Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{(x^3)^{2k}}{((2k)!)^3} \sim \frac{\sqrt{3}}{2.2\pi}\frac{1}{3x}\left[e^{3x} + \frac{e^{3\tau x}}{\tau} + \frac{e^{3\tau^2 x}}{\tau^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{3\tau^3 x}}{\tau^3} + \frac{e^{3\tau^4 x}}{\tau^4} + \frac{e^{3\tau^5 x}}{\tau^5}\right] . \blacksquare$$

(iii) Teniendo en cuenta la relación $\tau^2 = \omega$ se tiene de (22) y (22´) la siguiente fórmula asintótica:

$$(23) \quad \Sigma_{k=o}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{3k}}{(k!)^3} = 2\Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{(x^3)^{2k}}{((2k)!)^3} - \Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(k!)^3}$$
$$\sim \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{1}{3x}\left\{\frac{e^{3\tau x}}{} + \frac{e^{3\tau^2 x}}{3} + \frac{e^{3\tau^5 x}}{5}\right\}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{3}\pi}\frac{1}{x}\left\{\frac{e^{-3\omega^2 x}}{-\omega^2} + \frac{e^{3\omega x}}{-\omega} - e^{-3x}\right\} .$$

Comparando (14) con (23) tenemos:

$$(24) \quad \begin{aligned} B &= \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\frac{1}{-\omega} = (1+i\sqrt{3})/4\pi\sqrt{3} \\ C &= \frac{1}{2\pi\sqrt{3}}\frac{1}{-\omega^2} = (1-i\sqrt{3})/4\pi\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Reemplazando (24) en (14), obtenemos finalmente:

$$(25) \quad F(x) = \Sigma_{k=o}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{3k}}{(k!)^3}$$
$$\sim \frac{1}{\sqrt{3x}}\frac{e^{3x/2}}{x}\left[\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{3}\right) - \right.$$
$$- \frac{1}{9x}\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{2}{81x^2}\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \pi\right)$$
$$\left. - \frac{14}{2187x^3}\cos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{5}{3}\pi\right) + \dots \right]$$

OBSERVACIÓN. La fórmula (22) sirve solamente para x $x \to +\infty$, pero si se pudiera utilizar la misma fórmula (22) para $x \to -\infty$, se tendría:

$$\Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{(k!)^3} \sim \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \frac{1}{(-3x)} \left\{ e^{-3x} + \frac{1}{\omega} e^{-3\omega x} + \frac{1}{\omega^2} e^{-3\omega^2 x} \right\}$$

Así se tendría inmediatamente el resultado (23), pero es muy poco probable justificar este procedimiento, puesto que el punto infinito es un punto singular esencial de la función entera $F(z)$, es decir, no puede haber una fórmula asintótica que sirva para todo $\operatorname{Arg} z$.

APÉNDICE. Podemos encontrar fórmulas de recurrencia entre las funciones de la familia (1), como sigue:

(i) Sea C un contorno cerrado alrededor del origen en el plano complejo- z; entonces tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C (f_n(x/z)e^z/z)dz = \Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{(1)^k x^k}{(k!)^n} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^z}{z^{k+1}} dz \tag{26}$$

$$= \Sigma_{k=o}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k!)^n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k!)^{n+1}}$$

$$= f_{n+1}(x).$$

(ii)

$$\int_0^{\infty} f_{n+1}(xt)e^{-t}dt = \int_0^{\infty} \Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^{n+1}} x^k t^k e^{-t} dt \tag{27}$$

$$= \Sigma_{k=o} \frac{(-1)^k}{(k!)^{n+1}} x^k \int_0^{\infty} t^k e^{-t} dt$$

$$= \Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^{n+1}} x^k (k!) = \Sigma_{k=o}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^n} x^k$$

REFERENCIAS

1 G.BIRKHOFF, G.C.ROTA, Ordinary Differential Equations, Blaisdell Pub.Co., Waltham, 1960.

2 E.A.CODDINGTON, N.LEVINSON, Theory of Ordinary Equations, McGraw Hill, N.Y., 1955.

3 E.L.INCE, Ordinary Differential Equations, Dover, Nueva York, 1956

4 ERDELYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, TRICOMI, Higher Trascendental Functions, Vol.I,II,III, Macgraw-Hill, New York, 1953.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia

(Recibido en febrero de 1968)