Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen II, 1.968. Páginas 144-148

SERIES PARA "e" DE GRAN CONVERGENCIA

por

Francisco Lleras

Es posible mejorar la velocidad de convergencia de las series infinitas haciendo uso del siguiente principio:

Sea una serie infinita convergente $S = \sum_{N=0}^{\infty} F(N)$, si tomamos otra serie infinita convergente $S_1 = \sum_{N=0}^{\infty} G(N)$, podemos redefinir la primera serie así:

$$S = S_1 + \sum_{N=0}^{\infty} F(N) - G(N)$$ - Transformación de Kummer.

Con una adecuada escogencia de $G(N)$ es posible mejorar la velocidad de convergencia de la serie S.

Tomemos la serie factorial para "e", para ver que a pesar de ser de una convergencia muy rápida, es posible mejorar ésta en forma notable.

Como series auxiliares utilizaremos las "telescópicas" generadas en la siguiente forma:

$$1 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!}$$

$$\frac{1}{2!} = \frac{3}{3!} = \frac{2}{3!} + \frac{1}{3!}$$

$$\frac{1}{3!} = \frac{4}{4!} = \frac{3}{4!} + \frac{1}{4!}$$

....

$$\frac{1}{N!} = \frac{N}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+1)!}$$

Haciendo los reemplazos correspondientes tendremos:

$$1 = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{N}{(N+1)!} + \frac{1}{(N+1)!}$$

$$\frac{1}{K!} = \frac{K}{(K+1)!} + \frac{K+1}{(K+2)!} + \cdots + \frac{K+N}{(K+N+1)!} + \frac{1}{(K+N+1)!}$$

De las anteriores podemos deducir:

$$1 = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N+1}{(N+2)!} \qquad \frac{P}{Q} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{P(N+1)}{Q(N+2)!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{1}{K!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{K+N}{(K+N+1)!} \qquad \frac{P}{Q}\frac{1}{K!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{P(K+N)}{Q(K+N+1)!} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Si, como es costumbre, definimos a $0! = 1$, podemos aplicar la información a la factorial de "e", haciendo uso de la serie (1) así:

$$e = \frac{P}{Q} + \sum_{N=0}^{\infty}\left(\frac{1}{N!} - \frac{P(N+1)}{Q(N+2)!}\right) = \frac{P}{Q} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)(QN + 2Q - P)}{Q.(N+2)!}$$

Si $P = 2Q$ tendremos:

$$e = 2 + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N(N+1)}{(N+2)!} = 2 + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)(N+2)}{(N+3)!} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Volviendo a usar la serie (1) tendremos:

$$e = 2 + \frac{P}{Q} + \sum_{N=0}^{\infty}\left(\frac{(N+1)(N+2)}{(N+3)!} - \frac{P(N+1)(N+3)}{Q.(N+3)!}\right)$$ o sea:

$$e = 2 + \frac{P}{Q} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)(N(Q-P)+2Q-3P)}{Q(N+3)!}$$

Si $3P = 2Q$ tendremos:

$$e = 2\,\frac{2}{3} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N(N+1)}{3.(N+3)!} = 2\,\frac{2}{3} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)(N+2)}{3.(N+3)!}$$

Pero si $2P = Q$ se tendrá:

$$e = 2\tfrac{1}{2} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)^2}{2.(N+3)!}$$

Ahora bien, si aplicamos a la serie (3) la transformación usando como auxiliar la serie (2), dando a K el valor 2 se tiene:

$$e = 2 + \tfrac{1}{2} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)(N+2)-(N+2)}{(N+3)!} = 2\tfrac{1}{2} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N(N+2)}{(N+3)!} \quad ó$$

sea:

$$e = 2\tfrac{1}{2} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)(N+3)}{(N+4)!}$$

Como se puede ver, al continuar con este proceso se obtienen dos familias distintas de series, todas ellas de mayor convergencia que la serie factorial clásica.

Como caso interesante busquemos con el mismo procedimiento series descendentes a partir de 3:

De la serie (3) y haciendo uso de la auxiliar (1) tenemos:

$$e = 2 + 1 + \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{(N+1)(N+2)-(N+1)(N+3)}{(N+3)!}\right) = 3 - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(N+1)}{(N+3)!}$$

Usando ahora la serie (2), con $K = 2$, tenemos:

$$e = 3 - \tfrac{1}{2}\,\frac{p}{q} - \sum_{N=0}^{\infty}\left(\frac{(N+1)}{(N+3)!} - \frac{P(N+2)}{Q.(N+3)!}\right) = 3 - \frac{1.P}{2.Q} -$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(Q-P)N+Q-2P}{Q.(N+3)!}$$

Para Q = 2P tenemos:

$$e = 3 - \tfrac{1}{2!}\ \tfrac{1}{2} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N}{2.(N+3)!} = 3 - \frac{1}{2!}\frac{1}{2} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N+1}{2.(N+4)!}$$

Nuevamente hacemos uso de la serie (2) con K = 3;

$$e = 3 - \tfrac{1}{2!}\ \tfrac{1}{2} - \frac{P}{Q}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3!} - \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{N+1}{2.(N+4)!} - \frac{P(N+3)}{2Q(N+4)!} \right),\quad ó$$

sea:

$$e = 3 - \tfrac{1}{2!}\ \tfrac{1}{2} - \frac{1}{3!}\ \frac{1}{2}\,\frac{P}{Q} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(Q-P)\ N+Q\ -\ 3P}{2Q.(N+4)!}$$

Si hacemos ahora Q = 3P obtendremos:

$$e = 3 - \tfrac{1}{2!}\ \frac{1}{1}\,\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N}{3.(N+4)!}\quad ,\ ó\ \text{sea:}$$

$$e = 3 - \tfrac{1}{2!}\ \frac{1}{1}\,\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{N\ +\ 1}{3.(N+5)!}$$

Repitiendo la transformación con valores de K = 4, 5, 6,...S

obtendremos finalmente:

$$e = 3 - \frac{1}{2!}\frac{1}{1}\,\frac{1}{2} - \frac{1}{3!}\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} - \frac{1}{4!}\ \frac{1}{3}\,\frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{S!}\ \frac{1}{(S-1)}\ \frac{1}{S} -$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{N\ +\ 1}{S.(N+S+2)!}$$

Si hacemos tender a S al infinito, vemos que la sumatoria tiende a cero, podemos pues poner:

$$e = 3 - \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{(N+1)(N+2).(N+3)!}$$

Esta serie converge con mucha más rapidez que la clásica como se puede apreciar en el cuadro siguiente:

N	Clásica	Nueva
0	1.000000...	2.7500000.........
	2.000000...	2.7222222.........
	2.500000...	2.7187493055......
	2.666666...	2.718322263111.....
	2.708333...	2.71828633481481..

Hemos subrayado las cifras exactas en cada serie para hacer más visible la comparación.

Para terminar deseo expresar mi agradecimiento al Doctor Eduardo Caro Cayzedo, quien con su colaboración e insinuaciones fué factor fundamental en la culminación de este trabajo.