Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen II. 1.968. Páginas 169-171.

ALGUNOS GRUPOS ARITMETICOS NO MAXIMALES

por

Nello Allan

Es un hecho bien conocido que todas las superficies de Riemann que no son simplemente conexas y que tienen género mayor que uno, pueden ser obtenidas como cociente del semiplano complejo, H, por un grupo r que actúa descontínuamente en H; este r puede ser considerado como subgrupo discreto del grupo de automorfismos analítico de H que es el grupo lineal especial real, $Sl_2(R)$. Entre esos r hay unos que son fáciles de construir, a saber: el grupo $r = Sl_2(Z)$, que consiste de las matrices enteras en $Sl_2(R)$. Si se cambia la representación de $Sl_2(R)$ y se considera el subgrupo de las matrices enteras, r', entonces $r \neq r'$; en general, pero estos dos grupos son conmensurables en el sentido de que $r \cap r'$ tiene índice finito en ambos: r y r'. Este hecho nos lleva a considerar la clase de conmensurabilidad de $Sl_2(Z)$; todos los grupos de esta clase se llaman aritméticos. De una manera un poco más general podemos considerar el grupo $Sl_2(\rho)$ donde ρ es el anillo de números enteros de un campo k, totalmente real y de grado r sobre los racionales Q. En este caso $Sl_2(\rho)$ puede ser considerado como subgrupo discreto de $(Sl_2(R))^r$, actuando en Hx ... xH, r veces. El problema en el que estamos interesados es el de la determinación de la clase de conmensurabilidad de $Sl_2(\rho)$, en el sentido de determinar una familia S, contable, que consista de grupos aritméticos maximales en esa clase y tales que dos subgrupos distintos cualesquiera de esa familia no sean conjugados en $Sl_2(R)$. Este problema fue resuelto por Helling [5], en 1.965.

La noción de grupo aritmético para dimensiones mayores que uno es la siguiente: Sea G un grupo lineal algebraico semi-simple definido sobre un campo de números algebraicos k y sea G_ρ el subgrupo consistente de todas las matrices enteras de G. Diremos que un subgrupo r de G es aritmético si r fuera conmensurable a G_ρ . En [1], [6] se muestra la existencia de grupos aritméticos maximales en su clase de conmensurabilidad, en situaciones que contienen todos los casos interesantes.

En mi trabajo [3] una relación precisa entre maximalidad local y maximalidad global es obtenida, usando el teorema de la aproximación fuerte de Kneser; como consecuencia el cálculo de la familia S es hecho en el caso de $G = Sl_n(R)$, y en ciertos casos para el grupo simpléctico, $G = Sp_n(R)$.

En el caso del grupo especial ortogonal $G = SO(H)$, el teorema de la aproximación fuerte no sigue siendo verdadero, de modo que es muy difícil la construcción de la familia S. Lo mismo en el caso local diádico la discusión de este problema es más difícil; la maximalidad de G_ρ in G_k parece depender de los campos residuos de los primos que dividen dos, y de la estructura del grupo de unidades de ρ , en el caso simple en que H es la matriz $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & j & 0 \\ E & 0 & 0 \end{pmatrix}$, siendo E la identidad de r por r y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Siendo más preciso, en el artículo [2] probamos que G_Z es maximal y en artículo [4] exhibimos varios campos de números para los cuales G_ρ no es maximal. Para la discusión de la maximalidad o no maximalidad de G_ρ en G_k hay una técnica muy útil: considérese el ρ-módulo L generado por G_ρ en $M_n(k)$, $n = 2r + 2$, y obsérvese que L es un orden en este álgebra de matrices; este orden está contenido solamente en un número finito de órdenes maximales.
$L_1, \ldots, L_m$, entonces $G_\rho \subset L_i \cap G = r_i$. Para probar que G_ρ es maximal en G_k es suficiente probar que $r_i = G_\rho$ para todos los índices i, y para probar que G_ρ no es maximal es suficiente probar que existe un índice i tal que r_i contiene G_ρ propiamente. Si asumimos que 2 es primo en ρ , entonces no es difícil probar que todas las matrices de G_ρ tienen los elementos no diagonales de la línea r + 2 divisible por 2.

Entonces G_ρ está contenido en la orden maximal L donde todas las matrices de L tienen elementos enteros, con excepción de los elementos no diagonales de la columna r + 2, pero dos veces esos elementos son enteros, y todos los elementos no diagonales de la línea r + 2 son divisibles por 2. En [4] construímos matrices en $G \cap L$ que no son enteras, y entonces $G \cap L$ es un grupo aritmético que contiene G_ρ propiamente.

BIBLIOGRAFIA

1.- N. Allan, The problem of the maximality of aritmetic groups, Proc. of Symp. in Pure and Applied Math. Vol 9, p. 104/109.

2.- N. Allan, A note on the Arithmetic of the Orthogonal Group, Anais da Academia Brasileira de Ciencias, 1966.

3.- N. Allan, On the commensurability class of the Hilbert Siegel Modular Group, Bul. of Amer. Math. Soc. vol. 1968, p.

4.- N. Allan, Some non maximal arithmetic groups, Rev. Colombiana de Matemática, Vol. II, 1968, p. 21/18.

5.- H. Helling, Bestimmung der Kommensurabilitats - klasse der Hilbertschen Modulegruppe, Math. Zeit. 92. (1966) p. 269/280.

6.- H.C. Wang, On a maximality property of discrete subgroups with fundamental doamain of finite measure, Amer. J. of Math., Vol 89, (1967), p. 124/132.