Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen III , (1969) , págs. 43 - 44

UNA NOTA SOBRE EL NUMERO DE SOLUCIONES DE ECUACIONES CON COEFICIENTES MATRICIALES

por

Víctor S. ALBIS GONZALEZ

Consideremos el anillo

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2 (F_p) \; ; \; a , \lambda \in F_p \right\}$$

donde F_p designa el cuerpo $Z/(p)$. Es claro que A_p es un anillo conmutativo finito con elemento unidad. Sean ahora $A_p[t]$ el anillo de los polinomios en la indeterminada t con coeficientes en A_p y

$$f(t) = \sum_{k=o}^{n} a_k t^k \in A_p[t] \quad , \; a = \begin{bmatrix} \lambda_k & a_k \\ 0 & \lambda_k \end{bmatrix} ,$$

un polinomio de grado n. Usando el siguiente teorema [1]

TEOREMA 1.- Sean B un anillo conmutativo finito con elemento unidad y k un cuerpo finito. Sea $\mu : B \to k$ un epimorfismo de anillos y $N = card\,[ker\,\mu]$. Entonces, si $f(t) = \sum_{k=o}^{n} a_k t^k$ es tal que $a_k \notin ker\ \mu$, para algún $k=0, 1, \ldots, n$, $f(t)$ tiene a lo más $n\,N$ raíces distintas o no en B.

obtenemos el

TEOREMA 2 .- Sea $f(t) = \sum_{k=o}^{n} a_k t^k \in A_p[t]$ un polinomio de grado n tal que $\lambda_k \neq o$ para algún $k = 0, 1, \ldots , n$. Entonces $f(t)$ tiene a lo más pn raíces de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Demostración : La aplicación $\mu : A_p \to F_p$ definida por

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \longmapsto \lambda$$

es un epimorfismo ; como

$$\mu = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; \lambda \in F_p \right\}$$

y $card\,[ker\,\mu] = p$, resulta el teorema 2.

Por otra parte , consideremos el polinomio

$$f(t) = \sum_{k=o}^{n} \begin{pmatrix} \lambda_k & a_k \\ 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \cdot t^k \in A_p[t]$$

Es fácil comprobar que

$$\begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in A_p$$

es una raíz de $f(t)$ si y sólo si $h(\lambda) = 0$ y $a\, h'(\lambda) + g(\lambda) = 0$, donde $g(t) = \sum_{k=o}^{n} a_k\, t^k$ y $h(t) = \sum_{k=o}^{n} \lambda_k\, t^k$. Ahora bien existen a lo más n valores de λ en F_p tales que $h(\lambda) = 0$, a menos que $h(t) \equiv 0$. Así mismo a está determinado de manera única por λ a menos que $h'(\lambda) = 0$. Esto muestra que la cota pn sirve para todos los polinomios $f(t) \in A_p[t]$.

Dado un polinomio $f(t) \in A_p[t]$ no hay que pensar que todas sus raíces en $\mathfrak{M}_2(F_p)$ pertenecen a A_p. Por ejemplo,

$$f(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t^2 \in A_p[t]$$

tiene como raíz en $\mathfrak{M}_2(F_p)$ a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Sería interesante investigar bajo qué condiciones $f(t) \in A_p[t]$ tiene todas sus raíces en A_p. Quiero agradecer aquí al profesor R. Mac Rae algunas sugerencias que han mejorado la presentación de esta nota.

REFERENCIAS

[1]. *V. ALBIS , " A certain class of rings and the number of roots of polynomials with coefficients in these rings" , (to appear)*

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá , Colombia , S. A.
(Recibido en abril de 1969)