Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen V (1971) págs. 25 - 29 .

TRANSFORMADAS DE FOURIER DE DISTRIBUCIONES HOMOGENEAS

por

CARLOS LEMOINE

Introducción .

Lo que sigue es un resumen del Capítulo III de la tesis del autor presentada ante la Universidad de Maryland en diciembre de 1968, la tesis fue dirigida por el profesor Humberto Neri y estudia las relaciones entre la regularidad de una distribución, su grado de homogeneidad, la dimensión del espacio en que está definida y la regularidad de su transformada de Fourier.

Para resolver el problema propuesto se procede en los siguientes pasos :

a) Se caracterizan las distribuciones homogéneas para reducir el problema al estudio de distribuciones sobre la esfera unidad.

b) Reducido al caso de transformaciones sobre las distribuciones en la esfera unidad, se estudian estas transformaciones en términos de series de Fourier de esféricos armónicos.

a) Estructura de las distribuciones homogéneas.

Definición 1. Sea E^k el espacio Euclideo de k dimensiones y $S'(E^k)$ el espacio de las distribuciones temperadas sobre E^k, λ un número complejo, τ un elemento de $S'(E^k)$. Decimos que τ es homogéneo de grado λ si para cualquier función indefinidamente derivable con soporte compacto Ψ y para cualquier $a > 0$ se tiene :

(a-1) $\quad < \tau\, ,\, \Psi\, (\frac{x}{a}) > = a^{\lambda+\kappa} < \tau\, ,\, \Psi >$

Ejemplos : *a-1)* Si P_n es un polinomio de grado n y δ es la medida de Dirac, $P_n(D)\delta$ es homogéneo de grado $-n-k$.

Ejemplo a-2) Sea $\Sigma = \{x ; |x| = 1\}$ y $D'(\Sigma)$ el espacio de las distribuciones sobre Σ.

Si $f \in D'(\Sigma)$ se puede asociar a f una familia analítica en λ de distribuciones homogéneas de grado λ para $\lambda \neq -\kappa\, ,\, -\kappa-1\, \cdot\, \kappa-2$ etc., por medio de la fórmula

(a-2) $\quad \Phi \in S(E^{\kappa}) \quad < r^{\lambda} f, \Phi > = \int_0^{\infty} < f, \Phi(r x') > dr, |x'| = 1$

(Esto define $r^{\lambda} f$).

TEOREMA 1. Sea λ un número complejo y τ una distribución homogénea de grado λ entonces :

a) Si λ no es un entero $\leqslant -k$ existe $f \in D'(\Sigma)$ tal que

(a-3) $\quad \tau = r^{\lambda} f$

b) Si $\lambda = -k\, ,\, -k-1$, etc., existen $f \in D'(\Sigma)$ y un polinomio $P_{-\lambda-k}$ de grado $-\lambda-k$ homogéneo tal que

(a-4) $\quad \tau = r^{\lambda} f + P_{-\lambda-\kappa}(D)\,\delta$

Definición 2. Llamaremos a f la característica de la distribución τ.

Se muestra que la regularidad de τ en $|x| > 0$ va a ser la misma de f en Σ (cuando la regularidad se expresa en términos de los espacios L_p^s cfr b). Nuestro problema de esta manera se reduce a estudiar cómo son entre sí las características de una distribución homogénea y la de su transformada de Fourier. Estudiaremos en detalle las distribuciones sobre Σ

b) *Series de Fourier de esféricos armónicos.*

Sea E^k el espacio Euclideano de k-dimensiones y $\Sigma = \{x ; |x| = 1\}$ la esfera unidad, las restricciones a Σ de los polinomios armónicos homogéneos de grado n se llaman esféricos armónicos de grado n, los esféricos armónicos de grado n forman un espacio vectorial $\{ Q_n \}$ de dimensión $M_n^k = 0(n^{k-2})$.

Por $\{ Y_{m\eta} \}_\eta$ $(m = 1\ 2, \ldots M_\eta^K)$ designaremos una base de $\{ Q_\eta \}$ formado por restricciones a Σ de polinomios homogéneos armónicos con coeficientes reales y ortonormales con respecto al producto interno.

(b-1) $\quad < f, g > = \int_\Sigma f\, g\, d\sigma$

donde $d\sigma$ designa la medida de Lebesgue en Σ.

Proposición b-1 : Si $f \in D(\Sigma)$ entonces

(b-2) $\quad f = \sum_{n=o}^{\infty} a_{nm}\ y_{nm}(x)$

$$m = 1 \ldots\ldots M_n^k$$

(b-3) y $(a_{nm}) = 0(r^{-l})$ para todo $f > 0$.

(La convergencia de (b-2) es respecto a la topología de Schwartz en $D(\Sigma)$.).

Recíprocamente si una sucesión $a_{nm} \ldots, n=0, 1, 2 \ldots\ldots, m = 1, \ldots\ldots M_n^k$ satisface a (b-3), b-2 converge en $D(\Sigma)$ a una función indefinidamente diferenciable.

Proposición b-2 : De otra parte (b-2) es convergente en $D'(\Sigma)$ si y solo si $\exists N > 0$ tal que

(b-4) $\quad a_{nm} = 0(n^N)$.

Regularidad en Σ

Sea $d(x) = d(|x|) > 0$ una función indefinidamente derivable tal que para $|x| > 1$ coincide con $|x|$. Si s es un número complejo definimos I^s en $S'(E^k)$ por la relación (cfr. Calderón [1] p. 36)

$$(I^s f)^\wedge = \hat{f}(d(x))^{-s}$$

Cuando s es un número real la imagen de $L_p(E^k)$ por I^s se denota $L_p^s(E^k)$.

$(L_p(E^K) = \{ f : E^K \to c\ ;\ \int |f|^p\, d\mu < \infty \})\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$

Se demuestra confrontar (0) que si una distribución Ψ tiene soporte compacto y pertenece a $L^s_p(E^k)$ también pertenece a $L^s_p(E^k)$ la distribución $\phi^{-1}_o \circ \psi$ donde ϕ es un C^∞ difeomorfismo de E^k en E^k. Esto permite definir los espacios $L^s_p(\Sigma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $-\infty < s < +\infty$

TEOREMA : b-1

Sea β_{nm}, $n = 0, 1 \ldots$ etc., $m = 1, \ldots N^k_n$, una sucesión de complejos, entonces la aplicación de $D'(\Sigma)$ en $D'(\Sigma)$ dada por $\sum_{n,m} a_{nm} \; Y_{nm} \longrightarrow \sum \beta_{nm}$ $a_{nm} \; Y_{nm}$ es continua de $L^s_2(\Sigma)$ en $L^{s+t}_2(\Sigma)$, *(t real)* si y solo si *(b-5)* se satisface *(b-5)* $(\beta_{nm}) = 0\,(n^{-t})$.

Nos restringiremos para simplificar de ahora en adelante al caso en que $\lambda \neq -k, -k-1, -k-2$.

TEOREMA : b-2

Si τ es una distribución homogénea de grado λ

$$\tau = r^\lambda f$$

con $f = \sum_{n,m} a_{nm} \; Y_{nm}$

entonces $\tau = r^{-\lambda-k} g$ donde g está dada por

$$(D-2) \quad g = \sum_{n,m} (-i)^n \, 2^{\lambda+k} \frac{\Gamma(\frac{n+\lambda+k}{2})}{\Gamma(\frac{n-\lambda}{2})} a_{nm} \; Y_{nm}$$

TEOREMA : 3 - D

Si τ es una distribución homogénea que en $|x| > 0$ pertenece localmente a L^s_z i.e. si $\phi \in C^\infty_o(|x| > 0)$ entonces $\phi \, o \, \tau \in L^s_2(E^k)$) su transformada de Fourier para $|x| > 0$ pertenece localmente a $L_2^{s-Re\lambda-k/2}$.

Demostración : Decir que τ (resp $\hat{\tau}$) está localmente para $|x| > 0$ en L^s_2 (resp. en $L_2^{s-Re\lambda-k/2}$) es equivalente, según lo notamos al final de a), decir, que f (resp. g) pertenece a $L^s_2(\Sigma)$ (resp. a $L_2^{s-k/2-Re\lambda}(\Sigma)$). .

En virtud de los teoremas *b-1* y *b-2* se necesita probar que

$$\beta_{nm} = \left| (-i)^n \, 2^{\lambda+k} \frac{\Gamma(\frac{n+k+\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{n-\lambda}{2})} \right| = 0 \, (n \quad Re(\lambda) + k/2)$$

Lo cual se deduce de conocidas propiedades de la función gamma. .

Nota 1. En el caso $k = 2$, los resultados del teorema *b-3* pueden extenderse a los espacios L_p^s $1 < p < \infty$, y en una forma ligeramente diferente a los casos $p = 1$ y $p = \infty$ cfr. (*0*).

Nota 2. En el caso $p = 1$, $p = \infty$ y $k \geqslant 3$, se muestra que no existe un teorema similar al *b-3* cfr. (0).

Nota 3. Existen resultados particulares, obtenidos por Calderón de manera muy distinta. (cfr. Calderón (2)).

BIBLIOGRAFIA

(1) *CALDERON A. P. Algebras of singular Integral Operators Proceeding of Symposia in Pure Mathematics, Vol, 10, 1967, pp. 18-55, Am. Math, Soc.*

(2) *CALDERON A. P. and ZYMUND A. Algebras of Certain Singular Operators, Amer. J. Math, 78 (1956) 310-320.*

(1) *GEL'FAND I. M. and SHILOV G. E. Generalized Functions Vol. 1, Academic Press, New York and London, 1964.*

(0) *LEMOINE CARLOS "Fourier Transforms of Homogeneous Distributions", University of Maryland, 1968.*