Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen IV (1970), págs. 17 - 27

DE LAS ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS A LAS ECUACIONES SUMATORIAS

por

Gabriel POVEDA R.

0º Las ecuaciones en diferencias finitas constituyen un material relativamente poco conocido, a pesar de que desde el siglo pasado George Boole escribió una obra ya clásica sobre ellas, especialmente sobre las del tipo ordinario, con una sola variable discreta independiente. Sin embargo, el caso de dichas ecuaciones ordinarias lineales, es bien conocido de los tratadistas [*1,2,3,5,6*] y sobre él se conocen los teoremas de existencia y unicidad de soluciones, de superposición de soluciones particulares y otros en los cuales se apoya el estudio de esas ecuaciones. Hay métodos conocidos y sencillos para resolver esas ecuaciones, sean homogéneas o no homogéneas, cuando los coeficientes son constantes y en algunas formas especiales de coeficientes variables.

1º Lo que sí no aparece presentado en ninguno de los tratados sobre estos temas (ver bibliografía al final de este artículo) son las ecuaciones sumatorias. Solo Jordan las menciona de pasada, como una posibilidad, pero sin dedicarles ninguna atención. Por este motivo, y por haberlas encontrado en varios trabajos sobre graduación de series estadísticas (especialmente demográficas), el autor de esta nota ha dedicado algún esfuerzo al estudio de las ecuaciones sumatorias y de métodos para resolverlas.

2º Una ecuación sumatoria es una ecuación funcional de la forma

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=a}^{i=b} F[\, x\,,\, i\,,\, u(i)\,] \tag{2.1}$$

en donde $u(x)$ es una sucesión de valores reales, cuya forma se trata de establecer, que es función de la variable discreta x, ; $f(x)$ es una sucesión definida para los valores de la misma variable x ; F es una forma funcional que contiene explícitamente a x, a $u(i)$ y, a veces, al mismo índice i. Este índice adopta los valores de la variable x, a los cuales pertenecen, por supuesto, los límites de la sumatoria, a, b. En cuanto a λ, es un parámetro real cuyo valor puede estar prescrito de antemano o nó.

Para no complicar innecesariamente el estudio de estas ecuaciones en un primer enfoque, suele convenirse en que los valores que recorren x, i son equidistantes, y, en particular, que coinciden con los números naturales, lo cual no es una restricción esencial.

3º Con esta notación, una ecuación sumatoria lineal (de segunda especie) tiene la forma

$$(3.1) \qquad u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=a}^{i=b} K(x, i)\ u(i), \qquad x \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

El lector reconocerá enseguida la analogía formal entre este tipo de ecuaciones y las ecuaciones integrales lineales, de manera que a las sumatorias podrían aplicarse las clasificaciones y las definiciones que son usuales para las ecuaciones integrales. Por ejemplo, diremos que la ecuación (3.1) es de segunda especie mientras que la ecuación

$$(3.2) \qquad f(x) = \sum_{i=a}^{i=b} K(x, i)\ u(i)$$

es de primera especie. Así mismo, en (3.1) diremos que es homogénea si $f(x) = 0$ (con cada valor de x)y que es no-homogénea en el caso contrario. Si uno de los límites de la sumación (por ejemplo, b) es variable con la misma x, la ecuación se llama de *Volterra*, y si ambos límites son constantes, se llama de *Fredbolm*. [7, 9].

4º Sea la ecuación en diferencias finitas, lineal, no-homogénea

$$(4.1) \qquad \Delta^n\ y(x) + a_1(x)\ \Delta^{n-1}\ y(x) + \dots + a_n(x)\ y(x) = g(x)$$

en donde $g(x)$ es una sucesión conocida. Veremos que esta ecuación es equivalente a una ecuación sumatoria de Volterra, de segunda especie.

En efecto : pongamos

$$\Delta^n y(x) = u(x)$$

entonces

$$\Delta^{n-1} y(x) = \sum_{o}^{x-1} u(i) + c_1$$

$$(4.2) \qquad \Delta^{n-2} y(x) = \sum_{x_1=o}^{x-1} \sum_{i=o}^{x_1-1} u(i) + c_1 x + c_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y(x) = \underbrace{\sum_{x_1=o}^{x-1} \cdots \sum_{x_{n-1}=o}^{x_{n-2}-1} \sum_{i=o}^{x_{n-1}-1}}_{n \text{ veces}} u(i) + c_1 P_{n-1}(x) + \cdots + c_{n-1} P_1(x) + c_n$$

en donde $P_r(x)$ es un polinomio de grado r, como se desprende de un teorema muy conocido de la teoría de sucesiones (comunmente llamada cálculo de diferencias finitas). Este polinomio puede calcularse en cada caso, por el procedimiento reiterativo indicado en (4.2), y acudiendo a las identidades bien conocidas.

$$\sum_{n=o}^{n=x-1} n^k = B_k(x-1) \;, \quad k \in \{1, 2, \ldots \}$$

en donde $B_k(x)$ es el polinomio de *Bernouilli* de orden k con argumento x. [8, 10] De este modo la ecuación (4.1) se transforma en

$$(4.3) \qquad u(x) + a_1(x) \sum_{i=o}^{x-1} u(i) + \cdots + a_n(x) \sum_{x_1=o}^{x-1} \sum_{x_2=o}^{x_1-1} \cdots \sum_{i=o}^{x_{n-1}-1} u(i)$$

$$= g(x) - \sum_{i-1}^{n} c_i \sum_{j=o}^{n-i} a_{i+j} P_j(x) \;.$$

5º El autor de esta nota ha demostrado en otra memoria [11] la identidad

$$(5.1) \qquad \underbrace{\sum_{x_1=o}^{x-1} \sum_{x_2=o}^{x_1-1} \cdots \sum_{j=o}^{x_{b-1}-1}}_{b \text{ sumaciones}} u(j) = \sum_{i=o}^{x-b} \binom{x-i-1}{b-1} u(i)$$

identidad por medio de la cual una sumación múltiple, de multiplicidad b, puede expresarse por una sumación simple (de orden 1). El autor no ha visto publicada ni utilizada esta fórmula en ninguna otra parte de la literatura referente al tema, que el autor ha explorado extensamente. Esta identidad es la análoga de la fórmula de Abel, que permite expresar integrales múltiples como una integral de convolución.

La demostración de (5.1) se apoya en cuatro teoremas elementales, más o menos conocidos, referentes a las funciones generatrices de sucesiones reales (supuesto que admiten función generatriz, por supuesto):

$$a)\quad (5.1.1)\qquad g\{\underbrace{\sum_{x_1=o}^{x-1}\ \sum_{x_2=o}^{x_1-1}\cdots\sum_{i=o}^{x_{h-1}-1}}_{h\ \text{sumaciones}} u(i)\} = g\{u(i)\}\ (1-x)^h$$

siendo g el operador *función generatriz* o *transformación - Z* o *transformación geométrica*, y x la variable muda de esta transformación:

$$g\{a(i)\} = \sum_{i=o}^{\infty} a(i)\, x^i = G(x).$$

b) Siendo h un número natural, y siendo i una variable que recorre los naturales $(i = 0, 1, 2, \ldots\quad)$ la función generatriz de una hilera en el triángulo de Pascal es:

$$g\{\binom{i+h}{h}\} = 1/(1-x)^{h+1}\quad,\qquad h \geqslant 0$$

lo anterior es lo mismo que

$$(5.1.2)\qquad g\{\binom{i+h-1}{h-1}\} = 1/(1-x)^h\quad,\qquad h \geqslant 1.$$

c) El producto de las funciones generatrices de dos sucesiones es idéntico a la función generatriz del producto convolutivo de las mismas sucesiones:

$$(5.1.3)\qquad g\{a(i)\}\cdot g\{b(i)\} = g\{a(i) * b(i)\}$$

siendo

$$a(i) * b(i) = \sum_{j=o}^{i} a(j)\cdot b(i-j)$$

d) La transformación geométrica (o de la función generatriz) es unívoca en ambos sentidos.

Aplicando estas cuatro proposiciones y haciendo un cambio de índice, resulta de inmediato la identidad (5.1). Además, observando que

$$(5.2)\qquad \binom{x-i-1}{h-1} = \frac{(x-i-1)(x-i-2)\dots(x-i-h+1)}{(h-1)!} = \frac{(x-i-1)^{h-1}}{(h-1)!}\ \underline{1/}$$

y que cuando i es mayor que $(x-h)$ los términos (5.2) son nulos, podemos escribir la identidad (5.1) como

$$(5.3)\qquad \sum_{x_1=o}^{x-1}\ \sum_{x_2=o}^{x_1-1}\dots\sum_{j=o}^{x_{h-1}-1} u(j) = \sum_{i=o}^{x-1} (x-i-1)^{h-1}\ u(i)/(h-1)!\,.$$

Esta fórmula nos permite escribir la ecuación (4.3) en términos de sumaciones simples. En efecto, designando con $f(x)$ el lado derecho de la ecuación (4.3), esta puede escribirse en la forma:

$$u(x) + \sum_{i=o}^{x-1} [\, a_1(x) + a_2(x)\,(x-i-1) + \dots + a_n(x)\,(x-i-1)^{n-1} /(n-1)!]u(i) = f(x)$$

y esta última es una ecuación sumatoria de Volterra, de segunda especie, no-homogénea, equivalente a la ecuación en DD.FF. (4.1) propuesta.

6º La solución de una ecuación de sumación de Volterra escrita en la forma

$$(6.1)\qquad u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=o}^{x-1} K(x,i)\ u(i)$$

puede intentarse por el método de sustituciones sucesivas, tal como se hace con ecuaciones integrales de Volterra. Sustituyendo $u(i)$ por el valor dado en la misma ecuación (6.1), y repitiendo reiteradamente n veces la sustitución, se tiene

$$(6.2)\qquad u(x) = f(x) + \lambda \sum_{o}^{x-1} K(x,i)\ f(i) + \lambda^2 \sum_{o}^{x-1} K(x,i) \sum^{i-1} K(i,i_1)\ f(i_1) + \dots$$

$$+ \lambda^n \sum_{i=o}^{x-1} K(x,i) \sum_{i_1=o}^{i-1} K(i,i_1) \dots \sum_{i_{n-1}=o}^{i_{n-2}-1} K(i_{n-2},i_{n-1})\ f(i_{n-1}) + R_{n+1}(x).$$

* * * * * *   * * * * * *

1/ Se trata de las potencias factoriales descendientes : $x^{(k)} = x\,(x-1)\dots(x-k+1)$.

La forma general de los primeros términos de esta serie (finita) es

$$T_k(x) = \lambda^k \sum_{i=o}^{x-1} K(x,i) \sum_{i_1=o}^{i-1} \cdots \sum_{i_{k-1}=o}^{i_{k-2}-1} K(i_{k-2}, i_{k-1})\ f(i_{k-1})$$

Entonces, si $K(x,i)$ está definida en todos los puntos de una cuadrácula rectangular R de coordenadas enteras positivas ($0 \leq x \leq a,\ 0 \leq i \leq b$), se tiene un M tal que

$$|K(x, i)| \leqslant M \quad en \quad 0 \leqslant x \leqslant a,\ \ 0 \leqslant i \leqslant b\ ;$$

y si $f(x)$ está definida en $x = 0, 1, 2, \ldots, a$, se tiene un N tal que

$$|f(x)| \leqslant N \quad en \quad 0 \leqslant x \leqslant a.$$

Por otra parte

$$\Big|\underbrace{\sum_{i=o}^{x-1} \sum_{i_1=o}^{i-1} \cdots \sum_{i_{k-1}=o}^{i_{k-2}-1}}_{k\ sumaciones} i_{k-1}\Big| = \frac{|x^{(k)}|}{k!} \leqslant \frac{|a^{(k)}|}{k!}$$

Por lo tanto :

$$(6.\ 3) \qquad |T_k(x)| \leqslant |\lambda|^k N M^k a^{(k)}/k! \leqslant |\lambda|^k N M^k a^k/k!\ .$$

La serie cuyo término general es $|\lambda|^k N\ (Ma)^k/k!$ es convergente, y es mayorante de la serie cuyo término general es $|T_k|$, como lo indica la inecuación. De esto se sigue que la serie infinita

$$(6.\ 4) \qquad u(x) = T_o(x) + T_1(x) + \cdots\cdots$$

es absoluta y uniformemente convergente, cualesquiera que sean los valores (reales) de λ, N, M, a.

El resultado de la expansión (6.2) es

$$R_{n+1}(x) = \lambda^{n+1} \sum_{o}^{x-1} K(x, i) \sum_{i_1=o}^{i-1} \cdots \sum_{i_n=o}^{i_{n-1}-1} K(i_{n-1}, i_n)\ u(i_n)\ .$$

Es claro que en $x = 0, 1, \ldots, a$, $u(x)$ tiene un máximo para su valor absoluto, que llamaremos U, de manera que se tiene la acotación

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant |\lambda|^{n+1}\, U\, M^{n+1}\, a^{(n+1)}/(n+1)! \qquad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$$

Esto nos demuestra que la función dada por (6.2) es la misma que describe la serie infinita del lado derecho de (6.4) y que estamos justificados al poner a a ambas como iguales a $u(x)$. Además, la expansión (6.4) dada en (6.4) satisface la ecuación sumatoria (6.1), como puede verificarse fácilmente. Esto muestra que la ecuación sumatoria de Volterra definida sobre una red finita tiene una solución única.

7º Un ejemplo sirve para ilustrar la transformación de una ecuación en diferencias finitas a una ecuación sumatoria y la solución de ésta. Consideremos la ecuación

$$(7.1) \qquad \Delta^2 y(x) = a^2 y(x), \quad \text{con} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad y(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

Poniendo

$$\Delta^2 y(x) = u(x)$$

se obtiene

$$\Delta y(x) = \sum_{o}^{x-1} u(i) + A \qquad (x \geqslant 1)$$

$$y(x) = \sum_{o}^{x-1} \Delta y(i) + B = \sum_{j=o}^{x-1} \sum_{i=o}^{j-1} u(i) + Ax + B$$

$$= \sum_{i=o}^{x-2} (x-1-i)\, u(i) + Ax + B \qquad (x \geq 2).$$

Las condiciones iniciales permiten evaluar las constantes aditivas, que resultan ser $B = 0$, $A = 1$. Por lo tanto, la sucesión buscada se puede escribir

$$(7.2) \qquad y(x) = x + \sum_{i=o}^{x-2} (x-1-i)\, u(i) \qquad (x \geqslant 2)$$

y la ecuación (7.1) queda convertida en la ecuación sumatoria de Volterra, de segunda especie

$$(7.3) \qquad u(x) = a^2 x + a^2 \sum_{i=o}^{x-2} (x-1-i)\; u(i) \qquad (x \geq 0).$$

Esta ecuación se puede resolver por el método de sustituciones sucesivas que ya se indicó. Reemplazando $u(i)$ por lo que expresa la ecuación anterior para $u(x)$, y repitiendo sucesiva e indefinidamente la misma sustitución, se llega a la serie infinita

$$(7.4) \qquad u(x) = a^2 x + a^4 \sum_{o}^{x-2} (x-1-i) + a^6 \sum_{o}^{x-2} (x-1-i) \sum_{o}^{i-2} (i-1-i_1)\, i_1 + \ldots$$

$$\ldots + a^{2n+2} \sum_{o}^{x-2} (x-1-i) \sum_{o}^{i-2} (i-1-i_1) \sum_{o}^{i_1-2} \ldots \sum_{o}^{i_{n-2}-2} (i_{n-2}-1-i_{n-1})\, i_{n-1}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Para calcular los términos de esta serie, usamos la fórmula sumatoria bien conocida [4, 11]:

$$\sum_{j=a}^{s-1} j^{(k)} = \frac{1}{k+1}\; j^{(k+1)} \Big]_a^s = \frac{s^{(k+1)} - a^{(k+1)}}{k+1}$$

en donde a, s, k son números naturales ($0 \leq a < s$). Según esta fórmula

$$\sum_{i=o}^{x-2} (x-1-i).i = \sum_{i=o}^{x-2} x\, i - \sum_{i=o}^{x-2} (i+1)\, i = x \sum_{o}^{x-2} i - \sum_{o}^{x-2} (i+1)^{(2)}$$

$$= x\,\frac{(x-1)(x-2)}{2} - \sum_{1}^{x-1} j^{(2)} = \frac{x^{(3)}}{2} - \frac{x^{(3)}}{3} = \frac{x^{(3)}}{3\,!}$$

De manera análoga se calcula

$$\sum_{o}^{x-2} (x-1-i) \sum_{o}^{i-1} (i-1-i_1)\; i_1 = x^{(5)}/\,5\,!$$

y así los demás términos de la serie (7.4), que es

$$(7.5) \quad u(x) = a^2 x + a^4\, x^{(3)}/3! + a^6\, x^{(5)}/5! + \ldots + a^{2k}\, x^{(2k-1)}/(2k-1)\,! + \ldots\ldots$$

Notando que para $x \geqslant 0$ se tiene

$$0 < x^{(n)} = \underbrace{x(x-1)\ldots(x-n+1)}_{n \text{ factores}} < \underbrace{x \cdot x \ \ldots \ x}_{n \text{ factores}} = x^n \quad (n \text{ entero positivo})$$

y que la serie cuyo término genérico es

$$a^{2k}\, x^{2k-1}/(2k-1)\,!$$

converge absoluta y uniformemente en todo valor real de x (hacia el valor de $a \operatorname{senh} ax$), se deduce que la serie (7.5) es absoluta y uniformemente convergente en todo valor real de x , y , en particular , en los números naturales . Por esta razón , la sumación indicada en (7.2) respecto a $u(i)$ puede realizarse término a término .

Además

$$\sum_{0}^{x-2} (x-1-i)\, i^{(2k-1)} = x^{(2k+1)}/(2k+1)\,(2k)$$

de manera que

$$(7.6) \qquad y(x) = x + a^2\, x^{(3)}/3! + a^4\, x^{(5)}/5! + \ldots\ldots \quad , \quad x > 0.$$

Es evidente que esta serie satisface la condición

$$u(x) = a^2\, y(x)$$

que es equivalente a la ecuación en diferencias finitas (7.1) ; y satisface la condición $y(0) = 0$, y la condición $y(1) = 1$, porque $1^{(3)} = 1^{(5)} = \ldots = 0$. Por otra parte , para cada número natural x (por ejemplo $x = p > 1$), la serie (7.6) termina y se convierte en un polinomio numérico , puesto que todas las potencias factoriales decrecientes de p , mayores que p , son identicamente nulas 1/ . Por lo tanto la serie (7.6) de potencias factoriales decrecientes es la solución de la ecuación de diferencias finitas (7.1) . Así mismo , la serie (7.5) constituye la solución de la ecuación sumatoria (7.3) .

1/ Por esta misma razón la serie (7.5) converge uniformemente en los enteros positivos .

La solución hallada puede describirse en la siguiente tabla

x	$y(x)$	$\Delta y(x)$	$\Delta^2 y(x) = u(x)$
0	0	1	0
1	1	1	a^2
2	2	$1 + a^2$	$2a^2$
3	$3 + a^2$	$1 + 3a^2$	$3a^2 + a^4$
4	$4 + 4a^2$	$1 + 6a^2 + a^4$	$4a^2 + 4a^2$
5	$5 + 10a^2 + a^4$	$1 + 10a^2 + 5a^4$	$5a^2 + 10a^4 + a^6$
...	.....	.....	....
...	.....	.....	.....

8º Como el ejemplo anterior podrían aducirse mucho más a título ilustrativo. La idea que aquí se subraya es la posibilidad de convertir una ecuación en diferencias finitas en ecuación sumatoria y el gran interés que tiene el estudio de las ecuaciones sumatorias, que aún son tan poco conocidad. En cuanto a los métodos de resolver ecuaciones sumatorias, serán motivo de otros ensayos que el autor espera presentar en esta misma publicación.

BIBLIOGRAFIA

1. BACHELDER, Paul M. An Introduction to Linear Difference Equations, Dover, New York, 1967, pp. 209

2. BOOLE, GEORGE. A treatise on the calculus of finite differences, 2 ed. Dover, New York, pp. 336

3. GOLDBERG Samuel Introduction to Difference Equations, 1 ed. Johm Wiley, New York, 1958, pp. 260

4. HAMMING Ricard W. Numerical Methods for Scientists and Engineers. Mc Graw Hill-Kogakusha, Tokyo, 1962, pp. 350

5. JORDAN Charles. Calculus of Finite Differences. New York, Chelsea, c-1965, pp. 654

6. LEVY H. Finite Difference Equations, MacMillan, New York, 1961, pp. 278

7. LOVITT William V. Linear integral equations. Dover, New York, 1950, pp. 253

8. MINEUR Henri, Techniques de l'Analyse Numérique, Librairie Ch Béranger, París, Liege, 1952, pp. 624

9. NAVARRO Borrás F. Conferencias sobre la teoría de las ecuaciones integrales (lineales y no-lineales). Madrid, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1942, pp. 184

10. POVEDA R. Gabriel, Fórmulas Sumatorias, Revista de la Universidad Industrial de Santander, 5 (I) : 319-323, 1963

11. POVEDA R. Gabriel, Sumaciones Sucesivas. Revista de la Universidad Industrial de Santander, Vol 8, No. 1, pp. 91-94, Enero - Julio, 1966, 8 (1) :

Recibido en Agosto de 1969