Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen II, 1968 , págs 29-44 .

UN METODO DE SUMACION

por

A. y C. Takahashi

1. Introducción.

Es bien conocido el método de sumación de series debido a Cesàro: Dada una serie Σx_k, sea $s_n = x_1 + \dots + x_n$ $(n = 1,2,\dots)$ la sucesión de sus sumas parciales, y sea

$$\alpha_n = \frac{1}{n}(s_1 + \dots + s_n) \ , \quad (n = 1,2,\dots) \ .$$

Se dice que Σx_k es (C,1)-sumable (o sumable en el sentido de Cesàro) si la sucesión (α_n) es convergente; su límite a es entonces la (C,1)-suma de la serie, y se escribe $a = (C,1)\text{-}\Sigma x_k$.

Este método de sumación es regular, es decir, si una serie es sumable (convergente) en el sentido ordinario entonces es (C,1)-sumable y su (C,1)-suma coincide con su suma ordinaria. Por otra parte, este método de sumación es más poderoso que el ordinario, es decir, existen series (C,1)-sumables que no son sumables en el sentido usual.

Naturalmente, los conceptos anteriores se aplican a sucesiones cualesquiera: Una sucesión (a_n) converge en el sentido de Cesàro (o es (C,1)-convergente) hacia a si la sucesión de medias aritméticas

$$\alpha_n = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n) \ , \quad (n = 1,2,\dots)$$

converge (en el sentido usual) hacia a; en este caso se escribe $a = (C,1)\text{-}\lim a_n$. La regularidad indica entonces que si $\lim a_n$ existe, entonces también existe $(C,1)$-$\lim a_n$, y estos números son iguales.

Aplicando reiteradamente el método de Cesàro se obtiene una infinidad de métodos progresivamente más poderosos que son los llamados métodos de Hölder ((C,p), $p = 1,2,\ldots$) .

Debido a que la introducción de un concepto generalizado de <u>límite</u> de una sucesión es la base de diversos métodos de sumación de series, es conveniente mencionar la definición siguiente:

Sea $\mathcal{S}$ un subespacio del espacio lineal de todas las sucesiones de números reales. Un <u>límite generalizado</u> es un funcional lineal positivo $L : (a_n) \longrightarrow L[a_n]$ ($(a_n) \in \mathcal{S}$) que cumple las condiciones siguientes:

(L1) Si $a_n = 1$ $(n = 1,2,\ldots)$, entonces $L[a_n] = 1$.

(L2) Si $b_n = a_{n+1}$, entonces $L[b_n] = L[a_n]$.

Diremos además que L es <u>regular</u> si para toda sucesión convergente (a_n) se tiene que $(a_n) \in \mathcal{S}$ y $L[a_n] = \lim a_n$.

En este artículo definiremos dos límites generalizados considerando también el método de sumación asociado a uno de ellos. Las definiciones se basan en las observaciones siguientes:

1. Dada una sucesión real (a_n) , el término

$$\alpha_n = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) = a_1 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{n}$$

representa el valor medio de la variable aleatoria cuyos valores son $a_1, \ldots, a_n$, suponiendo que cada uno de estos puntos tiene probabilidad $\frac{1}{n}$. Dentro de este orden de ideas, el número

$$v_n(a) = \frac{1}{n}\left[(a_1 - a)^2 + \ldots + (a_n - a)^2 \right]$$

representa el segundo momento (momento de inercia) con respecto al punto a, el cual es mínimo cuando se trata de la varianza, es decir, cuando a es el valor medio α_n. La condición $v_n(a) \longrightarrow 0$ indicará que los puntos a_n se "concentran" en las proximidades de a, (véase Definición 2).

2. Fijando de nuevo una sucesión (a_n), sea V una vecindad del punto a y para cada n sea $\mathcal{K}_n(V)$ el número de índices k $(1 \leq k \leq n)$ tales que $a_k \in V$. Entonces $\mathcal{K}_n(V) / n$ es la probabilidad de que $a_k \in V$ $(1 \leq k \leq n)$, luego $P(V) = \lim (\mathcal{K}_n(V) / n)$ (si este límite existe) puede interpretarse como la probabilidad de que $a_k \in V$ $(k = 1,2,\ldots)$. Ahora bien, si $P(V) = 1$ para toda vecindad V de a, la sucesión (a_n) tiende, en cierto sentido, hacia a. Observamos por último que la condición anterior es equivalente a la impuesta en la Definición 1 del parágrafo siguiente.

2. La p-convergencia y la v-convergencia.

Sea (a_n) una sucesión real.

Definición 1. Diremos que (a_n) es p-convergente (y que su p-límite es a) si para todo $\varepsilon > 0$ y todo λ $(0 \leq \lambda < 1)$, existe n_0 tal que, si $n > n_0$ entonces $|a_k - a| < \varepsilon$ para, por lo menos, $[\lambda n]$ valores de k $(1 \leq k \leq n)$.

($[\lambda n]$ es la parte entera de λn, es decir, el mayor entero menor o igual que λn.)

Proposición 1. (Unicidad del p-límite). Una sucesión no puede tener más de un p-límite.

Demostración. Dados a y a' $(a \neq a')$ y suponiendo que a y a' son p-límites de (a_n) basta tomar, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{1}{2} | a - a'|$ y $\lambda = 3/4$ obteniéndose una contradicción.

Para indicar que a es el p-límite de (a_n) se escribirá

$$a = \text{p-lim } a_n \quad .$$

Proposición 2. Si $a = \text{p-lim } a_n$ entonces a es un punto de aglomeración de (a_n), es decir, existe una subsucesión (a_{n_k}), $n_1 < n_2 < \ldots$, que converge hacia a.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ y m (un número natural), existe $n > 2m$ tal que $|a_k - a| < \varepsilon$ para $[\frac{1}{2} n]$ ($\geq [m] = m$) valores de k ($1 \leq k \leq n$). Luego existe por lo menos un $k \geq m$ tal que $| a_k - a | < \varepsilon$.

Antes de enunciar la segunda definición introduciremos algunas notaciones:
Como en la introducción,

$$\alpha_n = \frac{1}{n} (a_1 + \ldots + a_n) \quad , \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{1}$$

es la sucesión de las medias aritméticas. Además, para cada número a se define:

$$v_n(a) = \frac{1}{n} [(a_1 - a)^2 + \ldots + (a_n - a)^2] \tag{2}$$

para $n = 1,2,\ldots$.
En lugar de $v_n(0)$ escribiremos $\overset{2}{\alpha}_n$, es decir:

$$\overset{2}{\alpha}_n = \frac{1}{n} (a_1^2 + \ldots + a_n^2) \quad , \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{3}$$

que es precisamente la sucesión de las medias aritméticas de los valores de la sucesión (a_n^2) .

Se observa que, para todo a :

$$v_n(a) = a^2 - 2a\,\alpha_n + \overset{2}{\alpha}_n \quad , \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{4}$$

Definición 2. Diremos que (a_n) es v-convergente (y que su v-límite es a) <u>si</u>

$$v_n(a) \longrightarrow 0 .$$

En este caso se escribe

$$a = \text{v-lim } a_n .$$

Nota: Como se verá luego, el v-límite es único.

<u>Proposición 3</u> . <u>Si (a_n) es v-convergente entonces es p-convergente y</u>

$$\text{p-lim } a_n = \text{v-lim } a_n .$$

Demostración: Supongamos que v-lim $a_n = a$ y sean $\varepsilon > 0$ y $0 < \lambda < 1$ arbitrarios. Definiendo $\varepsilon_0 = (1 - \lambda)\ \varepsilon^2$ se tiene $\varepsilon_0 > 0$ y como $v_n(a) \longrightarrow 0$ entonces existe n_0 tal que, para todo $n > n_0$

$$(a_1 - a)^2 + \ldots + (a_n - a)^2 < n\ \varepsilon_0 \qquad (5)$$

Si en la suma de la izquierda hubiesen más de $n - [\lambda n]$ sumandos mayores o iguales que ε^2 , se tendría

$$(a_1 - a)^2 + \ldots + (a_n - a)^2 > (\ n - [\lambda n]\ )\ \varepsilon^2 \geq$$
$$\geq (\ n - \lambda n\ )\ \varepsilon^2 = n\ (1 - \lambda)\ \varepsilon^2 = n\ \varepsilon_0 ,$$

lo cual contradice a (5). Luego el número de sumandos mayores o iguales que ε^2 es menor o igual que $n - [\lambda n]$, es decir, hay (por lo menos) $n - (n - [\lambda n]) = [\lambda n]$ sumandos menores que ε^2 . En otros términos, debe cumplirse que

$$(a_k - a)^2 < \varepsilon^2$$

para (por lo menos) $[\lambda n]$ valores de k $(\ 1 \leq k \leq n\ )$. Es decir, $a = \text{p-lim } a_n$.

<u>Corolario</u>. (<u>Unicidad del v-límite</u>). <u>Una sucesión no puede tener más de un p-límite</u>.

Proposición 4. (Regularidad de la v-convergencia) Si (a_n) es convergente entonces es v-convergente y

$$\text{v-lim } a_n = \lim a_n \quad .$$

Demostración. Supongamos que $a_n \longrightarrow a$ (en el sentido usual); entonces $a_n^2 \longrightarrow a^2$.
Recordando las definiciones de α_n y $\overset{2}{\alpha}_n$ (ecuaciones (1) y (3) respectivamente), y teniendo en cuenta que la (C,1)-convergencia es regular, se tiene:

$$\alpha_n \longrightarrow a \quad \text{y} \quad \overset{2}{\alpha}_n \longrightarrow a^2 .$$

Luego, usando (4) :

$$v_n(a) \longrightarrow 0 \quad .$$

Corolario. (Regularidad de la p-convergencia). Si (a_n) es convergente, entonces es p-convergente y

$$\text{p-lim } a_n = \lim a_n \quad .$$

Proposición 5. Si (a_n) es p-convergente y además es acotada, entonces es v-convergente.

Demostración. Supongamos que p-lim $a_n = a$ y que $|a_k| < M$ $(k = 1,2,\dots)$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario sea $0 \leq \lambda < 1$ tal que $(1 - \lambda) M < \frac{\varepsilon}{3}$.

Por hipótesis, existe n_o tal que, si $n > n_o$ entonces $|a_k - a| < \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{1/2}$ para $[\lambda n]$ valores de k $(1 \leq k \leq n)$. Tomando ahora $n > \max\left\{n_o , \frac{3M}{\varepsilon}\right\}$ se tiene:

$$(a_1 - a)^2 + \dots + (a_n - a)^2 < [\lambda n]\,\frac{\varepsilon}{3} + (n - [\lambda n]\,)\,M <$$
$$< n\,\frac{\varepsilon}{3} + (n - \lambda n + 1)\,M = n\cdot\frac{\varepsilon}{3} + n\,(1 - \lambda)\,M + M$$
$$< n\cdot\frac{\varepsilon}{3} + n\cdot\frac{\varepsilon}{3} + n\cdot\frac{\varepsilon}{3} = n\,\varepsilon \quad .$$

Proposición 6. Sean (a_n) y (b_n) sucesiones p-convergentes. Entonces $(a_n + b_n)$ y $(a_n b_n)$ son p-convergentes y se tiene:

(i) $\text{p-lim}\,(a_n + b_n) = (\text{p-lim}\,a_n) + (\text{p-lim}\,b_n)$.

(ii) $\text{p-lim}\,(a_n b_n) = (\text{p-lim}\,a_n)\cdot(\text{p-lim-}b_n)$.

Demostración. Supongamos que $\text{p-lim}\,a_n = a$ y $\text{p-lim}\,b_n = b$. Dados $\varepsilon > 0$ y $0 \leq \lambda < 1$ arbitrarios, sea $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\lambda + 1)$ y $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon$ (resp. $\varepsilon_1 = \min\left\{ \varepsilon/(1+|a|+|b|) , 1 \right\}$.)

Por hipótesis existe n_1 tal que, si $n > n_1$ entonces $|a_k - a| < \varepsilon_1$ para $[\lambda_1 n]$ valores de k $(1 \leq k \leq n)$, y existe n_2 tal que, si $n > n_2$ entonces $|b_k - b| < \varepsilon_1$ para $[\lambda_1 n]$ valores de k $(1 \leq k \leq n)$.

Luego, si $n > n_o = \max\{n_1 , n_2\}$ entonces

$$|a_k - a| < \varepsilon_1 \quad \text{y} \quad |b_k - b| < \varepsilon_1$$

para (por lo menos) $n - 2(n - [\lambda_1 n]) \leq [\lambda n]$ valores de k $(1 \leq k \leq n)$. En consecuencia si $n > n_o$ se tiene:

(i) $|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$

(resp. (ii) $|a_n b_n - ab| \leq |a_n - a|\,|b_n - b| + |a|\,|b_n - 1| + |b|\,|a_n - a| < \varepsilon_1(1 + |a| + |b|) \leq \varepsilon$.)

para (por lo menos) $[\lambda n]$ valores de k $(1 \leq k \leq n)$.

Corolario. Si (a_n) es p-convergente y λ es un número real , entonces (λa_n) es p-convergente y $\text{p-lim}\,(\lambda a_n) = \lambda\,(\text{p-lim}\,a_n)$.

Demostración. Sea $b_n = \lambda$ $(n = 1,2,\ldots)$: entonces $\lim b_n = \lambda$, luego (b_n) es p-convergente y $\text{p-lim}\,b_n = \lambda$. Entonces $(\lambda a_n) = (b_n a_n)$ es p-convergente y $\text{p-lim}\,(\lambda a_n) = (\text{p-lim}\,b_n)\cdot(\text{p-lim}\,a_n) = \lambda\,(\text{p-lim}\,a_n)$.

Proposición 7. El conjunto $\mathcal{S}_p$ de todas las sucesiones p-convergentes es un espacio lineal y la aplicación $L_p : (a_n) \longrightarrow \text{p-lim}\,a_n$ es un límite generalizado definido sobre $\mathcal{S}_p$ que goza de la propiedad adicional

$$L_p[a_n b_n] = L_p[a_n] \cdot L_p[b_n] .$$

Demostración. La Prop. 6 y su Corolario muestran que $\mathcal{S}_p$ es un subespacio del espacio de todas las sucesiones reales, que L_p es un funcional lineal sobre $\mathcal{S}_p$ y que L_p satisface la propiedad adicional mencionada.

Si $a_n \geq 0$ $(n = 1,2,\dots)$ entonces, como $L_p[a_n] =$ p-lim a_n es un punto de aglomeración de (a_n), se tiena $L_p[a_n] \geq 0$. Luego L_p es positivo.

Por último: (L1). Si $a_n = 1$ $(n = 1,2,\dots)$ entonces $\lim a_n = 1$ luego p-lim $a_n = 1$.

(L2). Sea $a =$ p-lim a_n y $b_k = a_{k+1}$ $(k = 1,2,\dots)$. Dados $\varepsilon > 0$ y $0 \leq \lambda < 1$ arbitrarios, fijemos λ_1 tal que $\lambda < \lambda_1 < 1$ y luego n_1 tal que, $\frac{1-\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} < n_1$. Por hipótesis existe n_2 tal que, si $n > n_2$ entonces $|a_k - a| < \varepsilon$ para $[\lambda_1(n+1)]$ valores de k $(1 \leq k \leq n+1)$, de donde $|a_k - a| < \varepsilon$ para $[\lambda_1(n+1)] - 1$ valores de k $(2 \leq k \leq n+1)$, es decir, $|b_k - a| < \varepsilon$ para $[\lambda_1(n+1)] - 1$ valores de k $(1 \leq k \leq n)$.
Cuando $n > \max\{n_1, n_2\}$ se tiene además que $[\lambda n] < [\lambda_1(n+1)] - 1$. Luego $|b_k - a| < \varepsilon$ para (por lo menos) $[\lambda n]$ valores de k $(1 \leq k \leq n)$.

Para demostrar, con respecto a la v-convergencia una afirmación similar a la primera de la Prop. 6 necesitamos el siguiente

Lema. Si (s_n) y (t_n) son sucesiones reales tales que

$$\frac{1}{n}(s_1^2 + \dots + s_n^2) \longrightarrow 0 \text{ y } \frac{1}{n}(t_1^2 + \dots + t_n^2) \longrightarrow 0$$

entonces

$$\frac{1}{n}(s_1 t_1 + \dots + s_n t_n) \longrightarrow 0 .$$

Demostración. Usando la desigualdad $|x\, y| < x^2 + y^2$ se tiene:

$$|s_1 t_1 + \dots + s_n t_n| \le |s_1 t_1| + \dots + |s_n t_n|$$
$$\le (s_1^2 + \dots + s_n^2) + (t_1^2 + \dots + t_n^2).$$

Multiplicando por $\frac{1}{n}$ y tomando límites se obtiene el resultado deseado.

Proposición 8. Sean (a_n) y (b_n) sucesiones v-convergentes y λ un número real. Entonces (a_n+b_n) y (λa_n) son v-convergentes y se tiene:

i) $\text{v-lim}\,(a_n + b_n) = (\text{v-lim}\, a_n) + (\text{v-lim}\, b_n)$.

ii) $\text{v-lim}\,(\lambda a_n) = \lambda(\text{v-lim}\, a_n)$.

Demostración. Sean $a = \text{v-lim}\, a_n$, $b = \text{v-lim}\, b_n$ y además

$$v_n^{(1)}(a) = \frac{1}{n}\left[(a_1 - a)^2 + \dots + (a_n - a)^2\right] ,$$
$$v_n^{(2)}(b) = \frac{1}{n}\left[(b_1 - b)^2 + \dots + (b_n - b)^2\right] .$$

Por hipótesis $v_n^{(1)}(a) \longrightarrow 0$ y $v_n^{(2)}(b) \longrightarrow 0$.

i) Sea

$$v_n(a+b) = \frac{1}{n}\left[(a_1+b_1 - (a+b))^2 + \dots + (a_n+b_n - (a+b))^2\right],$$

entonces: $v_n(a + b) = v_n^{(1)}(a) + v_n^{(2)}(b) +$

$$2\,\frac{1}{n}\left[(a_1 - a)(b_1 - b) + \dots + (a_n - a)(b_n - b)\right] .$$

Aplicando el lema anterior con $s_k = a_k - a$ y $t_k = b_k - b$ se concluye que $v_n(a + b) \longrightarrow 0$.

Luego $(a_n + b_n)$ es v-convergente y

$$\text{v-lim}\,(a_n + b_n) = a + b .$$

ii) Sea ahora

$$v_n(\lambda a) = \frac{1}{n}\left[(\lambda a_1 - \lambda a)^2 + \dots + (\lambda a_n - \lambda a)^2\right] ,$$

entonces $v_n(\lambda a) = \lambda^2 v_n(a) \longrightarrow 0$. Luego (λa_n) es v-convergente y

$$\text{v-lim } (\lambda a_n) = \lambda a .$$

Proposición 9. <u>El conjunto $\mathcal{S}_v$ de todas las sucesiones v-convergentes es un espacio lineal y la aplicación $L_v : (a_n) \longrightarrow$ v-lim a_n es un límite generalizado definido sobre $\mathcal{S}_v$</u> .

Demostración. La Prop. 8 muestra que $\mathcal{S}_v$ es un subespacio de todas las sucesiones reales y que L_v es un funcional lineal sobre $\mathcal{S}_v$.

Si $a_n \geq 0$ $(n = 1,2,\ldots)$ y $a = L_v[a_n]$ entonces $a = L_p[a_n]$ (Prop. 3) , luego $a \geq 0$ (pues L_p es positivo). Es decir, L_v es positivo .

La propiedad (L1) se demuestra como en la Prop. 9. Supongamos por último que $a = L_v[a_n] =$ v-lim a_n y que $b_k = a_{k+1}$ $(k = 1,2,\ldots)$. Entonces, si

$$v_n(a) = \frac{1}{n}\left[(b_1 - a)^2 + \ldots + (b_n - a)^2\right]$$

se tiene: $v_n(a) = \frac{1}{n}\left[(a_2 - a)^2 + \ldots + (a_{n+1} - a)^2\right]$

$$\leq \frac{1}{n+1}\left[(a_1 - a)^2 + \ldots + (a_{n+1} - a)^2\right]\frac{n+1}{n} \rightarrow 0$$

Luego $a =$ v-lim $b_n = L_v[b_n]$, es decir, se cumple (L2).

3. Observaciones y Ejemplos.

(a) Si $\alpha_n \longrightarrow a$ y $\overset{2}{\alpha}_n \longrightarrow a^2$ entonces $a =$ v-lim a_n .

Este hecho se usó en la demostración de la Prop. 4; es una consecuencia inmediata de la ecuación (4) .

(b) La v-convergencia es más poderosa que la convergencia ordinaria (cfr. con Prop. 4) .

Ejemplo :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es un cuadrado .} \\ 0 & \text{en los otros casos .} \end{cases}$$

Obviamente (a_n) no es convergente en el sentido ordinario. Por otra parte, como $a_n^2 = a_n$ $(n = 1,2,\ldots)$, entonces $\alpha_n = \overset{2}{\alpha}_n$ $(n = 1,2,\ldots)$. Ahora bien, cuando $m^2 \leq n < (m+1)^2$, se tiene $\alpha_n = \frac{m}{n}$, luego $0 < \alpha_n = m \cdot \frac{1}{n} \leq m \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{1}{m} \leq \frac{2}{m+1} < \frac{2}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$. Luego $\alpha_n \longrightarrow 0$ (y entonces también $\overset{2}{\alpha}_n \longrightarrow 0$), concluyéndose, según (a), que (a_n) es v-convergente y que su v-límite es 0 .

(c) La p-convergencia es más poderosa que la v-convergencia (cfr. con Prop. 3) .

Ejemplo:

$$a_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es de la forma } 2^m . \\ 0 & \text{en los otros casos .} \end{cases}$$

Veamos que (a_n) es p-convergente: Dados $\varepsilon > 0$ y $0 \leq \lambda < 1$, sea n_1 tal que $(p/2^p) < 1 - \lambda$ si $p \geq n_1$, y sea $n_0 = 2^{n_1}$. Si $n \geq n_0$ entonces existe $p \geq n_1$ tal que $2^p \leq n < 2^{p+1}$ teniéndose en este caso $|a_k - 0| = 0 < \varepsilon$ para $n - p$ valores de k $(1 \leq k \leq n)$. Pero

$$n - p = n\left(1 - \frac{p}{n}\right) \geq n\left(1 - \frac{p}{2^p}\right) > n\lambda \geq [n\lambda] .$$

Luego $0 = \text{p-lim } a_n$. Por otra parte:

$$v_{2^n}(0) = \frac{1}{2^n}\left(2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{2n}\right) = \frac{1}{3}\left(2^{n+2} - \frac{1}{2^{n-2}}\right) \longrightarrow +\infty ,$$

y entonces (a_n) no es v-convergente.

(d) La v-convergencia no implica acotación (cfr. con Prop. 5) . La sucesión

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{m} & \text{si } n = m^3 \\ 0 & \text{en los otros casos .} \end{cases}$$

no es acotada pero es v-convergente (hacia 0).

Este mismo ejemplo muestra que el producto de dos sucesiones v-convergentes no es necesariamente v-convergente. En efecto, la sucesión $a_n^2 = a_n \cdot a_n$ no es v-convergente.

Sin embargo, como el funcional L_p es una extensión del funcional L_v (véase Prop. 3), se cumple el siguiente resultado parcial (cfr. con Prop. 6, ii) : si (a_n), (b_n) y $(a_n b_n)$ son todas v-convergentes, entonces v-lim $a_n b_n$ = (v-lim a_n) (v-lim b_n). Cabe anotar que la (C,1)-convergencia no goza de una propiedad análoga a esta.

(e) Dada una sucesión (a_n) y un número a se tiene (véanse ecuaciones (2) y (3)) :

$$v_n(a) = a^2 - 2a\,\alpha_n + \overset{2}{\alpha}_n \geq 0 .$$

En particular: $v_n(\alpha_n) = \overset{2}{\alpha}_n - \alpha_n^2 \geq 0$,

luego $\alpha_n^2 \leq \overset{2}{\alpha}_n \quad (= v_n(0))$,

es decir $|\alpha_n| \leq \sqrt{v_n(0)}$.

Entonces $v_n(0) \longrightarrow 0$ implica $\alpha_n \longrightarrow 0$, es decir, si $0 =$ v-lim a_n entonces $0 =$ (C,1)-lim a_n. Aplicando este resultado a la sucesión $(b_n) = (a_n - a)$ (teniendo en cuenta que $a =$ v-lim a_n sii $0 =$ v-lim b_n y que $a =$ (C,1)-lim a_n sii $0 =$ (C,1)-lim b_n), puede afirmarse que: Si (a_n) es v-convergente y $a =$ v-lim a_n, entonces (a_n) es (C,1)-convergente y $a =$ (C,1)-lim a_n.

La recíproca de la afirmación anterior es, en general, falsa. Así, por ejemplo, la sucesión $a_n = (-1)^{n+1}$ ($n = 1,2,\ldots$) es (C,1)-convergente pero no es v-convergente.

(f) Sea (a_n) una sucesión v-convergente hacia a , es decir :

$$v_n(a) = a^2 - 2a\alpha_n + \overset{2}{\alpha}_n \longrightarrow 0 .$$

De acuerdo con (e) se tiene $\alpha_n \longrightarrow a$ y entonces se concluye que $(\overset{2}{\alpha}_n)$ es convergente (y su límite es a^2). La v-convergencia es aquí una hipótesis imprescindible; en otras palabras, la convergencia de (α_n) (es decir, la (C,1)-convergencia de (a_n)) no implica necesariamente la convergencia de $(\overset{2}{\alpha}_n)$. En efecto si

$$a_n = (-1)^{n+1} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) , \quad (n = 1,2,\dots) ,$$

entonces $\alpha_n \longrightarrow 0$ mientras que $\overset{2}{\alpha}_n \longrightarrow +\infty$.

Observemos por último, que como $v_n(a)$ es mínimo cuando $a = \alpha_n$ entonces la v-convergencia de (a_n) implica que $v_n(\alpha_n) \longrightarrow 0$.

4. La p-sumabilidad.

Aplicando las dos nociones de convergencia introducidas en el parágrafo 2 a la sucesión de las sumas parciales de una serie se obtienen sendas definiciones de sumabilidad :

Definición 3. Diremos que una serie Σx_k es p-sumable si la sucesión (S_n) de sus sumas parciales es p-convergente .

El p-límite de (S_n) se llama entonces la p-suma de la serie.

En forma enteramente análoga se define la v-sumabilidad. Naturalmente, todos los resultados antes obtenidos se aplican en este caso .

Pasamos ahora a enunciar y demostrar un teorema de tipo tauberiano para la p-sumabilidad, es decir, una proposición que a partir de la p-sumabilidad y una condición adicional (condición tauberiana) permite concluir la sumabilidad usual.

Proposición 10. Sea Σx_k una serie real tal que:

(i) Σx_k es p-sumable, y su p-suma es a.

(ii) Existen $M > 0$ y $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tales que $|x_k| \leq M/k$ para todo $k \geq \bar{k}$.

Entonces Σx_k es convergente en el sentido usual y su suma es a.

Demostración. Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que se cumplen (i) y (ii) pero que (S_n) no converge hacia a. Entonces:

(a) Existe un número $\varepsilon > 0$ y una sucesión creciente de enteros $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots \longrightarrow +\infty$ tales que

$$|S_{k_i} - a| \geq 2\varepsilon, \quad i = 1,2, \ldots .$$

(b) Como $0 < 1/(\frac{\varepsilon}{2M} + 1) < 1$ entonces puede elegirse λ tal que

$$\max\left\{1/(\frac{\varepsilon}{2M} + 1), 1/2\right\} < \lambda < 1 .$$

Según esto, $1/(\frac{\varepsilon}{2M} + 1) < \lambda$ (lo cual equivale a $M\frac{1-\lambda}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$) y $\frac{1}{2} < \lambda$ (es decir $\frac{1}{\lambda} < 2$).

La hipótesis (i), es decir, la p-convergencia de (S_n) permite asegurar que:

(c) Existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que, si $n > n_o$ entonces

$$|S_h - a| < \varepsilon$$

para, por lo menos, $[\lambda n]$ valores de h $(1 \leq h \leq n)$.

(d) Como $k_i \longrightarrow +\infty$, puede elegirse k_{i_o} tal que

$$[\lambda k_{i_o}] \geq \max\left\{n_o, \bar{k}, 4M/\varepsilon\right\} .$$

Obsérvese que, como $\lambda < 1$ entonces $k_{i_o} > [\lambda k_{i_o}]$.

(Nota: Se concluye, en particular, que $k_{i_o} > 4M/\varepsilon$, es decir, $2\frac{M}{k_{i_0}} < \frac{\varepsilon}{2}$.)

Vemos ahora que $k_{i_0} > n_0$ (puesto que $[\lambda k_{i_0}] \geq n_0$) y entonces, según (c) , debe tenerse $|S_h - a| < \varepsilon$ para, por lo menos, $[\lambda k_{i_0}]$ valores de h $(1 \leq h \leq k_{i_0})$ pudiendo entonces asegurarse que :

(e) Existe $h_0 \in \mathbb{N}$ tal que $[\lambda k_{i_0}] \leq h_0 \leq k_{i_0}$ y

$$|S_{h_0} - a| < \varepsilon .$$

Pero, según (a) ,

$$|S_{k_{i_0}} - a| \geq 2\varepsilon .$$

Concluyéndose que

$$|S_{k_{i_0}} - S_{h_0}| > \varepsilon$$

Se observa que $k_{i_0} \neq h_0$ (pues en caso contrario se tendría $\varepsilon < 0$) ; como además $h_0 \leq k_{i_0}$ entonces $h_0 < k_{i_0}$

Sea ahora $p = k_{i_0} - h_0$. Recordando que $h_0 \geq [\lambda k_{i_0}] > \bar{k}$ y la hipótesis (ii) , tenemos :

$$\varepsilon < |S_{k_{i_0}} - S_{h_0}| = |S_{h_0+p} - S_{h_0}| = |x_{h_0+1} + \dots + x_{h_0+p}| \leq$$
$$\leq |x_{h_0+1}| + \dots + |x_{h_0+p}| \leq M\left(\frac{1}{h_0+1} + \dots + \frac{1}{h_0+p}\right)$$
$$< M\frac{p}{h_0+1} .$$

Pero como $p = k_{i_0} - h_0$ y $[\lambda k_{i_0}] \leq h_0$, entonces:

$$p \leq k_{i_0} - [\lambda k_{i_0}] \leq k_{i_0} + 1 - \lambda k_{i_0} = (1-\lambda)\,k_{i_0} + 1 .$$

Y por otra parte : $h_0 + 1 \geq [\lambda k_{i_0}] + 1 \geq \lambda k_{i_0}$, es decir:

$$\frac{1}{h_0+1} \leq \frac{1}{\lambda k_{i_0}}$$

Se tiene entonces :

$$\varepsilon < M\frac{(1-\lambda)\,k_{i_0} + 1}{\lambda k_{i_0}} = M\frac{1-\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\frac{M}{k_{i_0}}$$

Teniendo en cuenta la elección de λ (véase (b)) y de k_{i_0} (véase (d), Nota) , se concluye que

$$\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo cual es absurdo .

Como la v-sumabilidad implica la p-sumabilidad, la proposición anterior vale, en particular, si se sustituye la hipótesis de p-sumabilidad por la de v-sumabilidad.

Debido a que la v-sumabilidad implica también la (C,1)-sumabilidad, este caso particular de la Prop. 10 puede igualmente derivarse de un teorema tauberiano demostrado por G. H. Hardy en el cual , a partir de la (C,1)-sumabilidad y de la condición (ii) se concluye la convergencia usual. Debemos esta observación al Profesor Y. Takeuchi.

BIBLIOGRAFIA

ZAMANSKY, M. "La sommation des séries divergentes," Gautiers-Villars, 1954 .

(Recibido en marzo de 1968)