

Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen II. 1.968. Páginas 172-174

SOBRE LA REGULARIDAD DE LAS SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES LINEALES CON DIFERENCIAS Y COEFICIENTES CONSTANTES.

por

Jaime Lesmes

El tema tratado corresponde al §4 de [2], trabajo del cual aparecerá próximamente una versión abreviada [3]. Nos basamos esencialmente en resultados de Ehrenpreis [1].

Consideramos operadores de la forma:

$$\mathcal{P} = \sum_{k=0}^m P_k(D) \mathcal{T}_{h_k} \quad (1)$$

sobre espacios de distribuciones.

Aquí los P_k , $0 \leq k \leq m$, son polinomios complejos en n variables, $D = \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$, los $h_k = (h_{k1}, \dots, h_{kn})$ son puntos de \mathbb{R}^n , y los \mathcal{T}_{h_k} son los operadores de traslación correspondientes. Suponemos además $h_0 = 0$.

DEFINICION: Sea Ω un abierto no vacío de \mathbb{R}^n . Se dice que el operador \mathcal{P} es hipoelíptico en Ω (respectivamente, hipoelíptico en Ω respecto a x_1, \dots, x_p , en donde $p < n$), si cualquiera que sea el abierto Ω_1 de \mathbb{R}^n , tal que

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\supset \Omega \\ \Omega_1 + h_k &= \Omega_1 \quad (0 \leq k \leq m) \end{aligned}$$

para toda solución u en $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ de la ecuación homogénea $\mathcal{P}u = 0$, la restricción $u|_{\Omega}$ pertenece a $C^\infty(\Omega)$ (resp. $u|_{\Omega}$ es regular respecto a x_1, \dots, x_p).

TEOREMA.- Si existe un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que \mathcal{P} sea hipoeĺıptico en Ω (resp., hipoeĺıptico en Ω respecto a x_1, \dots, x_p), entonces $\mathcal{P} = P_0(D)$ (resp. $h_{kj} = 0$, para $0 \leq k \leq m, 1 \leq j \leq p$).

La demostración de este teorema se basa en los siguientes lemas:

LEMA 1.- Sean $S \in \mathcal{E}'$, $\mathcal{N} = \{\xi \in \mathbb{C}^n; \hat{S}(\xi) = 0\}$ (en donde \hat{S} designa la transformación de Fourier de S), y suponemos $\mathcal{N} \neq \emptyset$, y \mathcal{N} no acotado (lo que siempre es el caso para $\neq \emptyset$, si $n \geq 2$). Sea Ω un abierto no vacío en \mathbb{R}^n ; entonces, si \mathcal{N} tiene la propiedad:

$$\liminf_{\substack{|\xi| \rightarrow \infty \\ \xi \in \mathcal{N}}} \left[\frac{|\operatorname{Im} \xi|}{\log(1 + |\xi|)} \right] < +\infty \quad (2)$$

existe una solución $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de la ecuación $S * u = 0$, tal que $u|_{\Omega}$ no es medida de Radón sobre Ω .

LEMA 2.- Para $\xi \in \mathbb{C}^n$, p entero $< n$, pongamos:

$$\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_p); \quad \xi'' = (\xi_{p+1}, \dots, \xi_n).$$

Sean ahora $S \in \mathcal{E}'$ y dos abiertos $V \subset \mathbb{R}^p, W \subset \mathbb{R}^{n-p}$. Si existe un subconjunto $\mathcal{N}^* \subset \mathcal{N} = \{\xi \in \mathbb{C}^n; \hat{S}(\xi) = 0\}$ sobre el cual $|\xi''|$ y $|\operatorname{Im} \xi| / \log(1 + |\xi|)$ están acotados, pero $|\xi'|$ no lo está, entonces existen una función $\psi \in C_0^\infty(W)$ y una solución $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ de la ecuación $S * u = 0$, tales que la restricción a V de la distribución $\langle u(x', x''), \psi(x'') \rangle$ no es una medida de Radón sobre V .

LEMA 3.- Sea $Q(\mathcal{K}) = \sum_{k=0}^m p_k(\mathcal{K}) \cdot \exp(-i \langle h_k, \mathcal{K} \rangle)$ (ver fórmula (1)). Sean b_j ($2 \leq j \leq m$) números complejos fijos, tales que, poniendo $B(z) = Q(z, b_2, \dots, b_m) = \sum_{k=0}^m A_k(z) \cdot \exp(-i h_{k1} z)$, los A_k , $0 \leq k \leq m$, sean todos $\neq 0$. (Suponemos $h_{ki} \neq h_{ji}$ para $k \neq j$, lo cual siempre se puede alcanzar por cambio de coordenadas). Entonces, si

$$\mathcal{N} = \{ \mathcal{K} \in \mathcal{C}^n ; Q(\mathcal{K}) = 0 \}$$

no cumple (2), la función $B(z)$ tiene a lo más un número finito de ceros en \mathcal{C} .

LEMA 4.- Si un polinomio exponencial de una variable de la forma $\sum_{k=0}^m A_k(z) \exp.(ia_k z)$, $a_k \in \mathbb{R}$ tiene solamente un número finito de ceros en \mathcal{C} , entonces es igual al producto de un polinomio por una exponencial de la forma e^{ibx} , con $b \in \mathbb{R}$.

REFERENCIAS

- 1.- Ehrenpreis, L., Solutions of some problems of division IV. Am.J. Math. 82, 522-588 (1960).
- 2.- Lesmes, J., Weber lineare partielle Differential - Differenzenoperatorem mit konstanten Koeffizienten. Collect Math. 18, 7-55 (1966-67).
- 3.- Lesmes, J., Sobre una clase de operadores de convolución. Por aparecer en la Revista Colombiana de Matemática.