Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen II,1968, págs.

SOBRE UNA CLASE DE OPERADORES DE CONVOLUCIÓN, I

por
Jaime LESMES

INTRODUCCIÓN. Se sabe ([11], cap.III,Teo.35) que toda distribución sobre R^n concentrada en un punto es una combinación lineal de derivadas de la medida de Dirac correspondiente a dicho punto. Se deduce inmediatamente que una distribución S sobre R^n cuyo soporte consta de un número finito de puntos $h_o, h_1, \ldots, h_m \in R^n$ es una combinación lineal de derivadas de las medidas de Dirac concentradas en los h_k ($1 \leq k \leq m$). Es decir, S es de la forma:

$$(0.1) \qquad S = \Sigma_{k=o}^{m} P_k(D)\delta_{(h_k)}$$

en donde los $P_k(.)$, $1 \leq k \leq m$, son polinomios complejos en n variables, y se ha puesto:

$$D = \left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

(ver [7],cap.I; en general, usaremos las notaciones de este libro, así como las de [11])

Como $S \in \mathcal{E}'$, para toda distribución $u \in \mathcal{D}'$ está definida la convolución $S * u$, y se tiene:

$$(0.2) \qquad S * u = \Sigma_{k=o}^{m} P_k(D)\,\tau_{h_k}u, \quad \forall u \in \mathcal{D}' .$$

En esta fórmula τ_{h_k} representa el operador de traslación correspondiente a h_k ($0 \leq k \leq m$): $\forall u \in \mathcal{D}'$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$,

$$<\tau_{h_k} u, \varphi> = <u(x-h_k), \varphi(x)> = <u(x), \varphi(x+h_k)>$$

(ver [11],Tomo I,pág.55).

En [9] hemos hecho el estudio de los operadores de convolución de la forma (0.2), es decir, de los operadores diferenciales parciales lineales con diferencias y coeficientes constantes. En este trabajo presentamos los principales resultados de dicho artículo; para la exposición detallada y las demostraciones, remitimos a [9].

§1 PRELIMINARES

1. EL OPERADOR $\mathcal{P}$. De ahora en adelante, usaremos la notación:

$$(1.1) \qquad \mathcal{P}u = \Sigma_{k=0}^{m} P_k(D)\, \tau_{h_k} u,$$

en donde u varía en un espacio de distribuciones, o de funciones, conveniente (no necesariamente en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$). Supondremos también que siempre se tiene $h_o = 0$.

Ante todo, vamos a precisar el significado de la fórmula (1.1), para lo cual damos las siguientes definiciones (ver [6],cap.II,§1; [9],§1,2):

DEFINICIÓN 1.1 Un espacio fundamental Φ de funciones es un espacio vectorial topológico localmente convexo, cuyos elementos son funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$; la topología de Φ debe ser más fina que la topología de la convergencia simple. Los elementos del espacio dual Φ' se llaman funciones generalizadas o también distribuciones.

DEFINICIÓN 1.2 Sea p el máximo de los grados de los polinomios $P_k(.)$ en (1.1). Sean Φ , Ψ espacios fundamentales de funciones sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, tales que

$$\forall \varphi \in \Phi,\ D^q \tau_{-h_k}\varphi \in \Psi \quad , \text{ para } 0 \leq k \leq m,\ |q| \leq p.$$

Sean Φ', Ψ' los espacios de distribuciones correspondientes, $f \in \Phi'$; se dice que $u \in \Psi'$ es una solución de la ecuación:

$$(1.2) \qquad\qquad \mathcal{P}u = f$$

si se tiene, $\forall \varphi \in \Phi$:

$$(1.3) \quad \langle u, \mathcal{P}^*\varphi\rangle = \langle u(x), \Sigma_{k=0}^{m} P_k(-D)\varphi(x+h_k)\rangle = \langle f, \varphi\rangle \ .$$

NOTA. Como $\varphi \in \Phi$, se tiene: $\mathcal{P}^*\varphi \in \Psi$, y por tanto $\langle u, \mathcal{P}^*\varphi\rangle$ está bien definido. En [9], loc.cit., se encuentran algunos ejemplos para ilustrar estas definiciones.

2. ALGUNOS PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL OPERADOR $\mathcal{P}$. Se pueden plantear, entre otros, los siguientes:

I) Existencia de una solución fundamental, esto es, de una solución E de la ecuación $\mathcal{P}E = \delta$ (δ es la medida de Dirac). Ver [1], [4], [5], [10] . En [9], §2, presentamos una demostración constructiva de la existencia de una solución fundamental en $\mathcal{D}'(R^n)$; ésta es una modificación y ampliación del método de AGRANOVIČ [1].

II) Solución de la ecuación (1.2) en los espacios $\mathcal{D}'_K$, en donde K es un compacto de R^n. Sobre este problema trata el §3 de [9].

III) Solución de la ecuación (1.2) en los espacios $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{E}'(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}'_F(\Omega)$, en donde Ω es un abierto de R^n. Este problema está tratado en [8]; en [9], §3, nos.4-5, nos limitamos a algunas consideraciones elementales del caso en Ω es acotado, utilizando la solución fundamental.

IV) Regularidad de las soluciones de la ecuación (1.2). Ver [5]. En [9], §4, definimos las nociones de hipoelepticidad e hipoelipticidad parcial sobre un abierto $\Omega \subset R^n$, para operadores de la forma (1.1).

Mayor información y bibliografía se encuentran en la introducción de [9].

3. LOS TRES CASOS. Para los operadores de la forma (1.1) conviene distinguir tres casos:

I) $m > 0$, y al menos uno de los polinomios P_k no es constante.

II) $m > 0$, y $P_k(X) \equiv c_k$, c_k constante $(0 \leq k \leq m)$. En este caso se tiene un operador de diferencias.

III) $m = 0$. En este caso se tiene un operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes; estos operadores han sido ampliamente estudiados ([7], [12]).

En [9] nos limitamos al estudio de los dos primeros casos; para ello es particularmente útil la siguiente proposición ([1]; [9], teo.1.1):

PROPOSICIÓN 1.1 Siempre se puede encontrar una transformación de coordenadas en R^n, que lleva la expresión (1.1) para $\mathcal{P}$ a una forma con las propiedades siguientes:

a) Todo polinomio $P_k(X)$ es de la forma

$$c_k X_1^{p_k} + \text{sumandos cuyo grado en } X_1$$

es menor; c_k es una constante $\neq 0$.

b) Si ponemos para $0 \leq k \leq m$, $h_k = (h_{k1}, \ldots, h_{kn}) \in R^n$, se tiene: $h_{j1} = h_{k1}$, si $k \neq j$.

c) $h_{k1} > 0$ para $1 \leq k \leq m$.

4. LA TRANSFORMACION DE FOURIER. En el estudio de los operadores que nos ocupan, es esencial el empleo de la transformación de Fourier. Si u es una distribución temperada (resp., si $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$), designamos por $\hat{u}$ (resp., por $\hat{\varphi}$) la transformada de Fourier de u (resp., de φ). Como se sabe,

$$\forall u \in \mathcal{S}', \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle \ ;$$

también usaremos, cuando sea más cómoda, la notación $\mathcal{F}[u]$ (resp., $\mathcal{F}[\varphi]$) en lugar de $\hat{u}$ (resp., de $\hat{\varphi}$).

Como en [9], pondremos $Q(.) = \mathcal{F}[\mathcal{P}\delta]$; se demuestra fácilmente (ver op.cit., §1,4), $\forall \zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$:

$$(1.4) \qquad Q(\zeta) = \Sigma_{k=o}^{m} P_k(\zeta).\exp(-i\langle h_k, \zeta \rangle);$$

en donde $\langle h_k, \zeta \rangle = \Sigma_{j=1}^{n} h_{kj}.\zeta_j$.

Se tiene además, $\forall u \in \mathcal{E}'$:

$$(1.5) \quad \mathcal{F}[\mathcal{P}u](\zeta) = Q(\zeta).\hat{u}(\zeta);$$

$$(1.6) \quad \mathcal{F}[\mathcal{P}^{*}u](\zeta) = Q(-\zeta).\hat{u}(\zeta) = \check{Q}(\zeta)\hat{u}(\zeta).$$

Esencial en este trabajo es el teorema de PALEY-WIENER ([7], teo. 1.7.7): Una función holomorfa entera de n variables complejas, $F(\zeta)$, es la transformada de FOURIER de una función $f \in C_o^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ con soporte contenido en la bola $|x| \leq B$, si y sólo si para todo entero positivo N, existe una constante $C_N = C_N(f) > 0$ tal que

$$(1.7) \qquad |F(\zeta)| \leq C_N(1 + |\zeta|)^{-N}.\exp(B\,|\mathrm{Im}\,\zeta|).$$

Muy útil para los problemas que trataremos es la siguiente propiedad, demostrada en [9], §1,5:

Las constantes $C_N(f)$ pueden elegirse de tal manera que, fijado N, $C_N(f) \to 0$ si $f \to 0$ en un espacio $\mathcal{D}_K$, K compacto de $\mathbb{R}^n$.

§2 EXISTENCIA DE UNA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL

De ahora en adelante, se supondrá que los polinomios P_k y los argumentos de desplazamiento h_k ($0 \leq k \leq m$) cumplen las condiciones de la proposición 1.1.

Con $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ designamos puntos de $\mathbb{C}^n$; además si $\mathrm{Re}\, \zeta_j = \xi_j$, $\mathrm{Im}\, \zeta_j = \eta_j$ ($1 \leq j \leq m$), pondremos $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, $\zeta = \xi + i\eta$.

1. LA ESCALERA DE HÖRMANDER. Ante todo, vamos a estudiar la función Q; se tiene la siguiente proposición ([9], teo. 2.1):

PROPOSICIÓN 2.1 Si al menos uno de los polinomios P_k no es constante, existe una variedad H (Escalera de Hörmander) en $\mathbb{C}^n$, con las propiedades siguientes:

a) $\forall \zeta \in H$, $|\check{Q}(\zeta)| > 1$.

b) Si $\zeta = \xi + i\eta \in H$, se tiene:

$$-M.\log(|\xi| + e) > \eta_1 > -M.\log(|\xi| + e) - N;$$
$$\eta_j = 0 \quad (2 \leq j \leq n);$$

en donde M, N son constantes positivas convenientes, independientes de ζ.

c) $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\varphi}$ es integrable sobre H, y se tiene:

$$(2.1) \qquad \int_H \hat{\varphi}(\zeta)\,dw = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi)\,d\xi .$$

Para la demostración de esta proposición se utilizan los lemas siguientes:

LEMA 2.1 Sea $P(\zeta)$ un polinomio en $\mathbb{C}^n$ con coeficientes complejos, de la forma: $c\cdot\zeta_1^p$ + miembros de grado menor en ζ_1, en donde $c \neq 0$; sean además b, Δ números reales positivos. Entonces existe un número real $M^* > 0$, tal que para $\zeta = (\xi_1 + i\eta_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, en donde $\xi_j \in \mathbb{R}$ $(1 \leq j \leq n)$, $\eta_1 \in \mathbb{R}$, y $|\eta_1| \geq M^* \log(e + |\xi|)$, se tiene:

$$|P(\zeta)| + b \leq e^{\Delta|\eta_1|}$$

Aplicando el lema 1.1 a cada uno de los polinomios $\frac{m}{c_m} P_k(-\zeta)$, con $b = 1/|c_m|$, $\Delta = h_{m1} - h_{k1}$ $(0 \leq k \leq m-1)$, se obtiene el

LEMA 2.2 Supongamos que h_{m1} es el máximo de los h_{k1} $(1 \leq k \leq m$; ver proposición 1.1). Entonces existe $M > 0$, tal que si $\zeta = (\xi_1 + i\eta_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, con $\eta_1 < -M.\log(|\xi| + e)$, se tiene:

$$(2.2) \quad |c_m|.\exp(-h_{m1}\eta_1) - |\Sigma_{k=o}^{m-1} P_k(-\zeta)\exp(<h_k, i\xi> - h_{k1}\eta_1)| \geq 1 .$$

En esta fórmula, c_m está dado por P_m, y M depende de c_m.

Finalmente tenemos:

LEMA 2.3 Sean M, α números positivos dados; entonces existe $N > 0$ (dependiente de M, α), tal que para $(\xi_2, \ldots, \xi_n)$ fijo, la distancia de las curvas

$$\eta_1 = -M.\log(|\xi| + e) \quad y \quad \eta_1 = -M.\log(|\xi| + e) - N$$

en el plano de las ζ_1 es mayor que α.

Esquema de la demostración de la proposición 2.1. a), b)

$P_m(-\zeta)$ tiene la forma

$$c_m(-\zeta_1)^{p_m} + \Sigma_{j=o}^{p_m-1}(-\zeta_1)^j R_j(\zeta_2,\ldots,\zeta_n);$$

$$c_m \neq 0.$$

Pongamos $\zeta_2 = \xi_2, \ldots, \zeta_n = \xi_n$, reales fijos: Entonces, el polinomio en ζ_1 correspondiente tiene p_m ceros en el plano de las ζ_1; sean éstos $\zeta_1^{(1)},\ldots, \zeta_1^{(p_m)}$. Se obtiene el desarrollo:

$$P_m(-\zeta) = (-1)^{p_m}.c_m \prod_{j=1}^{p_m} (\zeta_1 - \zeta_1^{(j)}).$$

Tomando la constante M del lema 2.2, por el lema 2.3, podemos encontrar una constante $N > 0$, tal que en el plano de las ζ_1, la distancia entre las curvas

$$\eta_1 = -M.\log(|\xi| + e) \text{ y } \eta_1 = -M\log(|\xi|+e) - N$$

sea mayor que $(2p_m + 2)$. Entonces podemos encontrar una constante $0 < T < N$ tal que la distancia de cada uno de los ceros $\zeta_1^{(j)}$ $(1 \leq j \leq p_m)$ a la curva

$$\eta_1 = - M.\log(|\xi| + e) - T,$$

sea mayor que 1.

Se deduce que sobre esta curva $|P_m(-\zeta)| > |c_m|$, y usando (2.2): $|\check{Q}(\zeta)| > 1$.

Procediendo entonces como en [6], cap.II, §3.3 (para el caso de operadores diferenciales), se concluye que podemos construir un recubrimiento localmente finito $(\Delta_\nu)_{\nu\in N}$ del espacio $\mathbb{R}^{n-1}$, formado por paralelotopos disyuntos (no necesariamente abiertos, pero de interior no vacío), tal que a cada ν corresponde un número real T_ν, $0 < T_\nu < N$, con la siguiente propiedad: si definimos H por las fórmulas:

$$(2.3)\quad \begin{cases} -\infty < \xi_j < +\infty, \quad 1 \le j \le n; \\ \eta_1 = -M\log(|\xi| + e) - T_\nu, \text{ si } (\xi_2, \dots, \xi_n) \in \Delta_\nu; \\ \eta_j = 0, \quad 2 \le j \le n; \end{cases}$$

se tiene $|\check{Q}(\zeta)| > 1$, para $\zeta \in H$.

Para ver que H es la variedad buscada, queda por demostrar la parte c).

c) Primero, hay que demostrar que para todo $\varphi \in C_0^\infty$,

$$\int_H |\hat{\varphi}(\zeta)|.|dw| < +\infty$$

Ahora bien,

$$|dw| = d|\zeta_1|.d\xi_2 \dots d\xi_n = \frac{\partial|\zeta_1|}{\partial\xi_1} d\xi_1 \dots d\xi_n = \frac{\partial|\zeta_1|}{\partial\xi_1} d\xi$$

y se comprueba fácilmente que

$$\partial|\zeta_1|/\partial\xi_1 \le 1 + \frac{M}{e};$$

de aquí se deduce

$$(2.4)\qquad \int_H |\hat{\varphi}(\zeta)|.|dw| \le \left(1 + \frac{M}{e}\right) \int_{R^n} |\hat{\varphi}(\zeta(\xi))|\cdot d\xi.$$

en donde $\zeta(\xi) = (\xi_1 + i\eta_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in H$.

Sea $B > 0$, tal que el soporte de φ esté contenido en la bola $\{x \in R^n;\ |x| \le B\}$; entonces, cualquiera que sea el entero $q \ge 0$, se tiene para $\zeta = \zeta(\xi)$, por el teorema de Paley-Wiener:

$$|\hat{\varphi}(\zeta)| \le C_q(\varphi).(1 + |\zeta|)^{-q}.e^{B|\eta_1|};$$

y como $|\eta_1| \le M.\log(|\xi| + e) + N$, nos queda:

$$|\hat{\varphi}(\zeta)| \leq C_q(\varphi).\frac{e^{BN}(|\xi| + e)^{BM}}{(1 + |\zeta|)^q}$$
$$\leq C_q(\varphi).\frac{e^{BN}(|\xi| + e)^{BM}}{(1 + |\xi|)^q} ;$$

si se toma $q > BM + n$, esta última expresión es integrable sobre $\mathbb{R}^n$, y usando (2.4) se obtiene finalmente:

$$(2.5) \qquad \int_H |\hat{\varphi}(\zeta)|.|dw| \leq K(B;q).C_q(\varphi),$$

en donde $K(B;q)$ depende también de M,N, pero no de φ. Queda por demostrar la igualdad (2.1). Fijados $\xi_2, \ldots, \xi_n$, sea T_ν el número real correspondiente, en las fórmulas (2.3); llamaremos Γ la curva de ecuación $\eta_1 = -M.\log(|\xi| + e) - T_\nu$ en el plano ζ_1. Se demuestra entonces, usando el teorema de Cauchy, la igualdad

$$\int_\Gamma \hat{\varphi}(\xi_1+i\eta_1, \xi_2,\ldots, \xi_n)d\zeta_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_n)d\xi_1 ,$$

de la cual se deduce (2.1).

Para las ecuaciones con diferencias, se tiene un resultado más simple ([9], teorema 2.2):

PROPOSICION 2.2 <u>Si en</u> (1.4), $P_k(\zeta) \equiv c_k$, c_k <u>constante</u> $\neq 0$ $(0 \leq k \leq m)$, <u>entonces existe una constante</u> $T > 0$, <u>tal que la variedad</u> H <u>en</u> $\mathbb{C}^n$ <u>definida por las fórmulas:</u>

$$(2.6) \qquad \begin{cases} -\infty < \xi_j < +\infty , & 1 \leq j \leq n \\ \eta_1 = -T & \\ \eta_j = 0, & 2 \leq j \leq n \end{cases}$$

<u>posee las propiedades</u> a) <u>y</u> c) <u>de la proposición</u> 2.1.

La demostración es como la anterior, pero en este caso, más simple. En particular, si $B > 0$, para toda función $\varphi \in C_o^\infty$ con soporte contenido en

$$\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq B\},$$

se obtiene una fórmula del mismo tipo de la (2.5).

2. LA SOLUCIÓN FUNDAMENTAL. Una distribución $E \in \mathcal{D}'$ se llama solución fundamental de la ecuación (1.2), si $\mathcal{P}E = \delta$, en donde δ es la medida de Dirac en el punto 0 (cfr. [11], cap. VI, §10).

TEOREMA 2.1 Toda ecuación diferencial parcial lineal con diferencias y coeficientes constantes tiene una solución fundamental en $\mathcal{D}'$.

Demostración: Llamando, como antes, $Q = \mathcal{F}[\mathcal{P}\delta]$, y H la escalera de Hörmander para Q, definimos la forma lineal sobre C_o^∞:

$$(2.7)\qquad \langle E,\varphi\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_H \frac{\hat{\varphi}(\zeta)}{Q(-\zeta)}\,dw, \quad \varphi \in C_o^\infty.$$

Usando las propiedades de H, se comprueba fácilmente que E está definida para toda $\varphi \in C_o^\infty$.

Si L es un compacto fijo de $\mathbb{R}^n$, contenido en la bola cerrada de radio B, y si (φ_ν) es una sucesión de funciones de $\mathcal{D}_L$, se tiene, puesto que $|\check{Q}(\zeta)| > 1$, para todo $\zeta \in H$, utilizando (2.5) (o su análoga para ecuaciones con diferencias):

$$(2.8)\quad (2\pi)^n.|\langle E,\varphi_\nu\rangle| \leq K(B,q).C_q(\varphi_\nu),$$

cualquiera que sea el valor del índice ν.

Finalmente se comprueba sin dificultad que E es solución fundamental:

$$\forall\varphi \in C_o^\infty, \quad \langle \mathcal{P}E,\varphi\rangle = \langle E, \mathcal{P}^*\varphi\rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_H \frac{Q(-\zeta)\hat{\varphi}(\zeta)}{Q(-\zeta)}\, dw = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_H \hat{\varphi}(\zeta) dw =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \varphi(0).$$

(Hemos utilizado (2.1)).

PROPOSICIÓN 2.3 Si $\mathcal{P}$ es un operador lineal de diferencias con coeficientes constantes, la solución fundamental E construída en el teorema 2.1 tiene la propiedad:

$$E * L^2_c \subset L^2_{loc} .$$

Para la demostración de esta proposición, que es una adaptación de la dada en [12] para el caso de operadores diferenciales, remitimos a [9], §2,3.

§3 SOLUCIONES EN CONJUNTOS ACOTADOS

En este parágrafo se dan algunas aplicaciones de la solución fundamental construída en el §2, a la solución de ecuaciones del tipo (1.2), con $f \in \mathcal{D}'_K$, K compacto, como también $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, y $f \in C^\infty(\Omega)$, Ω abierto relativamente compacto en $\mathbb{R}^n$. En gran parte, se trata de generalizaciones de resultados de Agranovič para ecuaciones diferenciales parciales lineales [2] .

1. ESTRUCTURA DE LOS ELEMENTOS DE $\mathcal{D}'_K$. Se sabe que toda forma lineal continua v sobre $\mathcal{D}_K$ tiene un orden finito p ([11], cap.III, teorema 20). Basándose en esto, se deduce que v puede ser dada por una fórmula del tipo:

$$(3.1) \quad \langle v,\varphi\rangle = \sum_{|r|\leq m} \int_K D^r\varphi(x).f_r(x)dx, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}_K$$

en donde $m = p + n$, y las f_r son funciones acotadas y medibles sobre K (para la demostración detallada de esto, así como de lo que sigue, remitimos a [9],pp.28 y siguientes).

Para abreviar, vamos a poner: $f_r(x)dx = d\mu_r(x)$ ($|r| \leq m$). Usando las propiedades de la transformación de Fourier, la compacidad de K y la forma de las medidas μ_r, se llega a la fórmula

$$(3.2) \quad \langle v,\varphi\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} V(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}_K$$

en donde

$$(3.3) \quad V(\zeta) = \sum_{|r|\leq m} \zeta^r \int_K e^{i\langle x,\zeta\rangle} d\mu_r(x); \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

$V(\zeta)$ es una función holomorfa entera sobre $\mathbb{C}^n$.

DEFINICIÓN 3.1 Sea μ una medida concentrada sobre el compacto $K \subset \mathbb{C}^n$; llamaremos a la función

$$\int_K e^{-i\langle x,.\rangle} d\mu(x)$$

<u>transformada de Fourier de</u> μ.

DEFINICION 3.2 Una suma finita de productos de monomios y transformadas de Fourier de medidas concentradas sobre K, definidas por funciones de densidad acotadas y Lebesgue-medibles (es decir, una función del tipo (3.3)) se llama una <u>función</u> K-<u>admisible</u>.

PROPOSICIÓN 3.1 <u>Sea</u> V <u>la función</u> K-<u>admisible da-</u>

da por (3.3); entonces, existen dos constantes positivas C, a, tales que

$$\forall \zeta \in \mathbb{C}^n, \ |V(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^m . e^{a|\operatorname{Im}\zeta|} .$$

Se deduce que V es la transformada de Fourier de una distribución con soporte compacto.

La última observación es consecuencia del teorema de Paley-Wiener-Schwartz ([7], teorema 1.7.7), pero es fácil verla también directamente: se define $\tilde{v} \in \mathcal{E}'$ por la fórmula

$$<\tilde{v}, \psi> = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_K D^r \psi(x) . f_r(x) dx, \quad \forall \psi \in C^\infty$$

Sobre $\mathcal{D}_K$, $\tilde{v}$ coincide con v, y además $V = \mathcal{F}[\check{\tilde{v}}]$.

COROLARIO. Sea V la función K-admisible dada por (3.3); entonces, para toda $\varphi \in C_0^\infty$, $V\hat{\varphi}$ es la transformada de Fourier de una función de C_0^∞. Concretamente:

$$V\hat{\varphi} = \mathcal{F}\left[\check{\tilde{v}} * \varphi\right] .$$

En síntesis, tenemos el siguiente

TEOREMA 3.1 Todo elemento $v \in \mathcal{D}'_K$ puede representarse en la forma (3.2), en donde V es una función K-admisible. Recíprocamente, toda función K-admisible V define una distribución $\tilde{v}$ concentrada sobre K, la cual sobre $\mathcal{D}$ está dada por la fórmula:

$$<\tilde{v}, \varphi> = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} V(\xi)\hat{\varphi}(\xi) d\xi \quad , \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

Finalmente, tenemos la

DEFINICIÓN 3.3 Una función W analítica entera en $\mathbb{C}^n$ se llama K-anulante si:

a) existe K_1, compacto en $\mathbb{R}^n$, con $K_1 \supset K$, tal que W es una función K_1-admisible;

b) para toda $\varphi \in \mathcal{D}_K$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(\xi).\hat{\varphi}(\xi).d\xi = 0$$

2. LA ECUACIÓN $\mathcal{P}u = f$, CUANDO $f \in \mathcal{D}'_K$. Sea K_1 un compacto de $\mathbb{R}^n$ que contenga $\bigcup_{k=o}^{m} (K - h_k)$; vamos a hallar las soluciones $u \in \mathcal{D}'_{K_1}$ de la ecuación $\mathcal{P}u=f$, cuando $f \in \mathcal{D}_K$.

Sea K_2 un compacto de $\mathbb{R}^n$ que contenga

$$\bigcup_{k=o}^{m} (K_1 + h_k);$$

como $h_o = 0$, se tiene: $K_2 \supset K_1 \supset K$.

Por el teorema 3.1, a f le corresponde una función K-admisible F; y si $u \in \mathcal{D}'_{K_1}$ es una solución, le corresponde una función K_1-admisible U. Entonces, teniendo en cuenta (1.6), vemos que la ecuación

$$<u, \mathcal{P}^{*}\varphi> = <f,\varphi> , \quad \varphi \in \mathcal{D}_K$$

se transforma en:

$$\int_{\mathbb{R}^n} U(\xi)\check{Q}(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi .$$

Se comprueba fácilmente ([9], lema 3.1) que $W = U\check{Q} - F$ es una función K_2-admisible y K-anulante. Se obtiene entonces el siguiente

TEOREMA 3.2 <u>Una distribución</u> $u \in \mathcal{D}'_{K_1}$, <u>es una solución de la ecuación</u> $\mathcal{P}u = f$, <u>con</u> $f \in \mathcal{D}'_K$, <u>si y só-</u>

lo si es de la forma:

$$(3.4) \quad <u,\varphi> = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_H \frac{F(\zeta) + W(\zeta)}{Q(-\zeta)} \hat{\varphi}(\zeta) dw, \quad \varphi \in \mathcal{D}_K ,$$

en donde H es la escalera de Hormander para $\check{Q}$, F es la función K-admisible correspondiente a f, y W es una función K_2-admisible y K-anulante.

NOTA. Una fórmula de la forma (3.4) define siempre un elemento de $\mathcal{D}'_{K_1}$: es la restricción a $\mathcal{D}_{K_1}$ de $E*(\tilde{f} + \tilde{w})$, en donde $\tilde{f}$ y $\tilde{w}$ son las distribuciones de $\mathcal{E}'$ definidas por F, W (teorema 3.1) y E es la solución fundamental dada en el teorema 2.1.

3. SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN HOMOGÉNEA EN K. Si W es una función K_2-admisible y K-anulante, la distribución $\tilde{w}$ que ella define (teorema 3.1) está concentrada en $\Delta = K_2 - \overset{\circ}{K}$.

En el caso en que Δ sea una unión finita de conjuntos regulares ([11], tomo I,pág.98), podemos enunciar la proposición siguiente ([9], teorema 3.4), que se basa en el teorema 34 del cap.III de [11].

PROPOSICION 3.2 Si $\Delta = K_2 - \overset{\circ}{K}$ es la unión de un número finito de conjuntos regulares disyuntos, toda solución $u \in \mathcal{D}'_{K_1}$ de la ecuación homogénea $\mathcal{P} u = 0$ en K, es de la forma:

$$<u,\varphi> = \sum_{|q| \leq q_0} \int_\Delta <D^q E(x-y),\varphi(x)> d\mu_q(y) \quad ; \quad \varphi \in \mathcal{D}_{K_1} ,$$

en donde E es una solución fundamental, y las μ_q son medidas concentradas sobre Δ . Recíprocamente, toda distribución de esta forma es una solución de la ecuación homogénea en K.

4. LA ECUACIÓN $\mathcal{P}u = f$, CUANDO $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Ω sea un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$; en general, no se puede aplicar el procedimiento de los números 1. y 2., pues, por ejemplo, f puede no ser de orden finito. Tenemos la siguiente

PROPOSICIÓN 3.3. Sean Ω, Ω_1 abiertos acotados de $\mathbb{R}^n$, tales que $\Omega_1 \supset \bigcup_{k=o}^{m}(\Omega - h_k)$. Sea además $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$; entonces, cualquiera que sea el compacto $K \subset \Omega$, existe $u_K \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, tal que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K, \quad \langle \mathcal{P}u_K, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle .$$

5. LA ECUACIÓN $\mathcal{P}u = f$, CUANDO $f \in C^{\infty}(\Omega)$. Ante todo, queremos anotar que para $Q = \mathcal{F}[\mathcal{P}\delta]$ se puede construir una escalera de Hörmander $\check{H}$, de la misma manera que se construyó H para $\check{Q}$ (proposiciones 2.1 y 2.2): basta tomar $\check{H} = -H$. Tenemos entonces:

PROPOSICIÓN 3.4 Sean Ω, Ω_1, Ω_2, abiertos acotados de $\mathbb{R}^n$ y tales que

$$\Omega_1 \supset \bigcup_{k=o}^{m} (\Omega - h_k) \; ; \; \Omega_2 \supset \bigcup_{k=o}^{m} (\Omega_1 + h_k);$$

sea K un compacto cualquiera de Ω. Entonces, una función $u \in C^{\infty}(\Omega_1)$ es solución de la ecuación:

$$\mathcal{P}u(x) = f(x), \quad \forall x \in K,$$

en donde $f \in C^{\infty}(\Omega)$, si y sólo si en una vecindad de de $K_1 = \bigcup_{k=o}^{m} (K - h_k)$ tiene la forma:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_H \left\{ \left[\hat{g}(\zeta) + \hat{h}(\zeta) \right] / Q(\zeta) \right\} e^{i\langle x, \zeta \rangle} d\omega$$

en donde $g \in C_0^{\infty}(\Omega)$, $h \in C_0^{\infty}(\Omega_2)$, $g|K = f|K$ y $h|K=0$

En la segunda parte de este artículo trataremos el problema de la regularidad de las soluciones.

BIBLIOGRAFIA

1. AGRANOVIČ,M.S.: **Soluciones generales de ecuaciones diferenciales con diferencias y coeficientes constantes.** Dokl.Akad.Nauk SSSR,123,9-12(1958)(En ruso).

2. AGRANOVIC,M.S.: Partial differential equations with constant coefficients. Uspehi.Mat.Nauk 16, no.2,27-94(1961)(En ruso; traducción en Russian Math. Surveys.)

3. EHRENPREIS,L.: Solution of some problems of division I. Am.J.Math. 76,883-903 (1954)

4. ------------: Solution of some problems of division II, Am.J.Math.,77,286-292(1955)

5. ------------: Solution of some problems of division IV, Am.J.Math. 82, 522-588(1960)

6. GELFAND,I.M.;ŠILOV,G.E.: Funciones generalizadas II, Moscú,1958(En ruso; traducción francesa: Les distributions, tome 2.Collection Universitaire de Mathématiques,15,Dunod, París,1964).

7. HÖRMANDER,L;: Linear partial differential operators, Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelber,1963.

8. ------------: On the range of convolution operators, Ann?Math.(2)76,148-170(1962).

9. LESMES,J.: Ueber lineare partielle Differential-Differenzenoperatoren mit konstanten Koeffizienten. Collect.Math. 18, 7-55(1966-1967).

10; MALGRANGE,B.: Existence et approximation des solutions des équations aux derivées partielles et des équations de convolution. Ann.Inst.Fourier, Grenoble 6,271-355 (1955/56)

11. SCHWARTZ,L. Théorie des Distributions I,II, Hermann, París, 1957,1959.

12. TRÈVES,F.: Lectures on linear partial differential equations with constant coefficients. Notas de Matemática no. 27, Instituto de Mate-

mática Pura e aplicada, Rio de Janeiro,1961

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia

(Recibido en julio de 1968)