

Revista Colombiana de Matemáticas  
Volumen II, 1.968. Páginas 149-164.

## ESTABILIDAD DE ORBITAS RELATIVISTAS

por

Luciano Mora O.

INTRODUCCION.- Las ecuaciones de la Relatividad General para el campo gravitacional son no-lineales. De esta característica esencial resulta que las "Soluciones Escritas" que de ellas se conocen (Schwarzschild, Weyl, Levi, Cinta, etc), conducen a ecuaciones orbitales también no-lineales.

Para el caso de una masa puntual en reposo, se obtienen las "soluciones estáticas de simetría esférica" de donde resulta la ecuación diferencial de la órbita,

$$(E) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{H^2} + 3u^2 \quad (\text{Einstein, 1.916})$$

donde  $u$  es proporcional a  $\frac{1}{r}$  y  $r$  y  $\varphi$  son coordenadas polares.

Esta ecuación contrasta con la ecuación newtoniana para el mismo caso.

$$(N) \quad \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{1}{H^2}$$

Por la presencia del término no-lineal  $3u^2$

Observamos:

- 1) (N) conduce a las órbitas de Kepler.
- 2) (E) el fenómeno de la precesión del perihelio de mercurio ( $43''$  en un siglo, Einstein-Eddington, 1.919).
- 3) Puesto que las discrepancias cuantitativas entre (E) y (N) son débiles, por lo menos a escala planetaria, y, de hecho, otras teorías lineales conducen a predicciones similares, un análisis cualitativo de (E) podría, eventualmente, revelar contrastes intrínsecos con (N), de indudable utilidad en las verificaciones ulteriores de la teoría General de la Relatividad.

En esta nota, después de mostrar que la función elíptica de Weierstrass es solución de (E), escribimos la forma canónica de la misma, determinamos la integral de las trayectorias en el espacio de fase, las singularidades, incluida su naturaleza y la configuración local y global de las trayectorias. Finalmente demostramos la existencia de una familia de soluciones periódicas, de un ciclo límite, de los cuales se estudian la localización y la estabilidad.

## I - LA SOLUCION ELIPTICA

- 1) En lo sucesivo identificamos  $\varphi$  con  $t$  (tiempo). La ecuación

$$u'' = 3u^2 - u + \frac{1}{4^2} = 3\left(u - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{12}$$

Con la transformación

$$2x = u - \frac{1}{6}$$

puede escribirse

$$\ddot{x} = 6x^2 - \frac{1}{2} g_2 ; \text{ donde } g_2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{H^2} > 0$$

- 2) La integral elíptica

$$t = \int_x^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{s}}, \text{ donde } s = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

define a  $x$  como función de  $t$ ,  $x = \mathcal{G}(t)$  que es la función elíptica de Weierstrass de invariantes  $g_2$  y  $g_3$ .

3)  $\sqrt{s} = \dot{x}$ , por tanto  $\dot{x}^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ , de donde

$$(I.3) \quad \ddot{x} = 6x^2 - \frac{1}{2} g_2$$

o sea  $x = \mathcal{G}(t)$  es solución de (E).

Poniendo

$$x = \mathcal{G}(t)$$

$$y = \dot{\mathcal{G}}(t) = \dot{x}$$

tenemos las ecuaciones paramétricas de las trayectorias en el espacio de fase  $x \times \dot{x}$ .

O en forma integral

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

Una idea de su configuración podemos tener dibujando la curva

$$G(x) = 4x^3 - g_2x$$

luego  $G(x) - g_3$ , después, los arcos simétricos

$$y = \pm \sqrt{G(x) - g_3} = \frac{dx}{dt}$$

## II - LA FORMA CANONICA

1) La ecuación (I.3) equivale al sistema

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = 6x^2 - \frac{1}{2} g_2$$

Por medio de las transformaciones afines:

$$T_1 : x = X - \frac{1}{2} g_2$$

$$y = 3Y$$

$$T_2 : X = -\frac{1}{A} \xi ; Y = -\frac{1}{K} \eta$$

donde

$$A = -2\sqrt{g_2}, K^2 = 6\sqrt{g_2}; \tau = Kt$$

Obtenemos

$$(II.1) \quad \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x - \frac{1}{2g_2} x^2 \end{cases}$$

que llamamos la "forma canónica" del sistema autónomo.

2) En esta forma

$$\dot{x} = -y$$

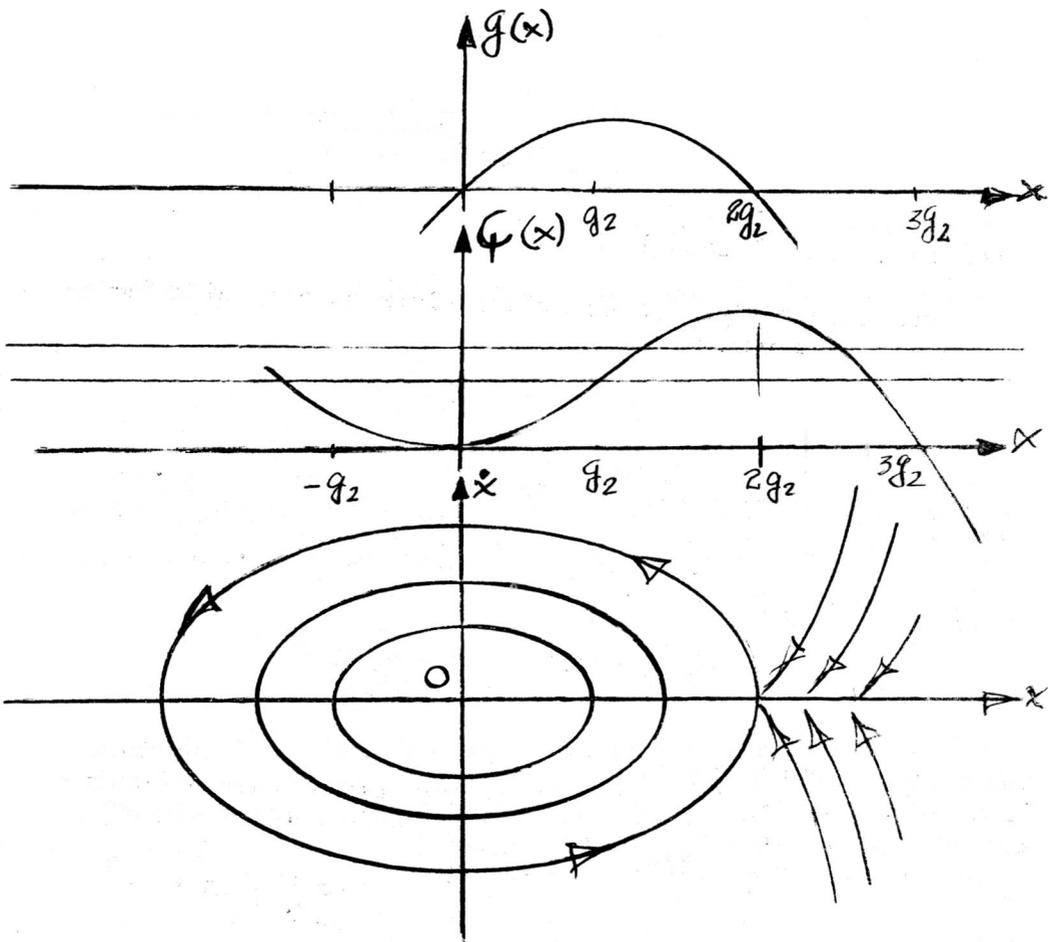
$$\dot{y} = x - \frac{1}{2} g_2 x^2 = g(x)$$

llamamos  $G(x) = \int_0^x g(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6g_2} x^3$  (energía potencial)

Volviendo a la ecuación de segundo orden e integrando, obtenemos la "ecuación de la energía" que es también de las trayectorias:

$$\frac{1}{2} y^2 = g_3 - G(x); \quad y = \pm \sqrt{2(g_3 - G(x))}$$

Dibujamos sucesivamente  $g(x)$ ;  $G(x)$ , y las trayectorias.



3) Observamos que  $g(x)$  se anula no sólo en  $(0,0)$  sino además en  $(2g_2, 0)$ ; tampoco tiene el signo de  $x$  y no es impar; por lo tanto no podemos utilizar los resultados de Lienard, Levinson, Smith, Littlewood-Cartwright, Van der Poll, etc.

4) Puesto que por simetría

$$\text{tiempo } (\overrightarrow{AB}) = \text{tiempo } (\overrightarrow{BA})$$

para el período tenemos

$$T = \sqrt{2} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{g_3 - G(x)}} = T(g_3)$$

en contraste con el caso lineal.

5) La ecuación de las trayectorias, vista como función implícita de 2 variables:

$$f(x,y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6g_2} x^3 - g^3$$

tiene dos puntos extremos: un mínimo en  $P_1(0,0)$  y un punto silla en  $P_2(2g_2,0)$ . Esto muestra, por un lado, que  $P_1$  es un punto de equilibrio estable en el sentido de Lagrange y por otro que la función

$$V(x,y) = y^2 + x^2 - \frac{1}{3g_2} x^3$$

es definida positiva y tiende a cero con  $x^2 + y^2$  (función de Liapounov). Además, los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , vistos como singularidades de las trayectorias, son:  $P_1$  un "punto aislado" y  $P_2$  un nodo o punto doble.

### III - LINEARIZACION

Con el objeto de utilizar los resultados de la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales 0, procedemos al proceso de "Linearización alrededor de las singularidades". (Liapounov).

1) Los únicos puntos de equilibrio de (II.1) son  $P_1(0,0)$  y  $P_2(2g_2,0)$ . Linearizando alrededor de  $P_1(0,0)$ , tenemos:

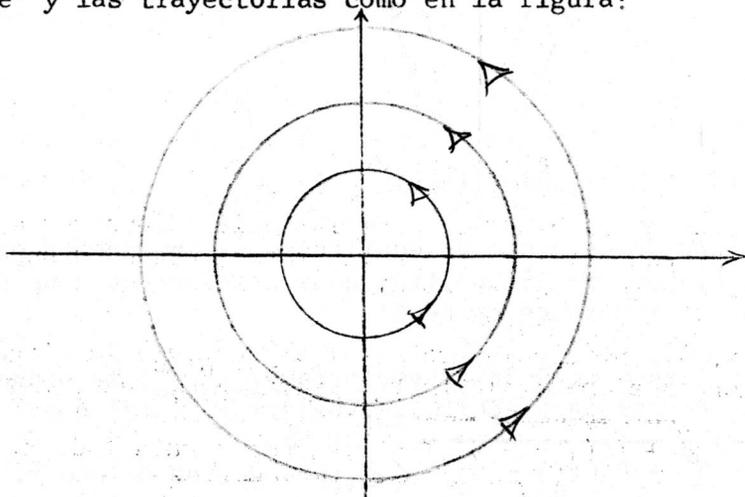
$$\dot{x} = -y$$

$$\dot{y} = x$$

de matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  y ecuación característica

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1, \text{ de autovalores puramente ima-}$$

ginarios:  $\lambda = \pm i$ . Las soluciones son  $x = \cos t$  y  $y = \sin t$ , un círculo alrededor de  $(0,0)$ .  $P_1$  es un "centro" o un "vértice" y las trayectorias como en la figura:



linearizando alrededor de  $P_2$

$$\dot{x} = -y$$

$$\dot{y} = -x$$

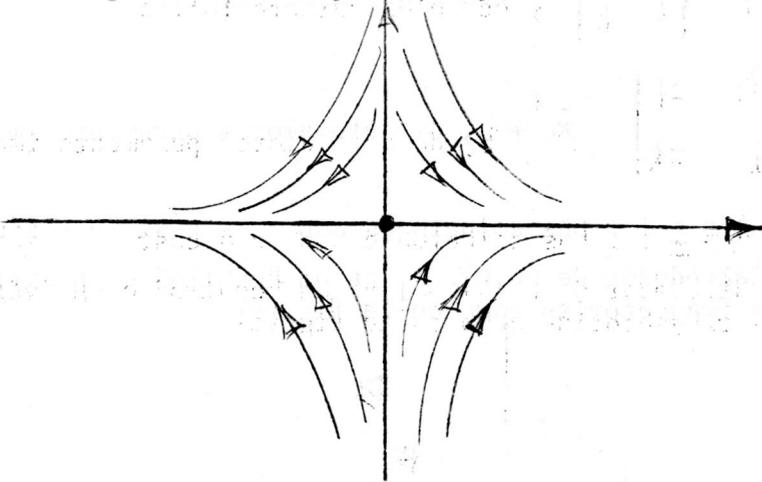
Con la matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  y  $\mathcal{P}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$

$$= \pm 1$$

la solución es  $x = C_1 e^t$ ,  $y = C_2 e^{-t}$

y con  $C_1 C_2 \neq 0$   $y = C_1 C_2/x$

$P_2$  es un punto "silla" y las trayectorias como en la figura



### 2) Estabilidad en el caso lineal.

La estabilidad de un punto de equilibrio la entendemos en el sentido de Liapounov: Si una trayectoria se acerca a un punto, permanece siempre cerca de él:

Sea  $C : \{x(t), y(t)\}$  la trayectoria y  $(x_0, y_0)$  la singularidad. Entonces si para cierto  $t_0$ , existe  $\delta$ , tal que

$\sqrt{(x(t_0) - x_0)^2 + (y(t_0) - y_0)^2} < \delta$  entonces para todo  $t$ , existirá la trayectoria y  $\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \delta$

Por lo tanto, claramente, en el caso lineal  $P_0$  es estable y  $P_1$   $t_0 < t < \infty$  inestable.

### 3) Estabilidad en el caso general.

Para el caso general nos apoyamos en la Teoría de Liapounov y recordamos lo siguiente

$$\dot{x} = P(x, y) \quad \dot{y} = Q(x, y)$$

Al linearizarlo alrededor de  $(0,0)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + \xi_1(x, y) \\ \dot{y} &= cx + dy + \xi_2(x, y) \end{aligned}$$

La singularidad  $(0,0)$  es simple si

$$i) \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

$$ii) \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\mathcal{E}_l(x,y)}{x^2 + y^2} = 0 \quad l=1,2$$

En estas condiciones se demuestra:

- 1) Una singularidad simple es aislada
- 2) Si el sistema lineal tiene soluciones tales que

$$|x(t, t_0)| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)}$$

$$|y(t, t_0)| \leq B e^{-\alpha(t-t_0)}$$

donde  $B$  y  $\alpha$  son constantes positivas independientes de  $t$  entonces todas las soluciones del sistema general son estables.

En otras palabras: La singularidad del sistema general tiene la misma naturaleza que en el sistema linearizado, excepto en el "caso excepcional" que corresponde a raíces puramente imaginarias del polinomio característico. (Liapounov).

En nuestro caso las condiciones i) y ii) se cumplen obviamente y además el punto  $P_1(0,0)$  corresponde al caso "excepcional". Por lo tanto  $P_2(2g_2, 0)$  es un "punto-silla" de equilibrio inestable y  $P_1(0,0)$  requiere un tratamiento especial.

Por lo demás, sabemos por (II.5) que  $(0,0)$  es estable en el sentido de Lagrange que coincide con el de Liapounov, puesto que para la función  $L$ :

$$V(x,y) = y^2 + x^2 - \frac{1}{3g_2} x^3$$

y la derivada  $\dot{V}$  a lo largo de la trayectoria:

$$\frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \dot{y} = 2g(x)(-y) + 2g(x)y = 0, \text{ entonces}$$

(0,0) es uniformemente estable (método directo de Liapunov)

4) El punto (0,0) en el caso general. Confirmación de lo anterior.

Para investigar la naturaleza de las trayectorias en el contorno de  $P_1(0,0)$  utilizamos la Teoría de Frommer sobre las "direcciones críticas", son las direcciones  $\varphi_i$ ; a lo largo de las cuales las trayectorias tienden al origen.

Si  $\psi$  es el ángulo entre el radio vector y el campo vectorial  $F(r, \varphi)$ , están determinadas por la condición

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow \varphi_i}} \operatorname{tg} \psi = 0$$

Para nuestro sistema canónico

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x - \frac{1}{2g_2} x^2 \end{aligned}$$

Obtenemos en coordenadas polares

$$(I.4) \quad \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\frac{1}{2g_2} r^2 \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 1 - \frac{r}{2g_2} \cos^3 \varphi \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \psi = r \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\cos^3 \varphi - \frac{2g_2}{r}}{\operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi}$$

Puesto que las únicas direcciones críticas posibles:  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$  anulan también el denominador y sin embargo

$$\lim_{r \rightarrow 0} \operatorname{tg} \psi \neq 0 \text{ y análogamente para } \frac{3\pi}{2} .$$

$$\varphi \rightarrow \pi/2$$

No existen direcciones críticas. Además nuestro sistema no cambia al sustituir  $t$  por  $-t$  y por  $-y$ , entonces por el criterio de Poincaré  $(0,0)$  es todavía un centro para el sistema general y el Teorema de Frommer asegura que en un centro sin direcciones críticas las trayectorias se comportan, esencialmente, como en el sistema lineal, o sea las trayectorias en la vecindad de  $(0,0)$  son cerradas y lo rodean.

#### IV - SOLUCIONES PERIODICAS

- 1) Que las trayectorias cerradas alrededor de  $(0,0)$  establecidas en el parágrafo anterior se asocian a soluciones periódicas puede verificarse con la ayuda de otro resultado notable de Liapounov.

Observamos que el sistema (II.1) puede escribirse:

$$\dot{x} = - \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$(IV.1) \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}$$

donde  $H(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6g_2} x^3$

(la integral del sistema)

Con las propiedades

$$i) \quad \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_0 = \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)_0 = 0$$

ii) H es holomorfa en la vecindad de 0.

Puesto que la matriz del sistema lineal tiene como raíces características  $\pm i$ , podemos aplicar el Teorema de Liapounov y concluir que el sistema canónico (IV.1) admite una familia de un parámetro real de soluciones periódicas.

$$\varphi_i(t + T, C) = \varphi_i(t, C)$$

$$T = f(C)$$

La estabilidad orbital de la familia sigue de la dependencia continua del parámetro C.

## V - EXAMEN DE OTRAS SOLUCIONES PERIODICAS

En la búsqueda de otras trayectorias cerradas: 1) ciclos límites, o sea soluciones periódicas aisladas, asintóticamente estables; 2) soluciones periódicas inestables, con trayectorias en forma de silla, etc. Conviene utilizar la Teoría de Liapounov de los "exponentes característicos" poderosa aunque difícil.

1) Las ecuaciones de variación.

Sea  $x = \varphi(t)$  y  $y = \psi(t)$  una solución periódica de

$$\dot{x} = F_1(x, y)$$

(V.0)

$$\dot{y} = F_2(x, y)$$

Pongamos

$$x(t) = \varphi(t) + \xi(t); \quad y(t) = \psi(t) + \eta(t)$$

Las funciones  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  [generalmente de valor absoluto pequeño] son las variaciones de  $x(t)$  y de  $y(t)$ , respectivamente.

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \dot{x} - \dot{\varphi} = F_1(\varphi + \xi, \psi + \eta) - F_1(\varphi, \psi) \\ \dot{\eta} = \dot{y} - \dot{\psi} = F_2(\varphi + \xi, \psi + \eta) - F_2(\varphi, \psi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \xi \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \right)_{\varphi, \psi} + \eta \left( \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)_{\varphi, \psi} + r(\xi, \eta) \\ \dot{\eta} = \xi \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} \right)_{\varphi, \psi} + \eta \left( \frac{\partial F_2}{\partial y} \right)_{\varphi, \psi} + s(\xi, \eta) \end{cases}$$

donde  $r$  y  $s$  son series de potencias en  $\xi$  y  $\eta$  de grado mayor o igual que dos. La parte lineal de este sistema son las "ecuaciones de variación".

2) En nuestro caso:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -\eta \\ \dot{\eta} = \left(1 - \frac{\varphi(t)}{g_2}\right) \xi \end{cases}$$

de matriz

$$s(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 - \frac{\varphi(t)}{g_2} & 0 \end{bmatrix}$$

(V.1)

$$\dot{\underline{x}} = s(t) \underline{x}$$

(forma vectorial).

Este sistema se llama "reducible" si existe una matriz  $K(t)$  que junto con el determinante  $|K^{-1}(t)|$  son acotados en  $t_0 \leq t < \infty$ , tal que la transformación lineal

$$\tilde{x} = K(t) \tilde{z}$$

transforma (V.1) en

$$\dot{\tilde{z}} = B \tilde{z} \quad B \text{ constante}$$

(V.1) es reducible si  $A(t)$  es periódica y entonces  $K(t)$  también es periódica (Liapounov). Podemos además suponer a  $B$  en forma de Jordán. Las raíces características de  $B$  son los "exponentes característicos" de (V.1).

Tenemos además los resultados siguientes:

- 1) Si las partes reales de los exponentes característicos tienen el mismo signo entonces la solución periódica es un ciclo límite. (Nemytsky-Stepanov- Q.T of D.E. pág. 259).
- 2) Si el sistema (V.0) es autónomo y  $\varphi(t)$  no es un estado de equilibrio, (V.1) tiene un exponente característico igual a 1.
- 3) Si  $n = 2$ , el otro

$$\lambda = \exp \left[ \int_0^T \left\{ \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \varphi, \psi + \left( \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) \varphi, \psi \right\} dt \right]$$

(Pontryagin O.D.E. pág. 273)

- 4) De esto se deduce que puesto que en nuestro caso

$$\lambda = 1, \varphi(t), \psi(t) \text{ corresponde a un ciclo límite.}$$

Sobre su localización podemos predecir, teniendo en cuenta

la configuración de las trayectorias en el espacio de fase, que corresponde a la región de inestabilidad alrededor de  $P_2$  y que su trayectoria será vecina a las curvas de forma estrofoidal, alrededor de  $P_2$ .

RESUMEN:

- 1) La presencia de dos estados de equilibrio, la naturaleza de la función  $g(x)$  revela una configuración del espacio de fase que muestra que alrededor de  $P_1(0,0)$  las diferencias cualitativas entre la ecuación lineal (N), y la no-lineal (E), si se exceptúa la variación del período con el parámetro, no son esenciales por otro, alrededor de  $P_2(2g_2, 0)$ , la existencia de un ciclo-límite es fundamental y requiere investigación adicional sobre localización, ecuación, período, etc.

BIBLIOGRAFIA

- 1.- Lefschetz. S. "Differential Equations; Geometric Hesev" New York, 1957.
- 2.- Huiewicz W. "Lectures on ordinary Differential Equations". Cambridge, Mass., 1958
- 3.- Pontiyagin L.S. "Ordinary Differential Equations" Reading, Mass., 1962.
- 4.- Nemytskü V.V. "Qualitative Theory of Differential Equations". Princeton, 1960.
- 5.- Hayes W.D. "Stability of periodic solutions of general second-order equations" Bol. Sre. Mat. Mex. Vol 5 No.2. Pag. 265.
- 6.- Hale J.K. "On the characteristic exponents of linear periodic differential systems" Bol- Sre. Mat. Mex. Vol 5 No.

7.- Mora O. L.

"La teoría cualitativa de las funciones diferenciales ordinarias".  
Rev. Mat. Elem. Vol. VII Fasc. 4  
Pag. 1.