Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen II, 1.968. Páginas 105-116.

ESTRUCTURAS FOLIADAS

por

Gérard Joubert

INTRODUCCION.

Consideremos en el plano $\mathbb{R}^2$ una ecuación diferencial ordinaria

$$y' = f(x,y)$$

En general, pasa por un punto dado (x_0,y_0) una curva integral (o trayectoria) única; esta curva puede ser homeomórfica o a la recta numérica $\mathbb{R}$ o al círculo unidad S_1.

Los puntos que no verifican esta propiedad se llaman puntos singulares.

Si se quitan del plano los puntos singulares se obtiene una variedad $\mathcal{V}$ de dimensión 2 y las trayectorias constituyen entonces una partición de $\mathcal{V}$ por subvariedades de dimensión 1.

La teoría de las estructuras foliadas es la generalización de esta situación. Las bases de la teoría se encuentran en la tesis que Reeb terminó en 1.952 con EHRESMANN.

Después hubo numerosos artículos sobre la cuestión (ver referencias).

En este artículo vamos a dar algunas generalidades sobre las estructuras foliadas.

- I -

(1) Definición de una estructura foliada.

a) Preliminares.

Consideremos, en primer lugar, el espacio numérico real $\mathbb{R}^n$ como el producto $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ donde p verifica: $1 \leqslant p < n$.

Designemos por $x = (x_1, \ldots, x_p)$ las p primeras coordenadas de $\mathbb{R}^n$ y por $y = (y_1, \ldots, y_{n-p})$ las $(n-p)$ últimas.

El ejemplo más sencillo de una estructura foliada es aquella cuyos folios son los $(n-p)$ planos paralelos al subespacio lineal definido por $x = 0$.

Un homeomorfismo local h de clase r de esta estructura foliada $\mathcal{F}_0$ es un homeomorfismo local de $\mathbb{R}^n$ que preserva localmente los folios, es decir: en todo punto (x,y) donde h está definido, existe una vecindad $\mathcal{U}(x,y)$ de (x,y) tal que la restricción de este homeomorfismo a esta vecindad se exprese por ecuaciones de la forma

$$(1) \quad \begin{cases} x' = h_1(x) \\ \\ y' = h_2(x,y) \end{cases} \qquad \text{si} \quad (x',y') = h(x,y)$$

hay que notar que h_1 es localmente un homeomorfismo de clase r de $\mathbb{R}^p$.

b) Definición de una variedad foliada.

Sobre una variedad $\mathcal{V}$ de dimensión n y de clase $\underline{r}$, se define una estructura foliada (o foliatura) $\mathcal{F}$ de clase n y de codimensión p por medio de un atlas maximal de cartas $(h_i)_{i \in I}$ (donde h_i es un homeomorfismo de clase r de un abierto $\mathcal{U}_i$ de $\mathbb{R}^n$ sobre un abierto

$\mathcal{V}_i$ de $\mathcal{V}$) que verifican la condición siguiente:

Los cambios de cartas $h_j^{-1} h_i$ son homeomorfismos locales de $\mathbb{R}^n$ de clase r que son localmente de la forma (1).

Se dice que la foliatura $\mathcal{F}$ es topológica, diferenciable o analítica según que

$$r = 0; \qquad 0 < r \leqslant \infty \quad ; \qquad r = \omega$$

Restringiendo la forma de los cambios de cartas se puede definir estructuras más precisas: Por ejemplo, se dice que la foliatura $\mathcal{F}$ está orientada si los cambios de cartas son de la forma (1) con la condición suplementaria que h_1 conserve la orientación de $\mathbb{R}^p$.

Otro ejemplo es el siguiente: Se dice que $\mathcal{F}$ es transversalmente analítica si h_1 es analítico.

c) Los folios.

Sea T_o la topología de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ que es el producto de la topología discreta de $\mathbb{R}^p$ por la topología natural de $\mathbb{R}^{n-p}$.

Las componentes conexas de $\mathbb{R}^n$ según T_o son precisamente los planos $x = c$.

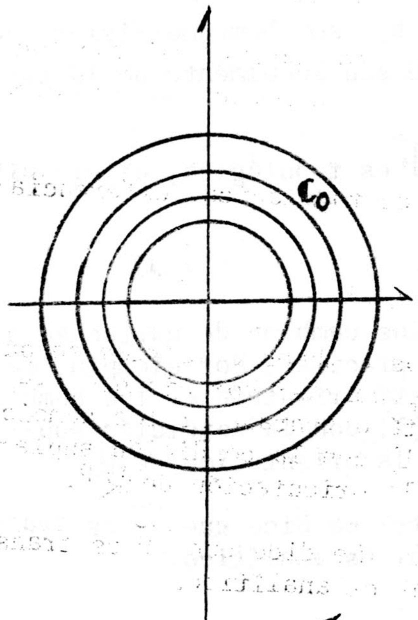
Los homeomorfismos locales h de $\mathcal{F}_o$ son los homeomorfismos por la topología T_o, según $(\overset{o}{1})$.

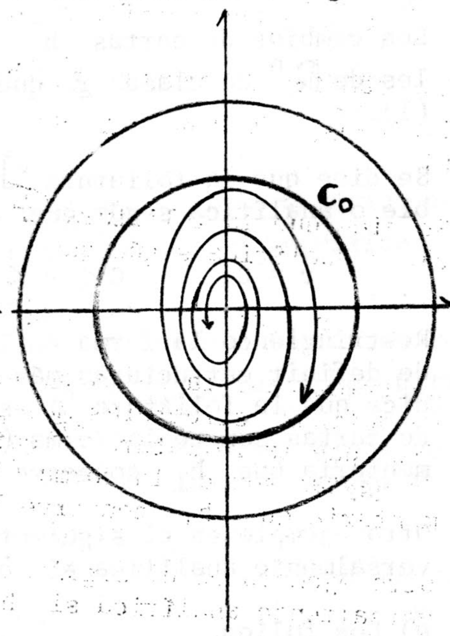
Resulta que existe una topología única T sobre $\mathcal{V}$ tal que cada carta h_i sea un homeomorfismo de $\mathcal{U}_i$ sobre $\mathcal{V}_i$ para las dos topologías inducidas por T_o y T respectivamente.

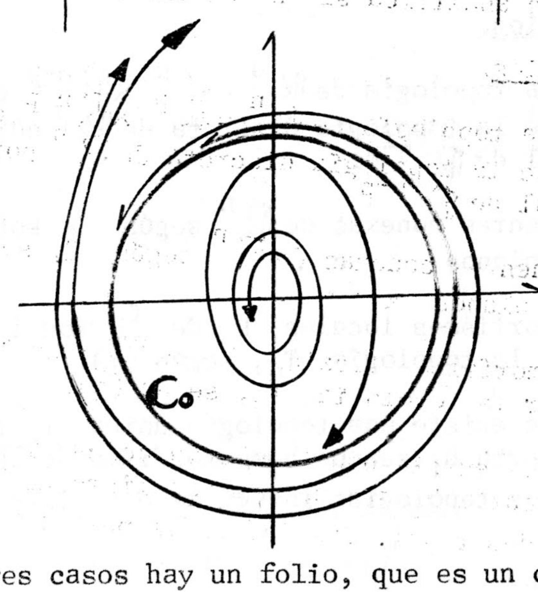
(2) Ejemplos.-

a) Consideremos como variedad $\mathcal{V}$ el plano $\mathbb{R}^2$ privado de un punto 0.

Se puede considerar sobre $\mathcal{U}$ las foliaturas siguientes:







en los tres casos hay un folio, que es un círculo C_0:

En el caso (1) todos los folios son círculos; en el caso (2) al interior de C_0 y en el caso (3) afuera de C_0 todos los folios son espirales.

b) <u>Ejemplo fundamental de Reeb</u>. (Véase dibujo al final de la hoja).

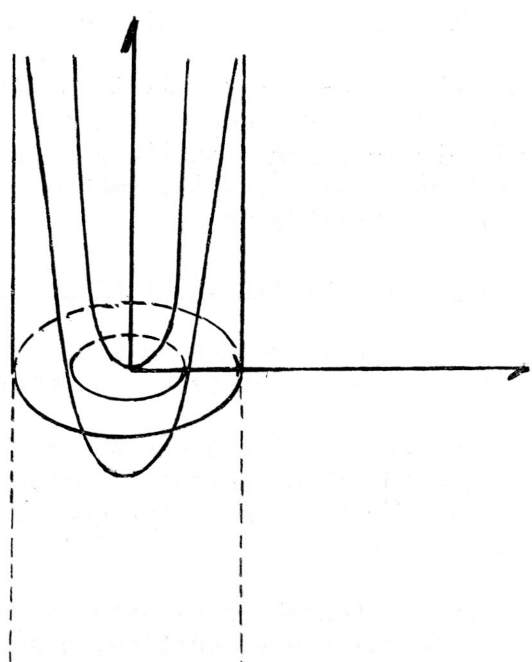
Consideremos el cilindro sólido $D^2 \times \mathbb{R}$ producto del disco unidad D^2 (es decir, el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de los puntos x tales que $|x| \leqslant 1$) por la recta numérica $\mathbb{R}$.

Se puede construir sobre este cilindro una foliatura de codimensión uno de la manera siguiente :

Un folio es el cilindro ordinario $S^1 \times \mathbb{R}$, los otros folios son las superficies F_t formadas por los puntos $(x, \alpha(|x|^2) + t)$ donde $x \in D^2$ y $t \in \mathbb{R}$ y $\alpha : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que

$$\lim_{u \to 1} \alpha(u) = +\infty$$

(Por ejemplo: $\alpha(u) = \dfrac{u}{1-u}$)



el toro lleno $T = D^2 \times S^1$ es el cociente de D^2 por la relación de equivalencia que identifica (x,y) a $(x,y+n)$; $n \in \mathbb{Z}$. Puesto que la foliatura anterior es invariante por esta relación, se puede definir, por paso al cociente, una foliatura $\mathcal{F}$ sobre $\mathbb{T}$ cuyo borde $\partial\mathbb{T}$ (el toro ordinario) es un folio compacto.

Tomando dos toros llenos que tienen cada uno una foliatura de este tipo e identificando sus bordes por un homeomorfismo que aplica los paralelos de uno sobre los meridianos del otro, se obtiene una foliatura de la esfera S^3. En esta foliatura hay un único folio compacto a saber, el borde común de los dos toros llenos.

Todas las foliaturas anteriores están orientadas.

c) Sobre una variedad cualquiera $\mathcal{V}$ de dimensión n, todo campo de vectores que no se anula, define una foliatura de dimensión 1. Más generalmente, una distribución involutiva de dimensión (n-p) o, lo que es equivalente, una forma exterior de grado p completamente integrable define sobre $\mathcal{V}$ una foliatura de codimensión p.

Ahora deberíamos introducir la noción fundamental que está en la base de toda la teoría. Pero, para ver inmediatamente la representación geométrica de la noción, es preferible estudiar únicamente el caso particular en el cual la codimensión es 1.

(3) Teoremas particulares en el caso de codimensión 1.

En primer lugar, podemos considerar (si $\mathcal{V}$ es para-compacta) que está provista de una métrica riemaniana.

Si se supone además (lo que no es de hecho una restricción) que $\mathcal{F}$ es orientable, existe sobre $\mathcal{V}$ un campo de vectores normal a los folios que es en todas partes diferente de 0.

Las curvas integrables de este campo que se llaman normales a la foliatura constituyen sobre $\mathcal{V}$ otra foliatura (de dimensión 1) transversal a la anterior.

Tenemos entonces el lema fundamental siguiente:

Lema : Sea $C : I \to F$ un camino en un folio determinado $F (I = [0,1])$. Entonces, existe una familia de aplicaciones

$$C_u : I \to \mathcal{U} ; \quad u \in]-1, +1[$$

que tienen las propiedades siguientes:

1) $C_o = C$

2) Fijado u , $C_u(I)$ está contenido en un folio F_u

3) Fijado t , la aplicación $u \to C_u(t)$ es una curva normal a $\mathcal{F}$.

Se dice que el camino C_u se obtiene a partir de C por levantamiento según las normales.

Consideremos en particular un camino cerrado, es decir, un ciclo:

$$C : I \to F \quad \text{con} \quad C(0) = C(1) = (a_o)$$

Resulta del lema que $C_u(0)$ y $C_u(1)$ pertenecen a la misma curva normal, la que pasa por a_o; podemos parametrizar esta curva por

$$u \to C_u(0)$$

Para u bastante pequeño, tenemos entonces

$$C_u(1) = C_{u'}(0) .$$

Poniendo $h_c(u) = u'$ se obtiene una aplicación definida sobre una vecindad abierta de 0 en $\mathbb{R}$ tal que $h_c(0) = 0$.

Es fácil ver que h_c es un homeomorfismo local. Además, se demuestra que si c y c' son dos lasos homotópicos en el mismo folio F tal que

$$c(0) = c(1) = c'(0) = c'(1) = a_0$$

tenemos:

$$j_0^{\wedge} h_c = j_0^{\wedge} h_{c'}$$

(donde $j_0^{\wedge} h_c$ es el jet de h_c en 0 en el sentido de EHRESMANN).

Entonces, asociando a la clase de homotopía $[c]$ de c el jet $j_0^{\wedge} h_c$, definimos una aplicación:

$$\Phi_{a_0} : \pi_1(F, a_0) \to G$$

donde G es el grupo de las jets en 0 de los homeomorfismos locales de $\mathbb{R}$ que preservan 0. Se muestra que Φ_{a_0} es un homeomorfismo que se llama <u>homeomorfismo de holonomía</u> de F en a_0. Además, el subgrupo $\Phi_{a_0}[\pi_1(F, a_0)]$ no depende de a_0 salvo un automorfismo interior de G; se llama entonces el <u>grupo de holonomía de F</u>.

Estas nociones son muy importantes. Permiten caracterizar la función de un folio relativamente a los folios vecinos. En particular, tenemos el teorema siguiente que es verdadero en codimensión cualquiera:

<u>Teorema de estabilidad: (Reeb)</u>.

Todo folio compacto cuyo grupo de holonomía es finito, tiene un sistema fundamental de vecindades que son reunión de folios compactos.

Hay que notar que si $\pi_1(F)$ es finito, entonces el grupo de holonomía de F es siempre finito.

Examinemos ahora los ejemplos dados anteriormente.

a) Ejemplos (1), (2), (3).

Solamente el folio C_o tiene un grupo de homotopía no nulo; es igual a $\mathbb{Z}$.

Resulta que el grupo de holonomía de C_o es un subgrupo cíclico de G. Es fácil ver que no puede ser sino: 0, de orden 2, isomórfico a $\mathbb{Z}$.

En el caso (1) es claro que este grupo es igual a 0; en los casos (2) y (3) es isomórfico a $\mathbb{Z}$.

Hay que notar que h_c es en el caso (2) un homeomorfismo local creciente tal que su restricción a una de las semirrectas $]-\infty, 0]$, $[0, +\infty[$ es la identidad. Resulta que h_c no puede ser analítico. De eso se puede entonces deducir que $\mathcal{F}$ no puede ser transversalmente analítico.

Antes de considerar el ejemplo de REEB hay que notar que en el caso en el cual la foliatura está orientada, se puede precisar un poco la situación:

Consideremos los homeomorfismos locales crecientes γ de $\mathbb{R}$ que conservan 0.

La restricción γ^+ (resp. γ^-) de γ a $[0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 0]$) es una aplicación en $[0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, 0]$).

Por eso los puntos jets $j^\lambda.\gamma^+$ (resp. $j^\lambda.\gamma^-$)

constituyen un grupo G_+ (resp. G_-).

En el caso en el cual la foliatura está orientada, para cada camino c el homeomorfismo h_c es creciente.

Teniendo en cuenta lo que precede, es fácil ver que Φ_{a_o} da nacimiento a dos homeomorfismos.

$$\Phi^+_{a_o} : \pi_1(F, a_o) \longrightarrow G_+$$

$$\Phi^{-}_{a_o} : \pi_1(F, a_o) \longrightarrow G_{-}$$

Volvamos al ejemplo de Reeb.

Sea F_o el toro ordinario. El grupo de homotopía es igual a $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$; las clases de homotopía del paralelo C_p y del meridiano C_m que pasan por a_o son respectivamente los dos generadores $(1,0)$ y $(0,1)$ de $\pi_1(F_o, a_o) = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Es fácil ver que:

$$\Phi^{+}_{a_o}([C_p]) = 0$$

$$\Phi^{+}_{a_o}([C_m]) = b$$

donde b engendra un subgrupo de G_+ isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Estas consideraciones determinan completamente $\Phi^{+}_{a_o}$ y entonces tenemos:

1) $$\Phi^{+}\left[\pi_1(F_o, a_o)\right] = \mathbb{Z}$$

Por lo tanto, el grupo de holonomía de F_o es igual a $\mathbb{Z}$.

2) $$\operatorname{Ker}\Phi^{+}_{a_o} = \mathbb{Z}$$

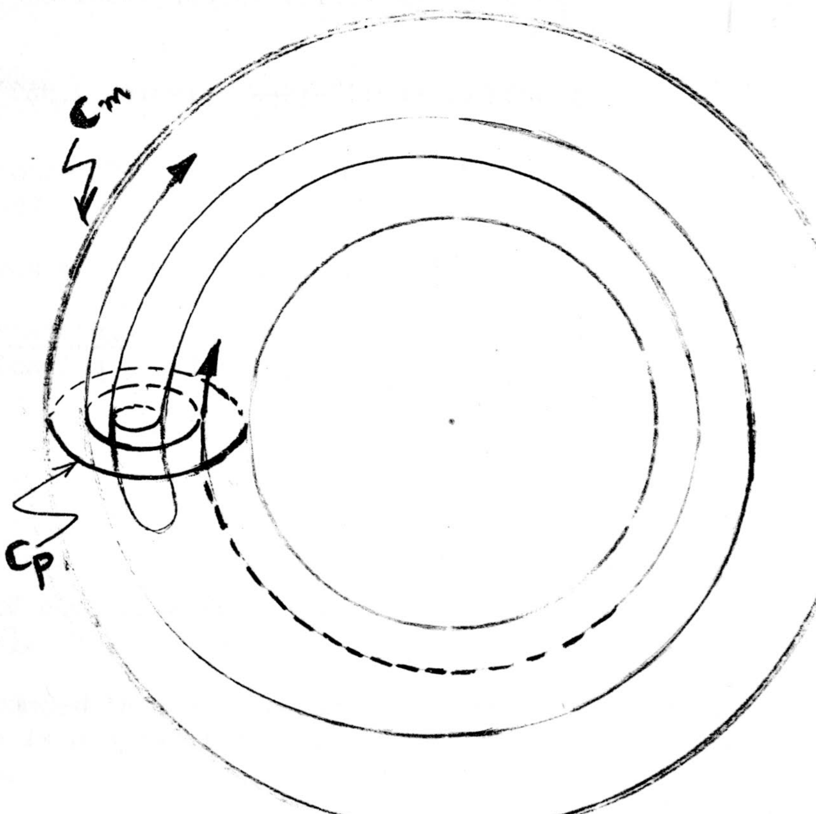
Se puede notar que C_p tiene las propiedades siguientes:

1) $[C_p] \neq 0$

2) $\Phi_{a_o}([C_p]) = 0$; por lo tanto los levantamientos de C_p según las normales (positivas) son ciclos.

3) Estos ciclos son homotópicos a 0 sobre su folio.

Un ciclo C que tiene estas propiedades se llama <u>ciclo evanescente (positivo)</u>. Este tipo de ciclo va a jugar un papel muy importante en la demostración del teorema de Novikov. Se puede notar inmediatamente que este ciclo se sitúa sobre un folio compacto.



C. Ehresmann — Structures Feuilletées Topologiques (Curso dado en Canadá en 1.960).

A. Haefliger — Structures Feuilletées. Cohomologie a Valeurs Dans un Faisceau de Groupoides (Tesis: Comentarii Helveticci 1.958).

G. Joubert — Contribution a L'étude des Catégories Ordonnées, Application aus Structures Feuilletées (Tesis: 1.966).

R. Moussu — Tesis de 3er ciclo. Dijon 1.968.

S. P. Novikov — Topologie des Feuilletages.(Trud.Moscú 1.965).

G. Reeb — Structures Feuilletées. (Tesis: 1.952)