Revista Colombiana de Matemáticas
Volúmen V (1971) págs. 1 - 9

ECUACIONES OPERACIONALES Y ECUACIONES DIFERENCIALES

por

GUILLERMO RESTREPO

I. Introducción.

Sea E un espacio de Banach y sea $T : E \to E$ un operador continuo. Para cada $y \in E$ defínase el operador

$$S(x) = T(x) - y \quad ; \tag{1}$$

entonces x es una solución de la ecuación

$$T(x) = y \tag{2}$$

si y solo si x es una solución de

$$S(x) = 0 \tag{3}$$

Supongamos que la ecuación diferencial

$$\dot{\varphi} = F(\varphi) \;, \quad \varphi(0) = x_0 \tag{4}$$

admita una solución $\varphi(t)$ definida para todo $t \geqslant 0$. Entonces podemos tratar de resolver (3) demostrando que existe una sucesión $\{ t_n \}$ que tiende a infinito, y tal que $\{ \varphi(t_n) \}$ converge a cierto x^* en E y $\{ S(\varphi(t_n)) \} \to 0$. En efecto, si tal es el caso, x^* sería una solución de (3) debido a la continuidad del operador S. En este artículo mostraremos cómo se puede utilizar esta idea general para demostrar la existencia de por lo menos una solución de la ecuación operacional $S(x) = 0$.

Queremos hacer notar que la idea de estudiar ecuaciones operacionales a partir del comportamiento asintótico de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales ha sido utilizada por varios autores. En particular, parece ser que R. Courant [1] fue el primero en usar dicho método. En [2] M. K. Gavurin considera ciertas ecuaciones diferenciales cuyas soluciones aparecen como el resultado de hacer continuos ciertos métodos iterativos tales como el método de Newton y el método de "Steepest Descent". Otros autores, Ficken [3] ó Meyer [4], construyen una ecuación diferencial a partir de una homotopía del operador S para demostrar la existencia de soluciones de $S(x) = 0$. Estos autores suponen, en general, que la derivada de Frechet $S'(x)$ existe, es invertible y que existe una constante m tal que $||(S'(x))^{-1}|| < m$ uniformemente. Por el contrario, en muchos de nuestros resultados, por ejemplo el teorema 3, las conclusiones se derivan de la existencia de una función de tipo Liapunov y de la monotonicidad del operador $S(x)$.

2. *Ecuaciones diferenciales en Espacios de Banach.*

El teorema siguiente puede encontrarse en [5; p 281]

TEOREMA 1. Sea Ω un subconjunto abierto del espacio de Banach E y sea $F: R \times \Omega \to E$ una función continua (R es el conjunto de los reales). Supóngase:

i) F es localmente acotada en $(t_o, x_o) \subset R \times \Omega$, esto es, F es acotada ı una vecindad de (t_o, x_o).

ii) F satisface una condición local de Lipschitz en (t_o, x_o), esto es, existe una constante $k > 0$ tal que $||F(t, x) - F(t, x')|| < k \, || x - x' ||$ para todo t en una vecindad de t_o y todo x, x' en una vecindad de x_o.

Entonces existe un intervalo abierto I que contiene a t_o y una función diferenciable $\varphi : I \to \Omega$ tal que

(5) $$\dot{\varphi} = F(t, \varphi(t)) \; ; \quad \varphi(t_o) = x_o$$

Diremos que $\varphi(t)$ es una ***solución local*** de la ecuación diferencial (5) con condición inicial $\varphi(t_o) = x_o$.

Las condiciones i) y ii) implican que toda solución local es única en el sentido siguiente. Si φ y Ψ son dos soluciones locales definidas en los intervalos I y J respectivamente, entonces $\varphi(t) = \Psi(t)$ para todo $t \in I \cap J$. En lo sucesivo indicaremos por $\varphi_x(t)$ la solución de (5) con condición inicial $\varphi_x(0) = x$ que supondremos definida para todo t en el máximo intervalo de existencia $[0, a)$.

Si E y F son dos espacios de Banach reales, se dice que $h: E \to F$ es diferenciable en x si existe una transformación lineal y acotada $h'(x): E \to F$ tal que

$$|| h(x+u) - h(x) - h'(x).u || \cdot ||u||^{-1} \to 0$$

cuando $||u|| \to 0$. Si $x \mapsto h'(x)$ es una transformación continua de E en el espacio $L(E, F)$ de las transformaciones lineales acotadas de E en F, diremos que h <u>*es de clase* C^1</u>. Si F es el conjunto de los reales, entonces $L(E, R) = E'$ es el espacio dual de E. Si $x \in E$ y $x' \in E'$ escribiremos $< x, x' >$ en vez de $x'(x)$.

<u>*TEOREMA 2.*</u> Sea E un espacio de Banach real y sea $F: E \to E$ un operador continuo. Supóngase que F satisface una condición de Lipschitz en cada punto y que F transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Suponemos, además, la existencia de una función escalar $L: E \to R$ de clase C^1, acotada inferiormente y tal que $L(x) \to \infty$ si $||x|| \to \infty$. Entonces, la condición $< F(x), L'(x) > < 0$ para todo x en E implica que toda solución $_x(t)$ de la ecuación diferencial (5) está definida para todo $t > 0$ y es acotada.

<u>*Demostración.*</u> Tanto el teorema como la demostración son rutinarios. Sea $[0, a)$ el máximo intervalo de existencia. Entonces la función $g(t) = L(\varphi(t))$ es decreciente ya que $g'(t) = < L'(\varphi(t)), F(\varphi(t)) > \leq 0$. Por tanto $\{\varphi(t)\}$ es un conjunto acotado, por ser L acotada inferiormente. Sean $u, v \subset [0, a)$ y supongamos que $u < v$. Entonces,

$$\varphi(v) - \varphi(u) = \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} (\varphi(\lambda v + (1-\lambda) u) \, d\lambda$$

$$\varphi(v) - \varphi(u) = (v-u) \int_0^1 \varphi'(\lambda v + (1-\lambda) u)\, d\lambda$$

$$= (v-u) \int_0^1 F\varphi(\lambda v + (1-\lambda) u)\, d\lambda$$

Como F transforma acotados en acotados, existe una constante M tal que $||F\varphi(tu + (1-t)v)|| < M$. Por tanto,

$$||\varphi(v) - \varphi(u)|| < M\, ||u - v||$$

para todo $u, v \subset [0, a)$ y φ puede extenderse a una función continua en el intervalo cerrado $[o, a]$. Por el teorema 1, $\varphi(t)$ puede extenderse más allá de a, lo que contradice el que $[o, a)$ sea un intervalo máximo de existencia.

Observación. 1. El que F satisfaga una condición de Lipschitz en cada punto no implica que F transforme conjuntos acotados en conjuntos acotados. Sin embargo, la última afirmación sería cierta si suponemos que F es uniformemente continua en cada conjunto acotado [10 ; p. 19], o si F satisface una condición de Lipschitz uniformemente en cada conjunto acotado.

La conclusión del teorema anterior puede obtenerse omitiendo la condición de que F transforme conjuntos acotados en conjuntos acotados, pero bajo hipótesis adicionales sobre L.

TEOREMA 3. Sea F un espacio de Banach real y sea $F : E \to E$ un operador que satisface una condición de Lipschitz en cada punto. Supóngase que $< F(x)$, $L'(x) > \leqslant - \Phi(||F(x)||)$, donde :

i) $\Phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es continua, convexa, estrictamente creciente y tal que $\Phi(0) = 0$, $\Phi(t) . t^{-1} \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

ii) $L : E \to R$ es de clase C^1, acotada inferiormente y tal que $L(x) \to \infty$ si $||x|| \to \infty$.

Entonces toda solución $\varphi_x(t)$ de la ecuación diferencial (5) existe para todo $t \geqslant 0$ y es, además, acotada.

Demostración. Sea $[o, a)$ el máximo intervalo de existencia y supóngase que a es infinito. Sea $g(t) = L(\quad(t))$. Entonces,

(6) $$g'(t) = \langle L(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle \leq -\Phi(\| F(\varphi(t)) \|)$$

y por tanto g es decreciente y, por las hipótesis sobre L, acotada inferiormente. Sean $u, v < [o, \alpha)$ y supongamos que $u < v$. Entonces, como en el teorema anterior, se demuestra que

(7) $$\varphi(v) - \varphi(u) = (v-u) \int_o^1 F \varphi(\lambda v + (1-\lambda) u)\, d\lambda$$

Ahora, por la desigualdad de Jensen [9, p.202] uno obtiene :

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(\int_o^1 \| F \varphi(\lambda v + (1-\lambda) u) \|\, d\lambda \right) \\
&\leq \int_o^1 \Phi(\| F \varphi(\lambda v + (1-\lambda) u) \|)\, d\lambda \\
&\leq \int_o^1 - g'(\lambda v + (1-\lambda) u)\, d\lambda \\
&= (v-u)^{-1} \int_o^1 \frac{d}{d\lambda} (-g(\lambda v + (1-\lambda) u))\, d\lambda \\
&= (v-u)^{-1} (g(u) - g(v))
\end{aligned}$$

Por tanto, ya que Φ^{-1} es creciente, se obtiene :

(8) $$\int_o^1 \| F (\lambda v + (1-\lambda) u \|\, d\lambda < \Phi^{-1}\left(\frac{g(u) - g(v)}{v-u} \right)$$

De (7), (8) y el hecho que $g(u) - g(v)$ está acotada por una constante M se obtiene :

(9) $$\| \varphi(v) - \varphi(u) \| < (v-u)\, \Phi^{-1}\left(\frac{M}{v-u} \right)$$

Vamos a demostrar que $\| \varphi(v) - \varphi(u) \| \to 0$ cuando u y v tienden a α. Como

$$s\, \Phi^{-1}\left(\frac{M}{s} \right) = M \left(M^{-1} s\, \Phi^{-1}\left(\frac{1}{M^{-1} s} \right) \right)$$

basta demostrar que $r\, \Phi^{-1}\left(\frac{1}{r} \right) \to 0$ cuando $r \to 0$. Pero la última afirmación se deriva sin dificultad del hecho que $\Phi(t) \cdot t^{-1} \to \infty$ cuando $t \to \infty$. Como $\| \varphi(v) - \varphi(u) \| \to o$ cuando u y v tienden a α, entonces φ puede extenderse a una función contínua en el intervalo cerrado $[o, \alpha]$. La demostración se completa con el teorema de existencia local.

3. La ecuación $S(x) = 0$

Vamos a demostrar ahora varios teoremas de existencia de soluciones de la ecuación operacional $S(x) = 0$ usando la idea general explicada en la introducción. Para ello necesitamos una breve explicación sobre normas diferenciables.

Una norma $||\cdot||$ en un espacio de Banach E se dice que es diferenciable si $x \to ||x||$ es diferenciable en el sentido de Frechet en $E - \{0\}$. Si $||\cdot||$ es una norma diferenciable, entonces $V(x) = ||x||^2$ es una función escalar de clase C^1; además, $V'(o) = o$ y $||V'(x)|| = 2\,||x||$. La existencia de una norma diferenciable que defina la topología original de E implica que el dual E' de E es separable si E es separable. El problema de existencia de normas diferenciables fue estudiado por el autor en [8].

TEOREMA 4. Sea E un espacio de Banach con una norma diferenciable denotada por $||\cdot||$. Sea $S: E \to E$ un operador tal que:

i) S satisface una condición de Lipschitz en cada punto;

ii) $< S(x) - S(y), V'(x-y) > \geqslant c\,||x-y||^2$ para cierta constante $c > 0$ y para todo $x, y \in E$. Suponemos, además, que $<S(x), L'(x)> \geqslant \Phi(||S(x)||)$, donde Φ y L son las funciones del teorema 3. Entonces, existe un solo $x^* \in E$ tal que $S(x^*) = 0$ y toda trayectoria $\varphi_x(t)$ de la ecuación diferencial $\dot{\varphi} = -S(\varphi(t))$ converge a x^* cuando t tiende a infinito.

Demostración. Es claro que por el teorema 3, al hacer $F = -S$, toda trayectoria $\varphi_x(t) = \varphi(t)$ está definida para todo $t \geqslant 0$.

Sea $g(t) = L(\varphi(t))$. Entonces $g(t)$ es decreciente y acotada inferiormente. Por tanto, existe una sucesión $\{t_n\}$ tal que $t_n \to \infty$ y $g'(t_n) \to 0$ (consecuencia del teorema del valor medio). Sea $x_n = \varphi(t_n)$. Entonces, de (6) y las hipótesis sobre Φ se obtiene que $||S(x_n)|| \leqslant \Phi^{-1}(-g'(t_n)) \to 0$ cuando n tiende a infinito. De la condición ii) sobre S y lo dicho anteriormente se desprende que $\{x_n\}$ es es una sucesión de Cauchy. En efecto,

$$c\,||x_n - x_m||^2 \leqslant ||S(x_n) - S(x_m)|| \cdot ||x_n - x_m||$$

$$||x_n - x_m|| \leqslant \frac{1}{c}\,||S(x_n) - S(x_m)|| \to 0$$

cuando n, m tienden a infinito.

Sea x^* el límite de la sucesión $\{x_n\}$. Entonces $S(x^*) = 0$ ya que S es un operador continuo. La condición ii), de nuevo, asegura que x^* es la única solución de la ecuación $S(x) = 0$.

Tenemos que demostrar ahora que $\varphi(t) \to x^*$ cuando $t \to \infty$. Para ello definimos la función

$$Q(x) = \frac{||x - x^*||^2}{2} - \frac{||x^*||^2}{2}$$

Entonces el extremo inferior de $Q(x)$ es $a = -\dfrac{||x^*||^2}{2} = Q(x^*)$. Además,

$$< -S(x)\,,\ Q'(x) > = - < S(x) - S(x^*),\ V'(x - x^*) >$$

$$\leqslant - c\,||x - x^*||^2 \leqslant 0$$

y por tanto $Q(\varphi(t)) = r(t)$ es decreciente y acotada inferiormente. Como $x_n \to x^*$; se sigue que $r(t) \to a$ cuando t tiende a infinito. Sea $B_\epsilon = \{\, x \mid ||x - x^*|| \leqslant \epsilon \,\}$. Entonces $Q^{-1}[\,a, a + 2^{-1}\epsilon^2\,] \subset B_\epsilon$. Sea $M > 0$ tal que para todo $t \geqslant M$ se tenga: $a \leqslant Q(\varphi(t)) \leqslant a + 2^{-1}\epsilon^2$. Entonces $\varphi(t) \in B_\epsilon$ para todo $t \geqslant M$, lo que demuestra que $\varphi(t) \to x^*$ cuando $t \to \infty$.

Como corolario obtenemos el siguiente teorema demostrado incorrectamente por por el autor en [7]. Si E es un espacio de Hilbert, sea $j: E \to E'$ la identificación de Riez vía el producto escalar ; sea $f: E \to R$ una función escalar de clase C^1. Entonces $j^{-1}f' = grad(f)$ es un operador de E en E. Para simplificar escribiremos simplemente f' en vez de $grad(f)$.

TEOREMA 5. Sea E un espacio de Hilbert real y sea $f: E \to R$ una función escalar de clase C^1 y acotada inferiormente. Supóngase :

i) $f' = S$ satisface una condición de Lipschitz en cada punto ;

ii) $< S(x) - S(y) , x - y > \geqslant c \, || x - y ||^2$ para alguna constante $c > 0$ y para todo $x, y \subset E$. Entonces toda solución $\varphi_x(t)$ de la ecuación diferencial $\dot{\varphi} = - S(\varphi(t))$ está definida para todo $t \geqslant 0$. Además f tiene un sólo punto crítico al cual convergen las trayectorias cuando t tiende a infinito.

Demostración. Basta tomar en el teorema 4 $L(x) = f(x)$ y $\Phi(t) = t^2$, ya que la condición ii) implica que $f(x) \to \infty$ si $\| x \| \to \infty$. En efecto ,

$$f(x) - f(o) = \int_o^1 \frac{d}{dt} (f(tx))\, dt$$

$$= \int_o^1 < S(tx) , tx > t^{-1} dt$$

pero,

$$< S(tx) , tx > = < S(tx) - S(o) , tx > + < S(o) , tx >$$

$$\geqslant c t^2 \| x \|^2 - \| S(o) \| \cdot \| x \| \cdot t$$

$$= \| x \| (c t^2 \| x \| - \| S(o) \| \; t)$$

Por tanto ,

$$f(x) - f(o) \geqslant \| x \| \int_o^1 (c \| x \| t - \| S(o) \|) \, dt$$

$$= \| x \| \left(\frac{c \| x \|}{2} - \| S(o) \| \right)$$

lo que demuestra que $f(x) \to \infty$ cuando $\| x \| \to \infty$.

Observación 2. El teorema anterior puede considerarse como una versión continua del método del "Steepest Descent". Uno parte de un punto arbitrario x_o y define inductivamente

$$x_{n+1} = x_n - t_n u_n$$

donde $u_n = S(x_n)$ y t_n es el extremo inferior de f a lo largo de la tangente $x_n - t u_n$ a la trayectoria $\varphi(t)$ que empieza en x_n en el instante $t = 0$. Sería interesante saber si las hipótesis del teorema 5 son suficientes para asegurar la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ al punto crítico x^* de la función f. Si $\| S(x) - S(y) \| \leq k \| x - y \|$, $k > 0$, y para todo $x, y \subset E$, entonces $x_n \to x^*$, como lo demostramos en [6].

REFERENCIAS

1. *R. COURANT, Bull. Amer. Math. Society 41 (1943).*

2. *M. K. GAVURIN, Non linear functional equations and continuos analogs of iterative methods, Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika 6(1959), 18 - 31.*

3. *F. A. FICKEN, The continuos method for functional equations, Comm. Pure and Appl. Math. 4 (1951), 435 - 456.*

4. *G.M. MEYER, On solving nonlinear equations with a one parameter operator imbedding, University of Maryland Technical Report TR - 67 - 50 (1967).*

5. *L. DIEUDONNE, Foundations of modern analysis, Academic Press, New York (1960).*

6. *G. RESTREPO, On the method of the Steepest descent, Revista Colombiana de Matemáticas, 2 (1968), 45 - 49.*

7. *G. RESTREPO, La ecuación* $\frac{d\varphi}{dt} = -\operatorname{grad} f(\varphi(t))$ *en un espacio de Hilbert, Revista Colombiana de Matemáticas, 3 (1967), 21 - 25.*

8. *G. RESTREPO, Differentiable Norms, Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, (1966).*

9. *E. HEWITT and K. STROMBERG, Real and abstract analysis, Springer, New York, (1965).*

10. *M.M. VAINBERG, Variational methods for the study of nonlinear operators, Holden - Day, San Francisco, Calif., (1964).*

Universidad de Puerto Rico
Mayaguez, Puerto Rico.