Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen IV (1970), págs. 51 - 67

UNA REPRESENTACION DE LA TRANSFORMACION DE HANKEL

por

Yu TAKEUCHI

§ 0 Introducción

Para la demostración de la fórmula inversa de Hankel se usa generalmente un método análogo a la demostración del teorema de Fourier - Plancherel [3], [2], [4]. *En este trabajo, primero se demuestra que el espacio lineal determinado por el sistema de funciones* $\{e^{-kx}, k=1,2,\ldots\}$ *es denso en* $L_2(0,\infty)$, *y se construye una base del espacio* L_2, $\{\phi_n(x), n=1,2,\ldots\}$ *por el método de Schmidt, donde* $\phi_n(x)$ *es una combinación lineal de* $e^{-x}, e^{-2x}, \ldots, e^{-nx}$:

$$\phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} E_{n,k}\, e^{-kx} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Se puede determinar los coeficientes $E_{n,k}$ *utilizando la propiedad ortogonal de los polinomios de Jacobi, así*

$$E_{n,k} = (-1)^{k-1}\sqrt{2n}\,\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\;k!\;(n-k)!}.$$

De la misma forma, se demuestra que el espacio lineal determinado por el sistema de funciones $\{(1/2k)\exp.(-x/4k), k=1,2,\ldots\}$ *es denso en* $L_2(0,\infty)$ *y se construye otra base del espacio* L_2, $\{\psi_n(x)\}$. *Pero tenemos*

$$(e^{-nx}, e^{-kx}) = (\frac{1}{2n}e^{-x/4n}, \frac{1}{2k}e^{-x/4k}) \qquad \text{para todo } n,k$$

entonces los coeficientes de $\psi_n(x)$ *son iguales a los coeficientes de* $\phi_n(x)$, *o sea*

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} E_{n,k}\frac{1}{2k}e^{-x/4k} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Como los dos tipos de funciones exponenciales e^{-kx}, $(1/2k)\,e^{-x/4k}$ *están relacionadas por la transformación integral de Hankel* [7] [12] *entonces las dos bases* $\{\phi_n\}$, $\{\psi_n\}$ *están ligadas por la transformación, así se demuestra que la transformación de Hankel es un operador unitario en el espacio* L_2.

§ 1 Algunas propiedades de los sistemas de funciones en $L_2(0,\infty)$.

Lema 1.

Sea $\lambda(x)$ medible en $[0, \infty)$ tal que $|\lambda(x)|$, $1/|\lambda|$ sean acotadas en cualquier intervalo acotado. Sea $\{\phi_n(x)\}$ un sistema de funciones en $L_2(0,\infty)$ tal que $\lambda\phi_n \in L_2(0,\infty)$ para todo n, entonces el sistema $\{\phi_n\}$ determina un subespacio lineal denso en L_2 si y solo si el sistema $\{\lambda\phi_n\}$ determina un subespacio lineal denso en L_2.

Demostración

Dada $f \in L_2$ dado cualquier ϵ (>0) existe N tal que

$$\int_N^\infty |f(x)|^2 \, dx < (\epsilon/2)^2 .$$

Sea

$$f_1(x) = f(x) \quad (x < N), \qquad f_1(x) = 0 \quad (x \geqslant N)$$

entonces

$$\| f - f_1 \| < \epsilon/2 . \tag{1}$$

i) Supongamos que $\{\phi_n\}$ determina un subespacio lineal denso en L_2. Como f_1/λ pertenece a $L_2(0,\infty)$ entonces existe una combinación lineal de ϕ_n tal que

$$\| f_1/\lambda - \sum_{k=1}^n A_k \phi_k \| < \epsilon/2M$$

donde

$$M = \sup_{x\in[0,N]} |\lambda(x)| .$$

Multiplicando por λ se tiene :

$$\| f_1 - \sum_{k=1}^n A_k \lambda \phi_k \| < \frac{\epsilon}{2M} \cdot M = \epsilon/2 . \tag{2}$$

De (1) y (2) tenemos :

$$\| f - \sum_{k=1}^n A_k (\lambda \phi_k) \| < \epsilon ,$$

o sea que $\{\lambda\phi_k\}$ determina un subespacio lineal denso en L_2.

ii) Supongamos que $\{\lambda\phi_n\}$ determina un subespacio lineal denso en L_2. Como $f_1\lambda$ pertenece a L_2, entonces existe una combinación lineal de $\lambda\phi_k$ tal que

$$\| f_1 \lambda - \sum_{k=1}^n B_k (\lambda\phi_k) \| < \epsilon/2M'$$

donde $M' = \sup_{x\in[o,1]} | 1/\lambda(x)|$. *Dividiendo por* λ *tenemos*

$$\| f_1 - \Sigma_{k=1}^{n} B_k \phi_k \| < \frac{\epsilon}{2M'} M' = \epsilon/2 . \qquad (3)$$

De (1) y (3) se tiene que el sistema $\{\phi_k\}$ *determina un subespacio lineal denso en* L_2.

Lema 2.

Sea μ *una función medible, estrictamente creciente y derivable tal que*

$$\mu(0) = 0 \ , \quad \mu(+\infty) = +\infty .$$

Si $\{\phi_n , n = 1,2,\ldots\}$ *es un sistema ortonormal completo en* $L_2(0,\infty)$ *entonces el sistema :*

$$\{ \phi_n(\mu(x)) \sqrt{\mu'(x)} \quad , n = 1, 2, 3, \ldots \}$$

también lo es.

Demostración

i) $\displaystyle\int_0^\infty \phi_n(\mu(x)) \sqrt{\mu'(x)} \ \overline{\phi_k(\mu(x))} \sqrt{\mu'(x)} \ dx$

$$= \int_0^\infty \phi_n(\mu(x)) \ \overline{\phi_k(\mu(x))} \ \mu'(x) \ dx = \int_0^\infty \phi_n(t) \ \overline{\phi_k(t)} \ dt = \delta_{n,k} .$$

ii) Sea $f(x) \in L_2(0,\infty)$ *entonces*

$$\int_0^\infty | f(x)|^2 \ dx < +\infty .$$

Sea ν *la función inversa de* μ *, entonces haciendo un cambio de variable* $x = \nu(t)$ *(es decir* $t = \mu(x)$ *) tenemos :*

$$\int_0^\infty | f(\nu(t))|^2 \ \nu'(t) \ dt < +\infty ,$$

esto es :

$$f(\nu(t)) \sqrt{\nu'(t)} \in L_2(0,\infty) .$$

Luego, podemos desarrollar $f(\nu(t))\cdot\sqrt{\nu'(t)}$ *como sigue :*

$$f(\nu(t)) \sqrt{\nu'(t)} = \Sigma_{k=1}^{\infty} A_k \ \phi_k(t) \qquad (4)$$

donde $\Sigma_{k=1}^{\infty} |A_k|^2 < +\infty$.

En (4) reemplazando $\nu(t) = x$ *tenemos :*

$$f(x)\,\frac{1}{\sqrt{\mu'(x)}} = \Sigma_{k=1}^{\infty} A_k\, \phi_k(\mu(x))$$

ya que $t = \mu(x)$, $\nu'(t) = 1/\mu'(x)$. *Multiplicando por* $\sqrt{\mu'(x)}$ *se tiene*

$$f(x) = \Sigma_{k=1}^{\infty} A_k\, \phi_k(\mu(x))\, \sqrt{\mu'(x)}\,, \tag{5}$$

esto nos demuestra que $\{\, \phi_k(\mu(x))\sqrt{\mu'(x)}\ ,\ k = 1, 2, \ldots \}$ *es un sistema completo .*

Corolario

Si $\{\phi_n(x)\}$ *es un sistema ortonormal completo , entonces los siguientes sistemas también lo son :*

i) $\{\phi_n(x^2)\sqrt{2x}\}$ ii) $\{\, a\,\phi_n(a^2 x)\}$ $(a > 0)$.

§ 2. El sistema de las funciones e^{-nx} , $n = 1, 2, \ldots$.

Teorema 1

Las funciones e^{-x} , $e^{-2x}, \ldots , e^{-nx}$, ... *determinan un subespacio lineal denso en* $L_2(0, \infty)$.

Demostración

Dada una función $f \in L_2(0, \infty)$ *y dado un* $\epsilon > 0$ *existe* $f_1(x)$ [6] [4]

$$f_1(x) = p_m(x)\, e^{-x} \ , \qquad p_m(x) = a_o + a_1 x + \ \ldots \ + a_m x^m$$

tal que

$$\| f - f_1 \| \leqslant \epsilon/2 \,.$$

Sea

$$q_m(x) = |a_o| + |a_1|\, x + \ldots + |a_m|\, x^m$$

entonces existe B tal que

$$\int_B^{\infty} \{q_m(x)\}^2 e^{-2x}\, dx < \epsilon^2/32 \tag{6}$$

En el intervalo $[0, B]$, $p_m(x)$ *es continua uniformemente , entonces existe* δ *tal que*

$$|x - x'| < \delta \qquad \text{implica} \qquad |p_m(x) - p_m(x')| < \epsilon/32 . \tag{7}$$

Ahora , consideramos el siguiente cambio de variable :

$$1 - e^{-x} = y \qquad (x \geqslant 0\ ,\ 0 \leqslant y < 1)$$

entonces

$$x = -\log(1-y) = y + \frac{y^2}{2} + \dots + \frac{y^n}{n} + R$$

donde

$$R = \int_0^y \frac{y^n}{1-y}\, dy \qquad (\#)$$

(#) *Nota :*

$$1 + y + \dots + y^{n-1} = \frac{1-y^n}{1-y}$$

$$-\log(1-y) = \int \frac{1}{1-y}\, dy = y + \dots + \frac{y^n}{n} + \int \frac{y^n}{1-y}\, dy$$

* * * * * * * *

Si $y \leqslant y_o = 1 - e^{-B} < 1$ *entonces*

$$|R| \leqslant \int_o^y \frac{y^n}{1-y_o}\, dy \leqslant \frac{1}{1-y_o} \int_o^{y_o} y^n\, dy = \frac{1}{1-y_o} \frac{(y_o)^{n+1}}{n+1}.$$

Como y_o *es menor que* 1 *existe n tal que*

$$\frac{1}{1-y_o} \frac{(y_o)^{n+1}}{n+1} < \delta$$

entonces tenemos (por (7)) :

$$\left| p_m(x) - p_m\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y^k}{k} \right) \right| < \epsilon/2 \tag{8}$$

La siguiente función :

$$g(x) = p_m\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y^k}{k} \right) = p_m\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-e^{-x})^k}{k} \right)$$

es una combinación lineal de

$$1,\ e^{-x},\ e^{-2x}, \dots,\ e^{-nmx}.$$

Tenemos

$$\int_o^\infty |p_m(x) - g(x)|^2\, e^{-2x}\, dx$$

$$= \int_o^B |p_m(x) - g(x)|^2\, e^{-2x}\, dx + \int_B^\infty |p_m(x) - g(x)|^2\, e^{-2x}\, dx. \tag{9}$$

Pero

$$|g(x)| = \left| p_m\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y^k}{k} \right) \right| \leqslant q_m\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{y^k}{k} \right) \leqslant q_m(x)$$

entonces

$$2\, q_m(x) = 2\, |q_m(x)| \geqslant |p_m(x)| + |g(x)| \geqslant |\, p_m(x) - g(x)\, | ,$$

por lo tanto se tiene la siguiente desigualdad :

$$\int_B^\infty |p_m(x) - g(x)\,|^2\, e^{-2x}\, dx \leqslant 4 \int_B^\infty \{\, q_m(x)\, \}^2\, e^{-2x}\, dx < \epsilon^2/8\, . \tag{10}$$

Por otra parte , de (8) tenemos

$$\int_o^B |p_m(x) - g(x)\,|^2\, e^{-2x}\, dx \leqslant (\epsilon^2/4) \int_o^B e^{-2x}\, dx \leqslant (\epsilon^2/8)\, . \tag{11}$$

De (9) , (10) y (11) tenemos :

$$\int_o^\infty |p_m(x) - g(x)\,|^2\, e^{-2x}\, dx < \frac{\epsilon^2}{8} + \frac{\epsilon^2}{8} = \frac{\epsilon^2}{4}$$

o sea que

$$\|\, f_1 - g(x)\, e^{-x}\, \| = \|\, p_m(x)\, e^{-x} - g(x)\, e^{-x}\, \| < \epsilon/2\, . \qquad \blacksquare \tag{12}$$

Nota.

Profesor Juan Jorvath (Universidad de Maryland) me mandó la siguiente demostración sencilla del teorema .

Las funciones f continuas que se anulan para x grande forman un conjunto denso en $L_2(0, \infty)$. Sea luego f una tal función con $f(x) = 0$ para $x > a$. Pongamos

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(-\log t\,)}{t} & si \quad \beta \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & si \quad 0 \leqslant t \leqslant \beta \end{cases}$$

donde $\beta = -\log a$. Por el teorema de Weierstrass existe para $\epsilon > 0$ un polinomio $\Sigma\, a_n\, t^n$ tal que $|\, F(t) - \Sigma\, a_n\, t^n\, | < \epsilon$ y además se puede tomar $a_o = 0$. Entonces

$$\int_o^\infty |f(x) - \Sigma\, a_n\, e^{-(1+n)x}\, |^2\, dx = \int_o^1 |\, f(-\log t\,) - \Sigma\, a_n\, t^{n+1}\, |^2\, \frac{dt}{t}$$

$$= \int_o^1 |\, F(t) - \Sigma\, a_n\, t^n\, |^2\, t\, dt \leqslant \epsilon^2 \int_o^1 t\, dt = \epsilon^2/2\, .$$

A partir del sistema $e^{-x}, e^{-2x}, \ldots, e^{-nx} \ldots$ *por el método de Schmidt se puede construir un sistema ortonormal completo* $\{\phi_n(x), n = 1,2,\ldots\}$:

$$(\phi_n, \phi_k) = \int_0^\infty \phi_n(x)\,\phi_k(x)\,dx = \delta_{n,k}$$

donde $\phi_n(x)$ *es una combinación lineal de* $e^{-x}, e^{-2x}, \ldots, e^{-nx}$, *digamos*

$$\phi_n(x) = E_{n,1}\,e^{-x} + E_{n,2}\,e^{-2x} + \ldots + E_{n,n}\,e^{-nx} \tag{13}$$

Ahora, vamos a encontrar los valores de $E_{n,k}$.

Sean $G_n(2,2,t) = F(n+2, -n, 2, t)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *los polinomios de Jacobi, entonces sabemos la siguiente relación ortogonal :* [8][11][10]

$$\int_0^1 t\,\{G_{n-1}(t)\,G_{k-1}(t)\}\,dt = \frac{1}{2n^3}\,\delta_{n,k}\,.$$

Haciendo el cambio de variable $t = e^{-x}$ *se tiene :*

$$\int_\infty^0 e^{-x}\,G_{n-1}(e^{-x})\,G_{k-1}(e^{-x})\,(-e^{-x})\,dx = (1/2n^3)\,\delta_{n,k}$$

o

$$\int_0^\infty \{e^{-x}\,G_{n-1}(e^{-x})\}\{e^{-x}\,G_{k-1}(e^{-x})\}\,dx = \frac{1}{2n^3}\,\delta_{n,k}\,. \tag{14}$$

Como $e^{-x}G_{n-1}(e^{-x})$ *es una combinación lineal de* $e^{-x}, e^{-2x}, \ldots, e^{-nx}$, *entonces tenemos la siguiente identidad :*

$$\phi_n(x) = e^{-x}\,G_{n-1}(e^{-x})\sqrt{2n^3} = \sqrt{2n^3}\,e^{-x}\,F(n+1, -n+1, 2, e^{-x}). \tag{15}$$

Utilizando la expresión explícita de los polinomios de Jacobi, tenemos

$$\phi_n(x) = \sqrt{2n^3}\,\Big\{ e^{-x} - \frac{n^2-1^2}{2(1!)^2}\,e^{-2x} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{3(2!)^2}\,e^{-3x}$$

$$\frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)(n^2-3^2)}{4(3!)^2}\,e^{-4x} + \ldots + (-1)^{n-1}\,\frac{(n^2-1^2)\ldots\{n^2-(n-1)^2\}}{n\,\{(n-1)!\}^2}\,e^{-nx}\Big\} \tag{16}$$

Entonces, tenemos los coeficientes de la combinación como sigue :

$$E_{n,1} = \sqrt{2n^3}\,, \quad E_{n,2} = -\sqrt{2n^3}\,\frac{n^2-1^2}{2(1!)^2}\,, \ldots\ldots\ldots$$

En general

$$E_{n,k} = (-1)^{k-1} \sqrt{2n^3} \frac{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-(k-1)^2)}{k\,((k-1)!\,)^2}$$

$$= (-1)^{k-1} \sqrt{2n} \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!\;k!\;(n-k)!} . \tag{17}$$

En la tabla 1 se muestra algunos valores de $E_{n,k}$.

TABLA 1

n \ k	1	2	3	4	5	6
1	$\sqrt{2}$					
2	4	-6				
3	$3\sqrt{6}$	$-12\sqrt{6}$	$10\sqrt{6}$			
4	$8\sqrt{2}$	$-60\sqrt{2}$	$120\sqrt{2}$	$-70\sqrt{2}$		
5	$5\sqrt{10}$	$-60\sqrt{10}$	$210\sqrt{10}$	$-280\sqrt{10}$	$126\sqrt{10}$	
6	$12\sqrt{3}$	$-210\sqrt{3}$	$1120\sqrt{3}$	$-2520\sqrt{3}$	$2520\sqrt{3}$	$-924\sqrt{3}$

También, se puede demostrar inmediatamente que $\phi_n(x)$ *satisface la siguiente ecuación diferencial :*

$$(e^x - 1)\frac{d^2 \phi_n}{dx^2} + e^x \frac{d\phi_n}{dx} + n^2 \phi_n = 0 \tag{18}$$

§ 3. El sistema de las funciones $e^{-x/k}$, $k = 1,2,\ldots$.

Teorema 2

Las funciones

$$e^{-x/2}\, e^{-x},\quad e^{-x/2}\, e^{-x/2},\ \ldots\ldots,\ e^{-x/2}\, e^{-x/k},\ \ldots\ldots$$

determinan un subespacio lineal denso en $L_2(0,\infty)$.

Demostración

Sabemos que las siguientes funciones :[5][10]

$$u_n(x) = L_n(x)\, e^{-x/2} \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

donde $L_n(x)$ *es el polinomio de Laguerre de grado* n ,

forman un sistema ortonormal completo en $L_2(0, \infty)$. *Sea*

$$f_k(x) = e^{-x/2}\, e^{-x/k} = \sum_{n=o}^{\infty} a_n^{(k)}\, u_n(x) \tag{19}$$

entonces

$$a_n^{(k)} = (f_k\, ,\, u_n) = \int_o^{\infty} L_n(x)\ exp\{-(x + \frac{x}{k})\}\ dx\ .$$

Utilizando la relación conocida :[5] [7]

$$\frac{1}{1 - t}\ exp\{ - \frac{xt}{1 - t} \} = \sum_{n=o}^{\infty} L_n(x)\ t^n$$

se tiene

$$\sum_{n=o}^{\infty} \int_o^{\infty} L_n(x)\ exp\{- x(1 + \frac{1}{k})\}\ dx\ t^n$$

$$= \frac{1}{1 - t} \int_o^{\infty} exp\{ - \frac{xt}{1 - t} \}\ exp\{ - x\,(1 + \frac{1}{k})\}\ dx$$

$$= \frac{k}{k + 1 - t} = \frac{k}{k+1}\ \frac{1}{1 - t/(k+1)} = \frac{k}{k+1} \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^n}\ t^n\ .$$

Por lo tanto :

$$a_n^{(k)} = \frac{k}{k+1} [\frac{1}{k + 1}]^n\ ,\quad k = 1, .2, \dots\ ,\ n = 0, 1, \dots \tag{20}$$

Sean

$$b^{(k)} = u_o + \frac{1}{k+1}\, u_1 + \dots + \frac{1}{(k+1)^n}\, u_n + \dots \in L_2\, . \tag{21}$$

Si $\mathfrak{M}$ *es el subespacio lineal determinado por el sistema* (21) *entonces*

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} b^{(k)} = u_o + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{\infty} \{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)^j}\}\ u_j \in \mathfrak{M}\, .$$

Pero :

$$\| \sum_{j=1}^{\infty} \{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)^j} \}\ u_j \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} \{ \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(k+1)^j} \}^2$$

$$\leqslant \frac{1}{N^2}\left\{\int_1^{N+1}\frac{1}{y}\,dy\right\}^2+\frac{1}{N^2}\sum_{j=2}^{\infty}\left\{\int_1^{\infty}\frac{1}{y^j}\,dy\right\}^2$$

$$=\frac{1}{N^2}\{\log(N+1)\}^2+\frac{1}{N^2}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{(j-1)^2}\ \to\ 0\quad (N\to\infty)\,,$$

esto es :

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} b^{(k)} \to u_o \ (\text{ en } L_2(0,\infty)\,) \text{ cuando } N\to\infty\,,$$

o sea que

$$u_o \in \mathfrak{M}.$$

Por un procedimiento análogo al anterior, se puede demostrar (por inducción) que

$$u_n \in \mathfrak{M} \quad \text{para todo } n\,,$$

esto es :

$$\overline{\mathfrak{M}} = L_o(0,\infty)\,.$$

Como

$$\frac{k+1}{k}f_k=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^n}\,u_n \qquad (\,k=1,2,\ldots\,)$$

entonces se concluye que el sistema $(f_k\,,\ k=1,2,3,\ldots)$ *determina un sub-espacio lineal denso en* $L_2(0,\infty)$.

Aplicando el lema 1 del parágrafo 1, tenemos inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 1

Las funciones $e^{-x/k}$ $(k=1,2,3,\ldots)$ *determinan un subespacio lineal denso en* $L_2(0,\infty)$.

Corolario 2

Las funciones $\frac{1}{2k}e^{-x/k}$, $k=1,2,3,\ldots$ *determinan un subespacio lineal denso en* $L_2(0,\infty)$.

Demostración inmediata. ■

Aplicando el método de Schmidt al sistema de funciones del corolario 2 se obtiene un sistema ortonormal completo $\{\psi_k(x)\}$:

$$(\psi_n, \psi_k) = \int_0^\infty \psi_n(x)\, \psi_k(x)\, dx = \delta_{n,k}$$

donde $\psi_n(x)$ *es una combinación lineal de* $\frac{1}{2k} e^{-x/4k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.
Pero , observando las siguientes relaciones :

$$\left(\frac{1}{2k} e^{-x/4k}, \frac{1}{2n} e^{-x/4n}\right) = \frac{1}{4nk} \int_0^\infty exp\{-x(\frac{1}{4n} + \frac{1}{4k})\}\, dx = \frac{1}{k+n},$$

$$(e^{-kx}, e^{-nx}) = \int_0^\infty e^{-x(k+n)}\, dx = \frac{1}{k+n},$$

se ve inmediatamente que los coeficientes de la combinación para formar $\psi_n(x)$ *son iguales a los coeficientes de la combinación para* $\phi_n(x)$ *obtenidos en (17), o sea que*

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} E_{n,k} \frac{1}{2k} e^{-x/4k} \tag{22}$$

§ 4. Una representación de la transformación integral de Hankel

Sean $\{\Phi_n(x)\}$, $\{\Psi_n(x)\}$ *dos sistemas ortonormales completos definidos por*

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= \sqrt{2x}\; \phi_n(x^2) = \sqrt{2x} \sum_{k=1}^{n} E_{n,k}\, e^{-kx^2} \\ \Psi_n(x) &= \sqrt{2x}\; \psi_n(x^2) = \sqrt{2x} \sum_{k=1}^{n} E_{n,k} \frac{1}{2k} e^{-x^2/4k} \end{aligned} \tag{23}$$

donde $\{\phi_n\}$ $\{\psi_n\}$ *son los sistemas construidos en los parágrafos anteriores y* $E_{n,k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n\,;\ n = 1, 2, \ldots)$ *son constantes dadas en (17) .*

De la siguiente fórmula conocida :[7] [9] [12] [13]

$$\int_0^\infty e^{-ky^2} J_o(xy)\, y\, dy = \frac{1}{2k} e^{-x^2/4k} \tag{24}$$

se tiene inmediatamente que

$$\int_0^\infty \{e^{-ky^2} \sqrt{y}\}\, J_o(xy) \sqrt{xy}\, dy = \frac{1}{2k} e^{-x^2/4k} \sqrt{x},$$

luego

$$\int_0^\infty \Phi_n(x)\ J_o(xy)\sqrt{xy}\ dy = \Psi_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Esto es, la transformación de Hankel $H : f \to Hf = F$ *dada por la integral*

$$H f = F(x) = \int_0^\infty J_o(xy)\sqrt{xy}\ f(y)\ dy \tag{25}$$

transforma el sistema $\{\Phi_n\}$ *en el sistema* $\{\Psi_n\}$:

$$H\,\Phi_n = \Psi_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

por lo tanto H *es un operador unitario. Además, si reeemplazamos en (24)* k *por* $1/4k$ *entonces tenemos :*

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{2k}\ e^{-y^2/4k}\sqrt{y}\right] J_o(xy)\sqrt{xy}\ dy = e^{-kx^2}\sqrt{x},$$

esto implica que :

$$H\,\Psi_n = \int_0^\infty \Psi_n(y)\ J_o(xy)\sqrt{xy}\ dy = \Phi_n(x) \qquad (n = 1,2,3, \ldots).$$

Esto es :

$$H^{-1}\ \Phi_n = \Psi_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

o sea

$$H^{-1} = H. \tag{26}$$

Por lo tanto, se obtiene la fórmula inversa de Hankel :

$$\begin{aligned} H f &= F(x) = \int_0^\infty J_o(xy)\sqrt{xy}\ f(y)\ dy \\ H F &= H^{-1} F = f(y) = \int_0^\infty J_o(xy)\sqrt{xy}\ F(x)\ dx. \end{aligned} \tag{27}$$

Nota : *La integral impropia (24)* **converge absolutamente**, *luego el operador* H *en (27) está definido en el subespacio lineal determinado por* $\{\Phi_n\}$ *(o por* $\{\Psi_n\}$*), pero el sistema* $\{\Phi_n\}$ *es completo y por la propiedad unitaria de* H *se puede extender* H *al espacio total* $L_2(0, \infty)$.

§ 5. Convergencia de la integral de Hankel

Sea $f \in L_2(0,\infty)$ *tal que la integral impropia :*

$$H f = \int_0^\infty J_o(xy)\sqrt{xy}\ f(y)\ dy$$

converge absolutamente .

Primero , vamos a demostrar que el operador H *es acotado .*

Dividiendo el intervalo $[0, \infty)$ *en dos partes* $[0, R/x]$ *y* $[R/x, \infty)$ *con* R *fijo, tenemos :*

$$\left\| \int_0^\infty J_0(xy)\sqrt{xy}\, f(y)\, dy \right\|$$

$$\leqslant \left\| \int_0^{R/x} J_0(xy)\sqrt{xy}\, f(y)\, dy \right\| + \left\| \int_{R/x}^\infty J_0(xy)\sqrt{xy}\, f(y)\, dy \right\| . \qquad (28)$$

i) Si $y \leqslant R/x$ (*o* $xy \leqslant R$) *existe una constante* C *tal que*

$$| J_0(xy)\sqrt{xy} | \leqslant C\sqrt{xy},$$

luego tenemos

$$\left\| \int_0^{R/x} J_0(xy)\sqrt{xy}\, f(y)\, dy \right\|^2 \leqslant C^2 \int_0^\infty x \left\{ \int_0^{R/x} \sqrt{y}\, |f(y)|\, dy \right\}^2 dx$$

$$\leqslant C^2 \int_0^\infty x \left\{ \int_0^{R/x} 1\, dy \int_0^{R/x} y\, |f(y)|^2\, dy \right\} dx = C^2 R \int_0^\infty \int_0^{R/x} y\, |f(y)|^2\, dy\, dx$$

$$= C^2 R \int_0^\infty \left\{ \int_0^{R/y} dx\; y\, |f(y)|^2 \right\} dy = C^2 R^2 \int_0^\infty |f(y)|^2\, dy = C^2 R^2 \|f\|^2$$

o sea

$$\left\| \int_0^{R/x} J_0(xy)\sqrt{xy}\, f(y)\, dy \right\| \leqslant C R \|f\| . \qquad (29)$$

ii) Si $y \geqslant R/x$ (*o* $xy \geqslant R$) *aplicando la fórmula asintótica de la función de Bessel tenemos :* [9] [11] [13]

$$J_0(xy)\sqrt{xy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(xy - \frac{\pi}{4} \right) + \Delta(x, y) \qquad (30)$$

donde

$$\Delta(x,y) = O(1/xy) .$$

Entonces existe una constante M *tal que*

$$\left\| \int_{R/x}^\infty J_0(xy)\sqrt{xy}\, f(y)\, dy \right\|$$

$$\leqslant \left\| \int_{R/x}^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(xy - \frac{\pi}{4}\right) f(y)\, dy \right\| + \left\| \int_{R/x}^\infty \frac{M}{xy} f(y)\, dy \right\|$$

$$\leqslant \left\| \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(xy - \frac{\pi}{4}\right) f(y)\, dy \right\| + \left\| \int_0^{R/x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(xy - \frac{\pi}{4}\right) f(y)\, dy \right\|$$

$$+ \left\| \int_{R/x}^\infty \frac{M}{xy} f(y)\, dy \right\| . \qquad (31)$$

Pero

$$\left\| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(xy - \pi/4)\, f(y)\, dy \right\|$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\| \int_0^\infty \cos(xy\, f(y)\, dy \right\| + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\| \int_0^\infty \operatorname{sen} xy\ f(y)\, dy \right\|$$

$$\leqslant 2\sqrt{2}\, |f|| \quad \textit{(por el teorema de Fourier Plancherel)}. \qquad (32)$$

iii)

$$\left\| \int_0^{R/x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(xy - \pi/4)\, f(y)\, dy \right\|^2 \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_0^{R/x} |f(y)|\, dy \right\}^2 dx$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_0^{R/x} y^{-1/2}\, dy \int_0^{R/x} y^{1/2}\, |f(y)|^2\, dy \right\} dx$$

$$= \frac{4\sqrt{R}}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{R/x} y^{1/2}\, |f(y)|^2\, dy$$

$$= \frac{4\sqrt{R}}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_0^{R/y} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \right\} y^{1/2}\, |f(y)|^2\, dy$$

$$= \frac{8R}{\pi} \int_0^\infty |f(y)|^2\, dy = \frac{8R}{\pi} \|f\|^2 .$$

O sea

$$\left\| \int_0^{R/x} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(xy - \pi/4)\, f(y)\, dy \right\| \leqslant 2\sqrt{\frac{2R}{\pi}} \|f\| . \qquad (33)$$

iv)

$$\left\| \int_{R/x}^\infty \frac{M}{xy} f(y)\, dy \right\|^2 \leqslant \int_0^\infty \left\{ \int_{R/x}^\infty \frac{M}{xy} f(y)\, dy \right\}^2 dx$$

$$\leqslant \int_0^\infty \left[\frac{M^2}{x^2} \int_{R/x}^\infty y^{-3/2}\, dy \int_{R/x}^\infty y^{-1/2}\, |f(y)|^2\, dy \right] dx$$

$$= \int_o^\infty \left\{ \frac{2M^2}{\sqrt{R}} x^{-3/2} \int_{R/x}^\infty y^{-1/2} |f(y)|^2 \, dy \right\} dx$$

$$= \int_o^\infty \left\{ \int_{R/y}^\infty \frac{2M^2}{\sqrt{R}} x^{-3/2} \, dx \right\} y^{-1/2} |f(y)|^2 \, dy$$

$$= \frac{4M^2}{R} \int_o^\infty |f(y)|^2 \, dy = \frac{4M^2}{R} \|f\|^2$$

o

$$\left\| \int_{R/x}^\infty \frac{M}{xy} f(y) \, dy \right\| \leqslant \frac{2M}{\sqrt{R}} \|f\| . \tag{34}$$

De (28), (29), (31), (32), (33) y (34) tenemos

$$\left\| \int_o^\infty J_o(xy) \sqrt{xy} \, f(y) \, dy \right\| \leqslant \left(CR + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{\frac{2R}{\pi}} + \frac{2M}{\sqrt{R}}\right) \|f\| = C_o \|f\| . \tag{35}$$

Ahora, consideremos cualquier elemento f *de* $L_2(0,\infty)$, *entonces* f *es desarrollable como sigue :*

$$f = \sum_{k=1}^\infty A_k \Phi_k , \quad \sum_{k=1}^\infty |A_k|^2 = \|f\|^2 < +\infty .$$

La transformada de Hankel de f *es entonces :*

$$H f = \sum_{k=1}^\infty A_k \, H \Phi_k = \sum_{k=1}^\infty A_k \Psi_k . \tag{36}$$

Dado ϵ *existe* n *tal que*

$$\left\| H f - \sum_{k=1}^n A_k \Psi_k \right\| = \left\{ \sum_{k=n+1}^\infty |A_k|^2 \right\}^{1/2} < \mathrm{Min}\,(\epsilon/3 , \epsilon/3C_o)$$

donde C_o *es una constante cota del operador* H .

Sean $g(x) = \sum_{k=1}^n A_k \Phi_k$

$$g_m(x) = \sum_{k=1}^n A_k \Phi_k \quad \text{si} \quad x \leqslant m$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad x > m .$$

entonces existe M_o *tal que*

$$m > M_o \qquad \text{implica} \qquad \|g - g_m\| < \epsilon/3C_o$$

luego

$$\|Hg - Hg_m\| = \|H(g - g_m)\| \leqslant C_o \|g - g_m\| < \epsilon/3 .$$

Sea

$$\begin{aligned} f_m(x) &= f(x) \qquad && si \quad x \leqslant m \\ &= 0 && si \quad x > m \, , \end{aligned}$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} \| Hf - Hf_m \| &\leqslant \| Hf - Hg \| + \| Hg - Hg_m \| + \| Hg_m - Hf_m \| \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + C_o \| g_m - f_m \| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \qquad (37) \end{aligned}$$

ya que

$$\| g_m - f_m \| \leqslant \|g - f\| = \{ \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k|^2 \}^{1/2} < \epsilon/3C_o .$$

De (37) se tiene el siguiente resultado :

$$Hf = \underset{m \to \infty}{l.i.m.} \; Hf_m = \underset{m \to \infty}{l.i.m.} \int_0^m J_0(xy) \sqrt{xy} \; f(y) \, dy \qquad (38)$$

§6. Representación matricial de la transformación de Hankel

De (23) del parágrafo 4 tenemos

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= (\Phi_n(x) \, , \Psi_k(x) \,) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} E_{n,i} \, E_{k,j} \, \frac{1}{2j} \int_0^{\infty} e^{-ix^2} \exp\{ -\frac{x^2}{4j} \} \, 2x \, dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{2}{1 + 4ij} \, E_{n,i} \, E_{k,j} \\ &= 4\sqrt{nk} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{i+j} \frac{(n+i-1)! \, (k+j-1)!}{(1+4ij)! \, (i-1)! \, i! \, (j-1)! \, (n-i)! \, (k-j)!} \qquad (39) \end{aligned}$$

$H = (a_{n,k})$ *es una representación matricial de la transformación integral de Hankel con respecto a la base* $\{ \Phi_n \}$ *(o* $\{ \Psi_n \}$ *).*

Tabla 2 $(a_{n,k})$

k \ n	1	2	3	4
1	0.8000	0.3770	0.2486	0.1858
2	0.3770	-0.0314	-0. 1034	-0.7662
3	0.2486	-0.1034	-0.1358	-0. 1340
4	0.1858	-0.7662	-0.1340	-0.0598

REFERENCIAS

[1] Frank M Cholewinski : A Hankel Convolution Complex Inversion Theory, Memoris of the Am. Math. Soc. , Providence , 1965

[2] M.H.Stone : Lineal Transformations in Hilbert Space, Am.Math Soc. New York, 1936

[3] Ian Sneddon : Fourier Transforms ,McGraw Hill , New York 1951

[4] F.Riesz,Nagy : Functional Analysis , Frederich Ungar Pub.Co. NewYork, 1955

[5] Titchmarsh E.C. : Eigenfunction Expansions ,Oxford Uni. Press, 1962

[6] Takeuchi Yu : Espacio de Hilbert ,Universidad Nal de Colombia,Bogotá 1967

[7] Yoshida K. Breviario de Matemáticas Aplicadas ,Marzen,Tokyo ,1958

[8] Whittaker,Watson : Modern Analysis ,Cambridge Uni.Press,1935

[9] Rey Pastor : Funciones de Bessel ,Dossat S.A., Madrid , 1958

[10] Sansone G. : Orthogonal Functions ,Interscience Pub. NewYork ,1959

[11] Erdely,Magnus,Tricomi : Higher Transcendental Functions ,McGrauHill, NewYork,1953

[12] Luke Y. : Integrals of Bessel Functions , MacGrauHill,NewYork,1962

[13] Watsons G.N. : Theory of Bessel Functions , Cambridge Uni.Press, Cambridge, 1960

[14] Gérard P. : La Theorie des Fonctions de Bessel ,Centre National de la Recherche Scientifique, Paris , 1955

[15] Bracewell R.:The Fourier Transform and Aplications ,MacGrauHill, NewYork,1965