Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen III ,(1969), págs. 25 - 42

ESTABILIDAD DE LA FUNCION $\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^\lambda}$

por

YU TAKEUCHI

1. *INTRODUCCION .* En el trabajo anterior [(3),pág. 12-20] se ha encontrado una fórmula asintótica de la siguiente función

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^\lambda}$$

en el cual se ha utilizado un procedimiento no justificado que reemplaza $n!$ por la fórmula de Stirling. En este trabajo no sólo se justifica el resultado anterior sino que se encuentra la fórmula aproximada de las funciones más generales :

$$f_\lambda(x) = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^\lambda} \qquad (\lambda = real > 0) \tag{1}$$

con el objeto de aclarar sus comportamientos cuando $x \to \infty$, obteniendo el siguiente resultado :

$$f_\lambda(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^\lambda} \sim \frac{2 \ exp.\{ (cos\ \pi/\lambda)\ \lambda\ x^{1/\lambda} \}}{(2\pi)^{(\lambda-1)/2}\ \lambda^{1/2}\ (x)^{(\lambda-1)/2\lambda}} . sen\ \{ (sen \frac{\pi}{\lambda})\lambda\ x^{1/\lambda} + \frac{\pi}{2\lambda} \}$$

$$cuando \ \ \lambda \geqslant 2,$$

$$f_\lambda(x) = O(1/x^\nu) \qquad cuando \qquad 0 < \lambda < 2 \ , \ \lambda \neq 1 ,$$

donde $\nu < 1$ si $0 < \lambda < 1$, $\nu < 1/\lambda$ si $1 < \lambda < 2$ y

$$f_\lambda(x) = e^{-x} \qquad cuando \qquad \lambda = 1 .$$

Así, tenemos inmediatamente que

$$f_\lambda(x^2) \in \ L_2(-\infty \ , \ \infty) \qquad si \quad \lambda \leqslant 2 ,$$

$$f_\lambda(x^2) \qquad diverge \ \ cuando \ \ x \to + \infty \qquad si \quad \lambda > 2 .$$

El procedimiento utilizado es el siguiente :

i) Primero , comparamos las funciones en (1) con las funciones :

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{(e^{\lambda} x)^n}{(2\pi)^{\lambda/2} \; n^{\lambda(2n+1)/2}} \tag{2}$$

teniendo en cuenta la conocida fórmula de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi} \cdot n^{(2n+1)/2} \; e^{-n} \tag{3}$$

ii) Luego , comparamos las funciones en (2) con las funciones del tipo :

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{(\lambda^{\lambda} x)^n}{\Gamma(\lambda n + \mu)} \tag{4}$$

de las cuales sus desarrollos asintóticos se hallan utilizando las fórmulas asintóticas de las funciones hipergeométricas confluentes .

iii) Para realizar las comparaciones mencionadas en i) y ii), la fórmula asintótica (3) nos sirve como una guía pero no es útil para una demostración rigurosa por no ser una relación analítica . El principal argumento para este trabajo es la fórmula de Binet [1](pág. 253) :

$$\log \Gamma(z) = (z - \frac{1}{2}) \; \log z - z + \log \sqrt{2\pi} + J(z) \tag{5}$$

donde

$$J(z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{c_1}{z+1} + \frac{c_2}{2(z+1)(z+2)} + \cdots + \frac{c_k}{k\,(z+1) \ldots (z+k)} + \cdots \right\} \tag{6}$$

es una serie convergente en $R(z) > 0$.

2. MAYORANTE

Dada una función $f(x)$ definida en $[0, \infty)$, una función positiva $g(x)$ se llama una mayorante de $f(x)$ si existe una constante C tal que

$$|f(x)| \leqslant C\, g(x) \qquad \text{para todo} \quad x \in [0\,,\, \infty). \tag{7}$$

Si otra función continua $f_1(x)$ cumple la condición

$$f_1(x) = f(x) + o(g(x)) \qquad (x \to +\infty) \tag{8}$$

entonces es claro que g es también una mayorante de f_1 y que f_1 es una ***aproximación asintótica de f con respecto a g*** . Por ejemplo :

Si

$$f(x) = e^{2x}\, sen\, x + e^x \cos x$$

$$f_1(x) = e^{2x} \operatorname{sen} x , \qquad g(x) = e^{2x} ,$$

entonces g es una mayorante de f y f_1, y f_1 es una aproximación asintótica de f con respecto a g. Pero

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} = 1 + e^{-x} \cot x$$

no tiende a un límite cuando $x \to \infty$, es decir, f_1 no es asintóticamente igual a f.

3. *MAYORANTE DECRECIENTE* $1/x^{\nu}$

Sea $f(x)$ una función definida por serie de potencias convergente para todo x:

$$f(x) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n \; x^n . \tag{9}$$

Si $1/x^{\nu}$ $(0 < \nu \leqslant 1)$ es una mayorante de f, entonces existe una constante C tal que

$$\left| \sum_{n=o}^{\infty} a_n \; x^n \right| \leqslant \frac{C}{x^{\nu}} .$$

Reemplazando x por x^{a} $(a > 0)$ y multiplicando por x^s se tiene:

$$\left| \sum_{n=o}^{\infty} a_n \; x^{an+s} \right| \leqslant C \; x^{s-a\nu} . \tag{10}$$

Integrando la desigualdad anterior k veces de 0 a x obtenemos:

$$\left| \sum_{n=o}^{\infty} a_n \frac{x^{an+s+k}}{(an+s+1)\ldots(an+s+k)} \right| \leqslant C \frac{x^{s-a\nu+k}}{(s-a\nu+1)\ldots(s-a\nu+k)} .$$

Dividiendo por x^{s+k} y reemplazando x^{a} por x se tiene:

$$\left| \sum_{n=o}^{\infty} a_n \frac{x^n}{(an+s+1)\ldots(an+s+k)} \right| \leqslant \frac{1}{(s-a\nu+1)\ldots(s-a\nu+k)} \cdot \frac{C}{x^{\nu}} . \tag{11}$$

Teniendo en cuenta la convergencia de la serie $J(an+s)$ definida en (6) tenemos:

$$\left| \sum_{n=o}^{\infty} a_n J(an+s) \; x^n \right| = \left| \sum_{n=o}^{\infty} a_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2k(an+s+1)\ldots(an+s+k)} \; x^n \right|$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2\,k} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n \cdot x^n}{(an+s+1)\ldots(an+s+k)} \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2\,k} \; \frac{1}{(s-a\nu+1)\ldots(s-a\nu+k)} \cdot \frac{C}{x^{\nu}}$$

$$= J(s-a\nu)\ \frac{C}{x^{\nu}}\ . \qquad (12)$$

Esto es, $1/x^{\nu}$ es una mayorante de

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n\ J(an+s)\ x^n \qquad (13)$$

si

$$s > a\nu\ .$$

Aplicando la desigualdad (12) sucesivamente tenemos:

$$\left|\sum_{n=o}^{\infty} a_n\, e^{\lambda J(an+s)}\cdot x^n\right| = \left|\sum_{n=o}^{\infty} a_n\ \frac{\lambda^l\, \{J(an+s)\}^l}{l\,!}\ x^n\right|$$

$$= \sum_{l=o}^{\infty} \frac{|\lambda|^l}{l\,!}\ \sum_{n=o}^{\infty} a_n\, \{J(an+s)\}^l\ x^n$$

$$\leqslant \sum_{l=o}^{\infty} \frac{|\lambda|^l}{l\,!}\ \{J(s-a\nu)\}^l\cdot \frac{C}{x^{\nu}} = \frac{C}{x^{\nu}}\cdot exp.\{\,|\lambda|\ J(s-a\nu)\,\} \qquad (14)$$

es decir, $1/x^{\nu}$ es una mayorante de

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n\ e^{\lambda J(an+s)}\ x^n \qquad (\,s > a\nu\,)\,. \qquad (15)$$

Ahora, sea $b(z)$ una función analítica de z en $|z| > r_o$; entonces sabemos [1] *(pág. 142-144)* que $b(z)$ es desarrollable absolutamente en $R(z) > r_o$ como sigue:

$$b(z) = b_o + \frac{b_1}{z+1} + \dots + \frac{b_k}{(z+1)\dots(z+k)} + \dots \qquad (16)$$

De (11) tenemos:

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n\, b(an+s)\ x^n = \sum_{n=o}^{\infty} a_n\ \{\, b_o + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(an+s+1)\,..\,(an+s+k)}\cdot x^n\,\}$$

$$\leqslant |b_o|\left|\sum_{n=o}^{\infty} a_n\, x^n\right| + \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k\ \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n\ x^n}{(an+s+1)\dots(an+s+k)}\right|$$

$$\leqslant \frac{C}{x^{\nu}}\,\{\, |b_o| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k|}{(s-a\nu+1)\cdot\ldots\cdot(s-a\nu+k)}\,\} \qquad (17)$$

esto es, $1/x^{\nu}$ es una mayorante de la función

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n\, b(an+s)\, x^n , \tag{18}$$

donde

$$s > a\nu + r_o \ .$$

4. MAYORANTE CRECIENTE

Sea $g(x)$ una mayorante creciente de la función f definida en (9), que satisface las siguientes condiciones :

i) g es creciente en $[\,0\ ,\ \infty\,)$

ii) $g(x)/g'(x)$ es acotada, es decir existe una constante M tal que

$$\frac{g(x)}{g'(x)} \leqslant M \qquad \text{para todo} \quad x \in [\,0,\ \infty\,)\ . \tag{19}$$

Como g es una mayorante de f, existe una constante C tal que

$$\left| \sum_{n=o}^{\infty} a_n\, x^n \right| \leqslant C\ \ g(x). \tag{20}$$

En la desigualdad (20), reemplazando x por x^a ($a \geqslant 1$) y multiplicando por x^s ($s \geqslant 0$) tenemos

$$\left| \sum_{n=o}^{\infty} a_n\, x^{an+s} \right| \leqslant C\cdot g(x^a)\, x^s .$$

Integrando la desigualdad anterior k veces de 0 a x tenemos :

$$\left| \sum_{n=o}^{\infty} \frac{x^{an+s+k}}{(an+s+1)\ .\ .\ \ (an+s+k)} \right| \leqslant \quad C\cdot \underbrace{\int_0^x \cdots \int_0^x}_{k\ \ veces} x^s\, g(x^a)\, dx \cdots dx\ , \tag{21}$$

Como g es creciente, se tiene que

$$\underbrace{\int_0^x \cdots \int_0^x}_{k\text{-}1\ \ veces} x^s\, g(x^a)\, dx \cdots dx \ \leqslant\ g(x^a) \underbrace{\int_0^x \cdots \int_0^x}_{k\text{-}1\ \ veces} x^s\, dx \cdots dx$$

$$= \frac{x^{s+k-1}\qquad g(x^a)}{(s+1)\ .\ .\ .\ (s+k-1)}\ .$$

Luego,

$$\int_0^x \cdots \int_0^x\ x^s\, g(x^a)\, dx \ldots\ dx \leqslant \int_0^x \frac{x^{s+k-1}\ \ g(x^a)\ \ dx}{(s+1)\ .\ .\ .\ \ (s+k-1)} \tag{22}$$

Ahora, vamos a demostrar que para cualquier real ν , $0 < \nu \leqslant 1$ existe una constante M_o tal que

$$\int_o^x x^{s+k-1}\, g(x^a)\, dx \leqslant M_o \frac{x^{s+k-1+\nu}}{k^\nu} g(x^a) \qquad \textit{para todo } k = 1,2,3.. \qquad (23)$$

En realidad, teniendo en cuenta que ambos miembros de la desigualdad (23) toman valor nulo cuando $x = 0$, basta comparar la desigualdad de las derivadas de los ambos miembros de (23). Si $x \leqslant k$ tenemos

$$\left\{\frac{x^{s+k-1+\nu}}{k^\nu} g(x^a)\right\}' = \frac{(s+k-1+\nu)}{k^\nu} x^{s+k+\nu-2} . g(x^a) + \cdots\cdots$$

$$\geqslant \frac{(k+\nu-1)}{k^\nu} x^{s+k-1} . x^{\nu-1} . g(x^a) \geqslant \frac{\nu\, k}{2\, k^\nu} x^{\nu-1} x^{s+k-1} g(x^a)$$

$$= \frac{\nu}{2} (k/x)^{1-\nu} x^{s+k-1} g(x^a) \geqslant \frac{\nu}{2} x^{s+k-1} g(x^a) ,$$

Obsérvese que

$$k + \nu - 1 > k\nu/2 \qquad \textit{para todo } k = 1, 2, 3, \ldots\ldots , \quad 0 < \nu \leqslant 1 .$$

Si $x > k$ entonces

$$\left\{\frac{x^{s+k-1+\nu}}{k^\nu} \cdot g(x^a)\right\}' = \cdots\cdots + \frac{x^{s+k-1+\nu}}{k^\nu} g'(x^a)\, a\, x^{a-1}$$

$$\geqslant x^{s+k-1} . g'(x^a) \cdot (x/k)^\nu \cdot a\, x^{a-1} \geqslant \frac{1}{M} x^{s+k-1} . g(x^a)$$

puesto que

$$(x/k)^\nu > 1 , \quad a\, x^{a-1} > a \geqslant 1 .$$

Por lo tanto si

$$M_o = M\acute{a}ximo \ \{ M , 2/\nu \}$$

entonces para todo $k = 1,2,3,\ldots$ y $x \in [0 , \infty)$ tenemos la siguiente desigualdad:

$$x^{s+k-1} . g(x^a) \leqslant M_o \ \{ x^{s+k-1+\nu} . g(x^a) / k^\nu \}' \qquad (24)$$

la cual demuestra la desigualdad (23).

De (21), (22) y (23) tenemos:

$$\left|\sum_{n=o}^{\infty} a_n \frac{x^{an+s+k}}{(an+s+1).\,.\,(an+s+k)}\right| \leqslant C\,M_o \cdot \frac{x^{s+k-1+\nu}\, g(x^a)}{(s+1)\,.\,.\,.\,.\,(s+k-1)\,k^\nu} \,.$$

Dividiendo por x^{s+k} y luego reemplazando x^a por x se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\left|\sum_{n=o}^{\infty} a_n \frac{x^n}{(an+s+1).\,.\,.\,(an+s+k)}\right| \leqslant \frac{C\,M_o}{x^{(1-\nu)/a}} \frac{g(x)}{(s+1).\,.\,(s+k-1)\,k^\nu} \tag{25}$$

$$(0<\nu\leqslant 1\,,\ s\geqslant 0\,,\ a\geqslant 1\,)$$

El resultado (25) y la convergencia uniforme de la serie $J(na+s)$ $(n=0,1,\dots)$ dada en (6) nos conducen a la siguiente desigualdad:

$$\left|\sum_{n=o}^{\infty} a_n\, J(na+s)\, x^n\right| = \left|\sum_{n=o}^{\infty} a_n \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2k\,(na+s+1).\,.\,.\,(na+s+k)}\right\} x^n\right|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2\,k} \sum_{n=o}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^n}{(an+s+1)\,.\,.\,(na+s+k)}\right|$$

$$\leqslant \frac{M_o\,C}{x^{(1-\nu)/a}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2k\,(s+1)\,.\,.\,.\,(s+k-1)\,k^\nu}\, g(x) \tag{26}$$

donde la última serie converge si $\nu+s>1$ puesto que ésta es comparable con:

$$J(\nu+s-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2k\,(\nu+s)(\nu+s+1)\,.\,.\,.\,(\nu+s+k-1)}\,,$$

teniendo en cuenta

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(s+1)(s+2)\,.\,.\,.\,(s+k-1)\cdot k^\nu}{(s+\nu)(s+\nu+1)\,.\,.\,.\,(s+\nu+k-1)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma(k+s)\,\Gamma(s+\nu)\cdot k^\nu}{\Gamma(s+1)\,\Gamma(s+\nu+k)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma(s+\nu)\,\sqrt{2\pi}\,(k+s)^{k+s-(1/2)}\, e^{-k-s}\, k^\nu}{\Gamma(s+1)\,\sqrt{2\pi}\,(k+s+\nu)^{k+s+\nu-(1/2)}\,.\,e^{-k-s-\nu}} = \frac{\Gamma(s+\nu)}{\Gamma(s+1)}\,. \tag{27}$$

Tomando

$$A = M_o \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2k(s+1)\ldots(s+k-1)\,k^{\nu}}$$

tenemos el siguiente teorema :

TEOREMA 1

$$\left| \sum_{n=o}^{\infty} a_n\, J(n\alpha+s)\, x^n \right| \leqslant A\cdot C\cdot g(x)/x^{(1-\nu)/\alpha} \qquad (28)$$

donde

$$0 < \nu \leqslant 1\,,\quad \alpha \geqslant 1\,,\quad s \geqslant 0\,,\quad \nu + s > 1\,.$$

Nótese que la constante A depende de ν .

COROLARIO Para $\alpha \geqslant 1$, $s > 0$ tenemos

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n\, J(n\alpha + s)\, x^n = o(g(x)) \qquad (29)$$

Demostración. Si $s > 0$ entonces siempre se halla un real ν $(0 < \nu < 1)$ tal que $\nu + s > 1$, además

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{(1-\nu)/\alpha}} = 0\,.$$

TEOREMA 2

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n\, e^{\lambda J(n\alpha+s)}\, x^n = \sum_{n=o}^{\infty} a_n\, x^n + o(g(x)) \qquad (30)$$

donde $\alpha \geqslant 1$, $s > 0$, λ es cualquier real .

Demostración.

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n\, e^{\lambda J(n\alpha+s)}\, x^n = \sum_{n=o}^{\infty} a_n \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k (J(n\alpha+s))^k}{k\,!} \right\} x^n$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} a_n\, x^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k\,!} \sum_{n=o}^{\infty} a_n \left\{ J(n\alpha+s) \right\}^k \cdot x^n \qquad (31)$$

Aplicando la desigualdad (28) k-1 veces para $\nu = 1$ se obtiene :

$$\left| \sum_{n=o}^{\infty} a_n \left\{ J(n\alpha+s) \right\}^{k-1} \cdot x^n \right| \leqslant A^{k-1}\cdot C\cdot g(x)\,,$$

luego nuevamente aplicando la desigualdad (28):

$$\left| \sum_{n=o}^{\infty} a_n \; \{J(na+s)\}^k \; x^n \right| \leqslant A' \, A^{k-1} \, C \; g(x) \big/ x^{(1-\nu)/a} \; . \qquad (32)$$

De (31) y (32):

$$\left| \sum_{n=o}^{\infty} a_n \; e^{\lambda J(na+s)} x^n - \sum_{n=o}^{\infty} a_n \, x^n \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \; \frac{A' \cdot A^{k-1}}{x^{(1-\nu)/a}} C \cdot g(x) \; = \; \frac{A'}{A} \; \frac{(e^{\lambda A} - 1)}{x^{(1-\nu)/a}} \cdot C \cdot g(x) \; = \; o(g(x)) \; .$$

TEOREMA 3 . Sea $b(z)$ una función analítica de z en $|z| > r_o$ tal que

$$\lim_{z \to \infty} b(z) = 1$$

entonces

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n \; b(an+s) \; x^n \; = \; \sum_{n=o}^{\infty} a_n \; x^n \; + \; o(g(x)) \qquad (33)$$

donde

$$s > r_o \quad , \; a \geqslant 1 \; .$$

Demostración . La función $b(z)$ es desarrollable en la serie (16) que es convergente en $R(z) > r_o$, donde

$$b_o \; = \; \lim_{z \to \infty} b(z) \; = \; 1 \; .$$

Entonces

$$\sum_{n=o}^{\infty} a_n \; b(an+s) \; x^n \; = \; \sum_{n=o}^{\infty} a_n \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(an+s+1) \ldots (an+s+k)} \right\} x^n$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} a_n \, x^n + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sum_{n=o}^{\infty} \frac{a_n \; x^n}{(an+s+1) \ldots (an+s+k)} \; .$$

De (25):

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=o}^{\infty} b_k \; \frac{a_n \; x^n}{(an+s+1) \ldots (an+s+k)} \right|$$

$$\leqslant \frac{C \cdot M_o \cdot g(x)}{x^{(1-\nu)/a}} \; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(s+1) \ldots (s+k-1) \cdot k^{\nu}} \qquad (34)$$

donde la última serie converge para $s+\nu-1 > r_o$ puesto que podemos comparar ésta con $b(s+\nu-1)$ teniendo en cuenta el límite (27). Si $s > r_o$ entonces podemos encontrar un valor real de ν tal que $0 < \nu < 1$, $s+\nu-1 > r_o$, por consiguiente el último miembro de (34) es $o(g(x))$.

COROLARIO.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\mp\beta} (1 + \frac{\beta}{\lambda n + s})^{\pm\lambda n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + o(g(x)) \qquad (35)$$

donde

$$s > \beta > 0, \quad \lambda > 0.$$

Demostración. La función

$$\pm z \log (1 + \frac{\beta}{\lambda z})$$

es analítica en $|z| > \beta/\lambda$, luego la función

$$b(z) = e^{\mp\beta} e^{\pm\lambda z \log(1+\beta/\lambda z)} \{ 1 + \frac{\beta}{\lambda z}\}^{\mp s} = e^{\mp\beta}\{ 1 + \frac{\beta}{\lambda z} \}^{\pm\lambda z \mp s}$$

es también analítica en $|z| > \beta/\lambda$, además

$$\lim_{z\to\infty} b(z) = e^{\mp\beta} e^{\pm\beta} = 1.$$

Aplicando el teorema anterior, tenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b(n + \frac{s}{\lambda}) \cdot x^n + o(g(x))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\mp\beta} \{ 1 + \frac{\beta}{\lambda n + s} \}^{\pm\lambda n} x^n + o(g(x))$$

puesto que

$$s/\lambda > \beta/\lambda.$$

5. *FORMULA ASINTOTICA DE LA FUNCION* $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{\Gamma(\lambda n + \mu)}$

En este parágrafo se halla la fórmula asintótica de la función:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n \ t^n}{\Gamma(\lambda n+\mu)} \qquad (\lambda > 0) \tag{36}$$

y en los siguientes parágrafos relacionaremos la función (36) con la función definida en (1) utilizando el procedimiento establecido en los parágrafos anteriores.

Primero, suponemos que λ es un número racional :

$$\lambda = q/p$$

donde p, q son naturales, además para mayor facilidad suponemos que p es par. Entonces

$$n = mp + k \quad (k = 0,1,2,\ldots , p-1)$$

luego

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n \ t^n}{\Gamma(\lambda n+\mu)} = \sum_{k=o}^{p-1} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(-1)^{mp+k} \ t^{mp+k}}{\Gamma(\lambda(mp+k)+\mu)}$$

$$= \sum_{k=o}^{p-1} (-1)^k \ t^k \sum_{m=o}^{\infty} \frac{\{t^p\}^m}{\Gamma(qm+\mu+\lambda k)} \ . \tag{37}$$

Por otra parte, si w es la raíz q-ésima fundamental de uno :

$$w = exp.\{2\pi i/q\} = cos \frac{2\pi}{q} + i \ sen \frac{2\pi}{q} \tag{38}$$

entonces

$$\sum_{h=o}^{q-1} (w^n)^h = 1 + (w^n) + (w^n)^2 + \ , \ldots + (w^n)^{q-1} = 0 \qquad (n= 1,2,\ldots , q-1) \ ;$$

por lo tanto

$$\sum_{m=o}^{\infty} \frac{(x^q)^m}{\Gamma(qm+c)} = \frac{1}{q} \sum_{h=o}^{q-1} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(w^h x)^n}{\Gamma(n+c)}$$

$$= \frac{1}{q} \sum_{h=o}^{q-1} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(w^h x)^n}{\Gamma(c) \ c(c+1) \ldots (c+n-1)}$$

$$= \frac{1}{q\Gamma(c)} \sum_{h=o}^{q-1} F(1, c, w^h x) \ , \tag{39}$$

donde $F(1, c, w^h x)$ es la función hipergeométrica confluente, y su fórmula asintóti tica es [3, Vol 1]

$$F(1,\ c,\ w^h x) = \frac{1-c}{w^h\ x}\ \{\ 1+O(1/x)\ \} + \frac{\Gamma(c)\ \ exp.\{w^h x\}}{(w^h x)^{c-1}}\ \{1+O(1/x)\}\ , \tag{40}$$

donde

$$\left|Arg\ w^h\right| < \pi\ .$$

De (37) , (39) y (40) tenemos

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{\Gamma(\lambda n+\mu)}$$

$$\sim \sum_{k=o}^{p-1} (-1)^k\ t^k \sum_{h=o}^{q-1} \left[\frac{1}{q}\ \frac{exp.\{w^h(t)^{p/q}\}}{\{w^h(t)^{p/q}\}^{\lambda k+\mu-1}} - \frac{(\lambda k+\mu-1)}{q\Gamma(\mu+\lambda k)}\ \frac{1}{w^h(t)^{p/q}}\right] \tag{41}$$

$$= \sum_{h=o}^{q-1} \frac{1}{q}\ \frac{exp.\{w^h\ t^{1/\lambda}\}}{(w^h\ t^{1/\lambda})^{\mu-1}} \sum_{k=o}^{p-1} \frac{(-1)^k}{(w^{\lambda h})^k}$$

$$- \frac{1}{q\ t^{1/\lambda}} \sum_{h=o}^{q-1} \frac{1}{w^h} \sum_{k=o}^{p-1} \frac{(-1)^k\ t^k\ \ (\lambda k+\mu-1)}{\Gamma(\mu+\lambda k)}\ . \tag{42}$$

Primero , se ve que

$$\sum_{h=o}^{q-1} \frac{1}{w^h} = \frac{1}{w^q} \sum_{h=o}^{q-1} w^h = 0\ .$$

Segundo , si $(-w^{-\lambda h}) \neq 1$ tenemos

$$\sum_{k=o}^{p-1} \frac{(-1)^k}{(w^{\lambda h})^k} = \frac{1-(-w^{-\lambda h})^p}{1+w^{-\lambda h}} = \frac{1-\ w^{-qh}}{1+w^{-\lambda h}} = 0$$

ya que $(-1)^p = 1$, $w^q = 1$. Si

$$w^{\lambda h} = -1 \tag{43}$$

tenemos :

$$\sum_{k=o}^{p-1} \frac{(-1)^k}{(w^{\lambda h})^k} = \sum_{k=o}^{p-1} 1 = p\ .$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{\Gamma(\lambda n+\mu)} \sim \sum_{\substack{b=o \\ (w^{\lambda b}=-1)}}^{q-1} \frac{p}{q} \quad \frac{exp.\{w^b.t^{1/\lambda}\}}{\{w^b.t^{1/\lambda}\}^{\mu-1}} . \tag{44}$$

Pero, si $w^{\lambda b} = -1$ tenemos entonces que

i) para $b < q/2$

$$w^{\lambda b} = exp.\{\frac{2\pi i}{q}\frac{q}{p} b\} = exp.\{2\pi i b/p\} = exp.\{\pi i + 2N\pi i\} \qquad (N=0,\ 1,..\ )$$

luego

$$b = (p/2) + pN \qquad (N = 0,\ 1,\ 2,\ ..\ ) \tag{45}$$

para $b > q/2$

$$w^{\lambda b} = (w^b)^{\lambda} = exp.\{2\pi - \frac{2\pi b}{q})i\frac{q}{p} = exp.\{2\pi i(\frac{q}{p} - \frac{b}{p})\} = exp.\{\pi i + 2N\pi i\} ,$$

es decir,

$$b = q - (p/2) - 2Np .$$

Nótese que hay que tomar $|Arg\ w^k| < \pi$ para aplicar la fórmula (40).

Entre las funciones exponenciales $exp.\{w^b(\lambda x^{1/\lambda})\}$, la más grande es la que corresponde al máximo valor de $R(w^b)$, que es

$$b = p/2, \quad \text{o} \quad b = q - (p/2);$$

es decir,

$$w^b = [exp.\{2\pi i/q\}]^{p/2} = exp.\{\pi i p/q\} = exp.\{\pi i/\lambda\}$$

o

$$w^b = exp.\{\frac{2\pi i}{q}(q - p/2)\} = exp.\{-\pi i p/q\} = exp.\{-\pi i/\lambda\} .$$

Entonces, si $\pi/\lambda < \pi/2$ o $\lambda > 2$ tenemos:

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{(t)^n}{\Gamma(\lambda n + \mu)}$$

$$\sim \frac{1}{\lambda}\left[\frac{exp.\{t^{1/\lambda}(\cos(\pi/\lambda) + i\ sen\ (\pi/\lambda)\}}{\{t^{1/\lambda} exp.(\pi i/\lambda)\}^{\mu-1}} + \frac{exp.\{(1/t)(\cos(\pi/\lambda) - i\ sen\ (\pi/\lambda)\}}{\{t^{1/\lambda} exp.(-\pi i/\lambda)\}^{\mu-1}}\right]$$

$$= \frac{2}{\lambda\,(t)^{(\mu-1)/\lambda}} \; exp.\{\,(cos(\pi/\lambda)\; t^{1/\lambda}\,\}.\; cos\,\{\,(sen\;\pi/\lambda)\; t^{1/\lambda} - \pi(\mu - 1)/\lambda\,\} \quad (46)$$

Si $\lambda < 2$, entonces $R(e^{\pm\pi i/\lambda})$ es negativa, esto es, las funciones en (44) son exponencialmente decrecientes cuando $x \to \infty$, luego el segundo término de la fórmula asintótica (40) no contribuye al comportamiento de la función cuando x es suficientemente grande. En tal caso, desarrollamos asintóticamente el primer término de la fórmula (40) :

$$F(1,\, c,\, w^b x\,) = \frac{1 - c}{w^b x}\;\{\,1 + \frac{1\,!}{w^b\, x} + \binom{c-2}{1} + \frac{2\,!}{(w^b\, x\,)^2}\binom{c-2}{2} +$$

$$\cdots\cdots + \frac{(q-1)\,!}{(w^b\, x)^{q-1}}\binom{c-2}{q-1} + \cdots\cdots\,\}\,. \quad (47)$$

Pero como

$$\sum_{b=o}^{q-1} \frac{1}{(w^b\,)^j} = 0 \qquad (\,1 \leqslant j < q - 1\,)$$

entonces

$$\sum_{b=o}^{q-1} F(1,\, c\,,\, w^b x\,) = q\,(1 - c)\,\{\,\frac{(q-1)\,!}{x^q}\binom{c-2}{q-1} + \frac{(2q-1)\,!}{x^{2q}}\binom{c-2}{2q-1} + \cdots\,\}.$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente aproximación :

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{\Gamma(\lambda n + \mu)} \sim \sum_{k=o}^{p-1} (-1)^k\, t^k\,[\, - \frac{(\lambda k + \mu - 1)}{\Gamma(\lambda k + \mu)}\,\frac{(q-1)\,!}{\{(t)^{p/q}\}^q}\binom{\lambda k + \mu - 2}{q-1} + O(1/t^{2p})\,]$$

$$= - \sum_{k=o}^{p-1} (-1)^k\, t^k\;[\,\frac{1}{(\lambda k + \mu - 1)\cdot t^p} + O(1/t^{2p})\,]$$

Como $t^k = o(\,t^{p-1})$ $(\,k < p - 1\,)$, entonces tomando $k = p - 1$ se tiene :

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{\Gamma(\lambda n + \mu\,)} = \frac{1}{t}\,\frac{1}{\Gamma(\mu - \lambda)} + O(1/t^2)\,. \quad (48)$$

6. APROXIMACION ASINTOTICA DE $f_\lambda(x)$ PARA $\lambda > 2$.

En la fórmula (45), tomando $\mu = (\lambda + 1)/2$ se tiene

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{\Gamma(\lambda n+(\lambda+1)/2)} \sim \frac{2}{\lambda \cdot t^{(\lambda-1)/2\lambda}} \quad exp.\{(cos\, \pi/\lambda)\, t^{1/\lambda}\}. sen[(sen\frac{\pi}{\lambda}).t^{1/\lambda}+\frac{\pi}{2\lambda}] \; . \tag{49}$$

Como $cos\ \pi/\lambda > 0$, entonces la función

$$g(t) \quad = \frac{exp.\{\ (cos\ \pi/\lambda)\ t^{1/\lambda}}{t^{(\lambda-1)/2\lambda}} \tag{50}$$

es una mayorante , que cumple la condición (19) , de la función

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{\Gamma(\ \lambda n\ +\ (\lambda+1)/2\ )} \; . \tag{51}$$

Entonces , por el teorema 2 se tiene :

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{exp.\{\lambda n + \frac{\lambda+1}{2}\}}{[\ \lambda n + \frac{\lambda+1}{2}\ ]^{\lambda(2n+1)/2}} \quad t^n$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{exp.\{\ J(\lambda n+ (\lambda+1)/2\ )\ \}}{\Gamma(\lambda n\ +\ (\lambda+\ 1)/2)} \ t^n \ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{\Gamma(\lambda n + (\lambda+1)/2\ )} \quad + \ o(g(t)) \; . \tag{52}$$

Por el corolario del teorema 3 tenemos :

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\ \pi}} \frac{exp.\{\ \lambda n + (\lambda+1)/2\ \}}{[\ \lambda n + (\lambda+\ 1)/\ 2]^{\lambda(2n+1)/2}} . \{\ 1 + \frac{(\lambda-1)/2}{\lambda n\ + (\lambda+1)/2}\ \}^{-\lambda(2n+1)/2}\ e^{(\lambda-1)/2}\ \ t^n$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\ \pi}} \quad \frac{exp.\{\lambda n + (\lambda+1)/2\}}{[\ \lambda n + (\lambda+1)/\ 2\ ]^{\lambda(2n+1)/2}} \ + \ o(g(t))$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \ (-1)^n \ \frac{t^n}{\Gamma(\ \lambda\, n\ +\ (\lambda+1)/2)} \ + \ o(g(t)) \; ,$$

es decir ,

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \ \frac{e^{\lambda(n+1)}}{(n+1)^{\lambda(2n+1)/2}} \ \frac{t^n}{\lambda^{\lambda(2n+1)/2}} \ = \sum_{n=o}^{\infty} \ (-1)^n \ \frac{t^n}{\Gamma(\lambda n\ + (\lambda+1)/2)} \ + \ o(g(t)) \; ,$$

o sea

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\lambda(n+1)}}{(n+1)^{\lambda(2n+1)/2}}\, x^n = (\lambda)^{\lambda/2} \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{(\lambda^{\lambda} x)^n}{\Gamma(\lambda n+(\lambda+1)/2)} + o(g(\lambda^{\lambda} x)), \tag{53}$$

donde $\quad t = \lambda^{\lambda} x$.

De (5) y el teorema 2 tenemos :

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^{\lambda}} x^n = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{\lambda(n+1)}\; e^{-\lambda J(n+1)}}{(2\pi)^{\lambda/2}\;(n+1)^{\lambda(2n+1)/2}}\, x^n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{(\lambda-1)/2}} \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{\lambda(n+1)}}{\sqrt{2\pi}\;(n+1)^{\lambda(2n+1)/2}}\, x^n$$

$$= \frac{\lambda^{\lambda/2}}{(2\pi)^{(\lambda-1)/2}} \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{(\lambda^{\lambda} x)^n}{\Gamma(\lambda n+\frac{\lambda+1}{2})} + o(g(\lambda^{\lambda} x))$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^{(\lambda-1)/2}} \; \frac{exp.\{(\cos \pi/\lambda)\, \lambda\, x^{1/\lambda}\}}{\lambda^{1/2}\; x^{(\lambda-1)/2\lambda}} \; sen\{(sen\, \pi/\lambda)\lambda \cdot x^{1/\lambda} + \frac{\pi}{2\lambda}\}$$

$$+ \; o(g(\lambda^{\lambda} x)) . \tag{54}$$

Para $\lambda = 2$ se tiene que

$$f_2(x) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n = J_o(2x^{1/2})$$

Teniendo en cuenta la fórmula asintótica de la función de Bessel $J_o(2 \cdot x^{1/2})$, se observa que (54) es también válida para $\lambda = 2$.

7. *ESTABILIDAD DE $f_\lambda(x)$ PARA $\lambda < 2$.*

Sea ν tal que

$$0 < \nu < 1 , \quad 0 < \nu < 1/\lambda , \quad 0 < \nu < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}$$

de (48) tenemos

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{\Gamma(\lambda n+(\lambda+1)/2)} = O(1/t^{\nu}) \tag{55}$$

De (15) :

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{exp.\{\lambda n+\frac{\lambda+1}{2}\}}{[\lambda n+\frac{\lambda+1}{2}]^{\lambda(2n+1)/2}} t^n = \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{J(\lambda n+\frac{\lambda+1}{2})}}{\Gamma(\lambda n+(\lambda+1)/2)} \cdot t^n = O(1/t^{\nu}) ,$$

ya que

$$\frac{\lambda+1}{2} > \lambda\nu \quad (\text{ó} \quad \nu < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda}) .$$

Pero :

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{\lambda(n+1)} t^n}{(n+1)^{\lambda(2n+1)/2}}$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{exp.\{\lambda n+\frac{\lambda+1}{2}+\frac{\lambda-1}{2}\}}{(\lambda n+(\lambda+1)/2)^{\lambda(2n+1)/2}} \left[1+\frac{(\lambda-1)/2}{\lambda n+(\lambda+1)/2}\right]^{-\lambda n-(\lambda/2)} \cdot t^n$$

$$= O(1/t^{\nu}) ,$$

ya que

$$\frac{\lambda+1}{2\lambda} > \nu + \frac{\lambda-1}{2\lambda} \quad (\text{ó} \quad \nu < 1/\lambda) ;$$

o sea

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \left\{\frac{e^{(n+1)}}{(n+1)^{n+(1/2)}}\right\}^{\lambda} \cdot x^n = O(1/x^{\nu}) ,$$

donde $t = \lambda^{\lambda} x$.

De (5) y (15) , si $\nu < 1$ tenemos

$$\sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n!)^{\lambda}}$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} (-1)^n \left\{\frac{e^{(n+1)}}{\sqrt{2\pi}\ (n+1)^{n+(1/2)}}\right\}^{\lambda} e^{-\lambda J(n+1)} x^n = O(1/x^{\nu}) . \quad (56)$$

De las desigualdades simultáneas :

$$0 < \nu < \frac{1}{\lambda} \quad , \quad 0 < \nu < \frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda} \quad , \quad 0 < \nu < 1$$

se tiene que ν es cualquier real positivo tal que

$$\nu < 1 \qquad \text{si} \qquad 0 < \lambda \leqslant 1$$

$$\nu < 1/\lambda \qquad \text{si} \qquad 1 < \lambda < 2 .$$

Entonces, podemos escoger un ν mayor que $1/2$ para todo $\lambda < 2$, por lo tanto se tiene

$$f_\lambda(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(n!)^\lambda} \in L_2(-\infty, \infty) . \tag{57}$$

REFERENCIAS

1. *E. WHITTAKER, G. N. WATSON, Modern Analysis, Cambridge University Press, 1935*
2. *ERDELYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, TRICOMI, Higher Trascendental Functions, 1935 Vol. I, II, III, Mac Graw Hill, New York,*
3. *YU TAKEUCHI, Desarrollo Asintótico de la Función* $\sum (-1)^k x^k / (k!)^3$, *Revista Colombiana de Matemáticas, Vol. II, (1968), págs. 12-20*

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

(Recibido en febrero de 1969)