Revista Colombiana de Matematicas
Volumen V (1971) pp. 59 - 82

LA CONDICION DE KAN Y LA NOCION DE GRUPOIDE

por

Carlos RUIZ SALGUERO

y

Roberto RUIZ

1. Introducción.

1.1. Como es sabido existe una inclusión (es decir un factor plenamente fiel).

$$D : \underline{\underline{Cat}} \to \Delta^{\circ} Ens$$

de la categoría $\underline{\underline{Cat}}$, de las categorías pequeñas, en la categoría $\Delta^{\circ} Ens$, de los conjuntos simpliciales. Más aún D admite un adjunto a izquierda G , y en consecuencia D (resp. G) conmuta con los límites proyectivos (resp. inductivos). Se puede demostrar (ver [7]) que G también conmuta con los productos finitos.

El propósito de esta nota es el de mostrar las relaciones que los functores D y G establecen entre, de una parte, la noción de grupoide y , de la otra, la noción de conjunto simplicial de Kan [11] .

Se establece por ejemplo que :

Teorema 1. Para que en una categoría C , todas las flechas sean inversibles (es decir para que C sea un grupoide) es condición necesaria y suficiente que $D(C)$ satisfaga la condición de extensión de Kan. Y también,

Teorema 2. Si un conjunto simplicial X satisface la condición de Kan, la categoría $G(X)$ asociada a X es un grupoide.

1.2. Si se nota $\underline{\underline{g}}$ la subcategoría llena de $\Delta^\circ Ens$ formada por aquellos conjuntos simpliciales X tales que $G(X)$ sea un grupoide, y $\underline{K}$ la subcategoría llena de $\Delta^\circ Ens$ cuyos objetos son los conjuntos que satisfacen la condición de Kan, se dispone, como consecuencia del teorema 2 de una inclusión

$$i : \underline{\underline{k}} \hookrightarrow \underline{\underline{g}}$$

Las trazas sobre la subcategoría $D(\underline{\underline{Cat}})$ de $\Delta^\circ Ens$ de estas dos categorías, coinciden como consecuencia del teorema 1 y de la igualdad $GD(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{A}}$ para toda categoría $\underline{\underline{A}} \in \underline{\underline{Cat}}$. Si se identifica $\underline{\underline{Cat}}$ con su imagen por el functor plenamente fiel D se puede escribir, de acuerdo con lo que precede la igualdad

$$(\underline{\underline{k}} \quad \underline{\underline{Cat}}) \cong (\underline{\underline{g}} \quad \underline{\underline{Cat}})$$

Es por esto que si se quiere dar ejemplos de objetos de $\underline{\underline{g}}$ que no están en $\underline{\underline{k}}$ es necesario ir a buscarlos entre aquellos conjuntos simpliciales que no estén en la imagen de D.

En [5], GABRIEL y ZISMAN demuestran que la categoría $\underline{\underline{G}}(X)$ asociada a un conjunto simplicial X no depende sino de los tres primeros "pisos" de X es decir del esqueleto $sk^2(X)$:

$$\underline{\underline{G}}(X) \cong \underline{\underline{G}}(sk^2 X).$$

En consecuencia

Corolario 1. Un conjunto simplicial X está en $\underline{\underline{g}}$ si y solamente si $sk^2(X)$ está en $\underline{\underline{g}}$. Análogamente, para que un conjunto simplicial X esté en $\underline{\underline{g}}$ es condición suficiente que $sk^{(2)}(X)$ sea de Kan.

1.3. Así pues, para que exista un conjunto simplicial $X \in \underline{\underline{g}}$ que no sea de Kan, es condición suficiente que $sk^2(X)$ sea de Kan, y que la condición de extensión falle en alguna dimensión $p \geq 3$.

Dicho esto podemos exhibir objetos de $\underline{\underline{g}}$ que no son de Kan. Para lo cual recordamos (Cf. § 2) que a todo monoide simplicial unitario N puede asociarse un conjunto simplicial $\bar{W}(N)$, el clasificante de Mc-Lane de N, que goza de las siguientes propiedades : 1) $\bar{W}(N)_o = pt$, $\bar{W}(N)_1 = N_o$; 2) el espacio de lazos de $\bar{W}(N)$ es isomorfo a N. 3) La construcción $\bar{W}$ conmuta con los productos y en consecuencia si N es abeliano $\bar{W}(N)$ es de nuevo un monoide simplicial abeliano. En este caso se itera la construcción y se nota

$$\overset{n}{\bar{W}} = \bar{W}(\overset{n-1}{\bar{W}}), \quad \overset{1}{\bar{W}} = \bar{W}.$$

De las propiedades anteriores se deduce que si N es un monoide simplicial abeliano con unidad,

a) $\overset{n}{\overline{W}}(N)_p = \text{punto} \qquad 0 \leqq p \leqq n-1$

b) Si $\overset{n}{\overline{W}}(N)$ es de Kan $\Rightarrow$ $\overset{n-1}{\overline{W}}(N)$ es de Kan (esta última se deduce por aplicación del functor Ω).

Sea ahora M un monoide conmutativo con unidad de la categoría de los conjuntos. Si suponemos que M no es un grupo, la categoría $\underline{\underline{M}}$ asociada a M (con un solo objeto $*$, con tantas flechas de ese objeto en sí mismo como elementos haya en M, y cuya ley de composición es el producto de M) no es un grupoide y en consecuencia (Teorema 1) $D(\underline{\underline{M}})$ no satisface la condición de extensión de Kan. Las propiedades a) y b) dan lugar entonces a :

Proposición 1. Sea $M \varepsilon \underline{\underline{Ens}}$ un monoide conmutativo con unidad que no es un grupo. Entonces para $p \leqq n-1$, el p-ésimo esqueleto de $\overset{n}{\overline{W}}\, D(\underline{\underline{M}})$ es nulo. Además $\overset{n}{\overline{W}}\, D(\underline{\underline{M}})$ no satisface la propiedad de extensión de Kan.

En conclusión, hemos construido, para cada monoide abeliano M (que no sea un grupo) y para cada $n \geqq 3$ un ejemplo de un conjunto simplicial que pertenece a $\underline{\underline{g}}$ pero que no es de Kan. La inclusión $\underline{\underline{k}} \subset \underline{\underline{g}}$ es, en consecuencia, estricta.

Este ejemplo de tipo general fue inspirado por aquel que dimos en [7]. Se trataba entonces de mostrar que si bien la condición de extensión de

Kan es suficiente para que la relación de homotopía sea de equivalencia, ella no es necesaria.

§ 2. Los functores **D**, **G**, $\overline{\mathbf{W}}$.

El functor D ([5], [8]). Sea $\underline{C}$ una categoría pequeña. Se nota $D(C)$ el conjunto simplicial definido por a), b) c) a continuación

a) $D(C)_o$ = *Objetos de* C

$D(C)_n = \{ (f_1, \ldots, f_n) \mid f_{i+1} \circ f_i$ está definido en $C \}$

b) $d_i(f_1, \ldots, f_n) = (f_1, \ldots, f_{i-1}, f_{i+1} \circ f_i, f_{i+2}, \ldots, f_n)$ si $i = 1, 2, \ldots, (n-1)$.

$$d_o(f_1, \ldots, f_n) = (f_2, \ldots, f_n)$$

$$d_n(f_1, \ldots, f_n) = (f_1, \ldots, f_{n-1})$$

c) $s_i(f_1, \ldots, f_n) = (f_1, \ldots, f_i, 1, f_{i+1}, \ldots, f_n)$.

en donde $1 = id$ (meta de f_i) $= id$ (fuente de f_{i+1}).

$$s_o(f_1, \ldots, f_n) = (1, f_1, \ldots, f_n).$$

Como ya lo habíamos dicho, existe un functor (Cf. [5])

$$\underline{G} : \Delta^{\circ} Ens \to \underline{\underline{Cat}}$$

tal que para $X \in \underline{\underline{\Delta^\circ Ens}}$ y $\underline{\underline{C}} \in \underline{\underline{Cat}}$, los conjuntos $Hom(\underline{\underline{G}}(X), \underline{\underline{C}})$ y $Hom(X, D(\underline{\underline{C}}))$ son isomorfos , por medio de un isomorfismo natural en X y en $\underline{\underline{C}}$. Este functor goza de la propiedad de ser una retracción de D en el sentido de que $\underline{\underline{G}}\, D(\underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{C}}$, para toda categoría $\underline{\underline{C}}$. En realidad ésta propiedad y aquella de conmutar con los límites a derecha definen G completamente. En efecto si Δ / X denota la categoría cuyos objetos son las flechas $f : \Delta[n] \to X$ $(n \geq 0)$ y cuyos morfismos entre f y f' son las aplicaciones simpliciales g tales que $f' \circ g = f$,

$$\begin{tikzcd} \Delta[n] \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & \Delta[m] \arrow[d, "f'"] \\ & X \end{tikzcd}$$

entonces el conjunto simplicial X es el límite del functor

$$s = fuente \; : \; \Delta/X \to \Delta^\circ Ens$$

$$f \mapsto fuente\ de\ f .$$

$$X = \lim_{\to} s.$$

En consecuencia

$$\underline{\underline{G}}\, X = \underline{\underline{G}}\, \lim s = \lim_{\to} (G \, . \, s)$$

Como para cada $f : \Delta[n] \to X$, $\underline{\underline{G}}\, s(f) = \underline{\underline{G}}\, \Delta[n] = \underline{\underline{G}}\, D(J_n) = J_n$ en donde J_n es la categoría con objetos $0, 1, \ldots, n$ y con una flecha de i a j si $i \leq j$, entonces para cada X, $\underline{\underline{G}}\, X$ debe ser el límite del functor

$$\Delta / X \to \underline{\underline{Cat}}$$

que a cada $f : \Delta[n] \to X$ asocia la categoría J_n y que a cada ω,

$$\begin{tikzcd} \Delta[m] \arrow[rr, "\omega"] \arrow[dr, "g"'] & & \Delta[n] \arrow[dl, "f"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad f\,\omega = g$$

hace corresponder el functor $J_m \to J_n$ determinado por la aplicación monótona $\omega : [m] \to [n]$.

El functor $\mathring{W}$ se define sobre los monoides simpliciales con elemento unidad por medio de las fórmulas (Cf. May [4], Moore [3], C. Ruiz-Salguero [6]).

$$\mathring{W}(M)_o = pt$$

$$\mathring{W}(M)_n = M_o \times \cdots \times M_{n-1}$$

$$d_i(g_o, \ldots, g_{n-1}) = (g_o, \ldots, g_{n-i-2}, g_{n-i-1} \cdot d_o\, g_{n-i}, d_1\, g_{n-i+1}, \ldots, d_{i-1}\, g_{n-1}) \qquad 1 \leq i \leq n$$

$$d_o(g_o, \ldots, g_{n-1}) = (g_o, \ldots, g_{n-2})$$

$$d_n(g_0, \ldots, g_{n-1}) = (d_1 g_1, \ldots, d_{n-1} g_{n-1})$$

$$s_0(g_0, \ldots, g_{n-1}) = (g_0, \ldots, g_{n-1}, 1) \qquad (1 \leqq i \leqq n-1)$$

$$s_n(g_0, \ldots, g_{n-1}) = (1, s_0 g_0, \ldots, s_{n-1} g_{n-1})$$

Si M es un monoide simplicial conmutativo con elemento unidad, se define la multiplicación

$$(g_0, \ldots, g_{n-1})\ (h_0, \ldots, h_{n-1}) = (g_0 h_0, \ldots, g_{n-1} h_{n-1})$$

que hace de $\dot{W}(M)$ un monoide simplicial conmutativo con elemento unidad. Existe un isomorfismo natural entre el conjunto simplicial $D(\underline{\underline{N}})$ (en donde $\underline{\underline{N}}$ es la categoría con un solo objeto y tantos morfismos como elementos haya en un monoide dado N), y el conjunto $\dot{W}(\tilde{N})$ (en donde $\tilde{N}$ es el monoide simplicial tal que $(\tilde{N})_n = N$ para todo n, y cuyas fases y degeneraciones son iguales a la aplicación idéntica $id_N : N \to N$). El isomorfismo en cuestión

$$\varphi : \dot{W}(\tilde{N}) \to D(\underline{\underline{N}})$$

está dado por

$$\varphi(g_0, \ldots, g_{n-1}) = (g_{n-1}, \ldots, g_0).$$

De acuerdo con el Teorema 1, se deduce el

Corolario 2. Para que el clasificante $\bar{W}(\tilde{N})$ sea de Kan, es condición necesaria y suficiente que N sea un grupo.

En la teoría simplicial se da una definición (ver Moore [3]) de espacio de lazos que se presta más fácilmente a los cálculos que aquella dada por la fórmula $\Omega(X) = Hom_{\cdot}(S^1, X)$ (Cf. [ ] Gabriel Zisman) : Sea X un conjunto simplicial con punto base $*$. Se define $\Omega(X)$ por las fórmulas

a) $\Omega(X)_n = \{ x \in X_{n+1} \mid d_o(x) = * , d_{i_1}, \dots, d_{i_n}(x) = *$ para toda familia de índices $i_1, \dots, i_n \}$.

b) $d_i^{\Omega X}(x) = d_{i+1}^{X}(x)$ (donde $d_i^X = i\text{-}ésima$ fase de)

c) $s_i^{\Omega X}(x) = s_{i+1}^{X}(x)$ $i \geq 0$

No es difícil mostrar que

Lema 1. Si X es de Kan, entonces ΩX también satisface la condición de extensión de Kan.

Lema 2. Si M es un monoide simplicial, los conjuntos simpliciales M y $\Omega(\bar{W})(M)$ son canónicamente isomorfos.

El isomorfismo $M \xrightarrow{\sim} \Omega\, \bar{W}(M)$ está dado por $x_p \mapsto (*, \dots, *, x_p)$.

Nota. Puede darse el caso de conjuntos X que no son de Kan pero para los cuales ΩX satisfaga la condición de extensión. Consideremos un monoide N de la categoría de los conjuntos. $\tilde{N}$ es evidentemente de Kan y además

$$\tilde{N} \simeq \Omega \dot{W}(\tilde{N})$$

$$\dot{W}(\tilde{N}) = D(\underline{\underline{N}})$$

Sin embargo $D(\underline{\underline{N}})$ no es de Kan a menos que N sea un grupo (de acuerdo con el Corolario 1).

Lo anterior nos lleva a afirmar

Proposición. Para todo monoide simplicial conmutativo (con unidad) M las condiciones siguientes son equivalentes.

a) $\overset{n}{\bar{W}}(M)$ es un objeto de $\underline{\underline{g}}$ $(n \geq 3)$, que no está en $\underline{\underline{k}}$

b) El monoide M no es un grupo simplicial.

c) $\dot{W}(M)$ no es de Kan

Esta proposición es consecuencia de :

Teorema 3. Sea M un monoide simplicial con unidad. Para que $\dot{W}(M)$ sea de Kan es condición necesaria y suficiente que la ley que hace de M un monoide sea en realidad una ley de grupo simplicial. Brevemente

$$\bar{W}(M) \text{ es de Kan } \iff M \text{ es un grupo simplicial.}$$

La condición es necesaria : para demostrarlo recordemos una proposición de Mc-Lane [*10*] que concierne los conjuntos simpliciales de Kan. Sea $\sigma = \{i_1 <, \ldots, < i_p\}$ una colección de p enteros entre 0 y $n+1$.

Una σ-caja en dimensión n de X es una colección $\{x_i\}_i$ de elementos de X_n, $i \in [0, n+1]$ $i \notin \sigma$ tal que

$$d_i \; x_j = d_{j-1} \, x_i \qquad i < j \qquad i, j \notin \sigma$$

Decir que una tal caja se cierra quiere decir que existe $x \in X_{n+1}$, tal que para todo i, $i = 0, \ldots, n$, que no pertenece a σ,

$$d_i \, x = x_i$$

De acuerdo con Mc-LANE (loc. cit.) para que X sea de Kan es condición necesaria y suficiente que para todo n y para todo $\sigma = \{ i_1 < \ldots < i_p \} \subset [0, n+1]$ (*p* variable !), toda σ-caja en dimensión n de X se cierre.

Demostración del Teorema 3.

Supongamos entonces que $\dot{W}(M)$ sea de Kan. Tomemos $g = g_{n-1} \in M_{n-1}$ y demostremos que existe $h \in M_{n-1}$ tal que $gh = 1$. Para esto consideremos la σ-caja $(\sigma = \{ 2, \ldots, n+1 \})$ en dimensión n

$$x_0 = (1, \ldots, 1, g_{n-1})$$

$$x_1 = (1, \ldots, 1, 1)$$

de $\dot{W}(M)$. **Existe entonces**

$$\alpha = (a_0, \ldots, a_n) \in \dot{W}(M)_{n+1}$$

tal que

$$d_0\,\alpha = x_0$$

$$d_1 = x_1$$

Es decir que

$$(a_0, \ldots, a_{n-1}) = (1, \ldots, 1, g_{n-1})$$

$$(a_0, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} \cdot d_0\, a_n) = (1, \ldots, 1)$$

En consecuencia

$$a_i = 1 \qquad 0 \leq i \leq n-2 .$$

$$a_{n-1} = g_{n-1}$$

$$a_{n-1} \cdot d_0\, a_n = 1 .$$

El elemento $b \in M_{n-1}$ **que se deseaba encontrar es entonces** $d_0\, a_n$. **En consecuencia todo elemento del monoide con unidad** M_{n-1} $(n \geq 1)$ **admite un inverso a derecha, y se trata entonces de un grupo.**

En su artículo, SHIH ([2]) demuestra inversamente que para todo grupo simplicial G, $\bar{W}(G)$ satisface la condición de extensión. Según SHIH (loc. cit.), este resultado es debido a CARTAN.

El teorema 3 se generaliza de manera natural. Sin embargo para demostrar esta generalización nos vemos obligados a emplearlo. Recordemos que una aplicación simplicial $p : X \to Y$ es una fibración de Kan si dada una σ-caja $\{x_i\}$ en dimensión n de X, y un $y \in Y_{n+1}$, tal que

$$p(x_i) = d_i(y) \qquad i \neq k$$

existe un $x \in X_{n+1}$, tal que : (i) $p(x) = y$, (ii) $d_i(x) = x_i$ $(i \notin \sigma)$

También es conocido el hecho de que para que un conjunto simplicial sea de Kan, es condición necesaria y suficiente que el único morfismo $X \to \Delta[0]$, de X en el "punto" simplicial, sea una fibración de Kan.

El teorema de CARTAN dice, más generalmente, que si $\varphi : G \to G''$ es un epimorfismo de grupos simpliciales entonces $\bar{W}\varphi : \bar{W}(G) \to \bar{W}(G'')$ es una fibración de Kan. Completamos el teorema de Cartan de la manera siguiente :

Teorema 4. Sea $\varphi : M \to M''$ un epimorfismo de monoides simpliciales. Las condiciones siguientes son equivalentes

a) $\dot{W}(\varphi)$ es una fibración de Kan y M'' es un grupo simplicial

b) φ es un homomorfismo de grupos simpliciales.

Se podría expresar de otra manera este teorema diciendo que si $\dot{W}(\varphi)$ es una fibración de Kan, para que M sea un grupo simplicial es condición necesaria y suficiente que M'' sea un grupo simplicial.

Demostración : Como el teorema de CARTAN afirma que b) => a) pasemos a demostrar que a) => b). Como M'' es un grupo simplicial, entonces $\dot{W}(M'')$ es de Kan. Si a esto se agrega que $\dot{W}(\varphi) : \dot{W}(M) \to \dot{W}(M'')$ es una fibración de Kan, entonces se deduce que $\dot{W}(M)$ es de Kan y el teorema 3 permite concluir que M es un grupo simplicial.

El teorema 3 se deduce del precedente haciendo $M'' = 0$.

§ 3. *Demostración del Teorema 1.*

3.1. Supongamos que $D(C)$ satisfaga la condición de extensión de Kan, y veamos las conclusiones que se pueden sacar cuando esa condición es aplicada para $n = 1$. Sean x_1, x_2 dos elementos de $D(C)_1$. Supongamoslos encajados, es decir que se tenga la igualdad

$$d_1 x_2 = d_1 x_1$$

De acuerdo con la definición de $D(C)$ (ver § 2) esto quiere decir que x_1 y x_2 son flechas de la categoría C cuyas fuentes coinciden. Si aceptamos que $D(C)$ satisface la propiedad de Kan en dimensión 1, entonces existe $\alpha \varepsilon D(C)_2$ tal que

$$d_1 \alpha = x_1$$

$$d_2 \alpha = x_2$$

Pero α es una pareja de flecha componibles de C : $\alpha = (a, b)$, fuente de (b) = *meta* de (a). Las relaciones anteriores se escriben entonces así :

$$b \, . \, a = x_1$$

$$b = x_2$$

En consecuencia cuando $D(C)$ es de Kan (por lo menos en la dimensión 1), la categoría C goza de la propiedad siguiente : dadas dos flechas de la misma fuente u y v existe una flecha ω

$$u$$

$$\omega$$

$$v$$

tal que $\omega \circ v = u$

Entonces si $u = id$ (es una identidad) y v es cualquiera se deduce la existencia de un inverso a la izquierda de v:

$$\omega \circ v = id .$$

De manera análoga, pero aplicando la propiedad de extensión a dos elementos $x_o, x_1 \in D(C)_1$ con la condición

$$d_o x_1 = d_o x_o$$

se encuentra que la categoría C goza también de la propiedad: si u y v son flechas que tienen la misma meta existe ω tal que $u \circ \omega = v$.

u

ω

v

Lo que aplicado a $v = id_B$, $B = meta\ de\ u$, da lugar a la existencia de un inverso a la derecha para toda flecha u de la categoría. De todo lo anterior se deduce que toda flecha de C es inversible.

3.2. Supongamos, inversamente que C sea un grupoide. Demostramos que $D(C)$ satisface la condición de extensión en la dimensión 1. Luego demostramos que en dimensiones superiores la condición es igualmente satisfecha.

Recordemos un Teorema de SHIH [1] sobre la condición de extensión de Kan : para que X sea de Kan es condición necesaria y suficiente que para todo n, toda σ-caja se cierre para $\sigma = \{0\}$ ó $\sigma = \{n+1\}$.

Demostremos que $D(C)$ satisface esta condición para $n = 1$. Darse una σ-caja $\{x_o, x_1\}$ de $D(C)_1$ para $\sigma = \{2\}$, es darse dos flechas de C con igual meta. La pareja $\alpha = (x_o^{-1} \circ x_1, x_o) \in D(C)_2$ es tal que

$$d_o \alpha = x_o$$

$$d_1 \alpha = x_o(x_o^{-1} x_1) = x_1$$

De manera análoga una 0-caja $\{x_1, x_2\}$ de $D(C)_1$ se cierra por medio del elemento $\beta = (x_2, x_1 x_2^{-1})$ de $D(C)_2$.

Tomemos ahora $n > 1$, $p = 0$ y tratemos de cerrar una caja $x_1, \ldots, x_{n+1}$ de elementos de $D(C)_n$. Notemos

$$x_i = (f_1^i, \ldots, f_n^i)$$

Las relaciones de compatibilidad $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ $\quad i < j$ $(i, j \neq 0)$ dan lugar a las relaciones

(a) $\quad f_k^i = f_k^{n+1} \qquad 0 \leqq k \leqq i-1 \quad , \qquad (i \leqq n)$

(b) $\quad f_i^i = f_{i+1}^{n+1} \circ f_i^{n+1} \qquad\qquad (i \leqq n)$

(c) $\quad f_k^i = f_{k+1}^{n+1} \qquad i+1 \leqq k \leqq n-1 \qquad (i \leqq n)$

Las cuales se logran haciendo $\quad j = n+1, \quad i < n.$ Si $\quad i < j \leqq n$

Si $\quad i < j \leqq n \quad$ se obtiene entre otras, la relación

(d) $\quad f_n^i = f_n^j$. Notemos $\quad u = f_n^i \,, \quad (i < j < n)$

Para $\quad i = n, \; j = n+1 \quad$ las relaciones de compatibilidad dan lugar a las igualdades

(e) $\quad f_k^n = f_k^{n+1} \qquad 1 \leqq k \leqq n-1.$

Haciendo $\quad i < j = n \quad$ se obtiene finalmente

(f) $\quad f_n^n = f_n^i \, f_{n-1}^i$

Estas relaciones bastan para demostrar que el elemento

$$\alpha = f_n^{n+1}, \ldots, f_n^{n+1}, f_n^n \circ (f_n^{n+1})^{-1})$$

cierra la caja $\quad \{ x_1, \ldots, x_{n+1} \}$. De manera semejante se construye la cerradura de una $\quad \sigma$-caja para $\quad \sigma = \{ n+1 \}$.

§ 4. *Demostración del Teorema 2.*

4.1. Antes de pasar a demostrar el teorema 2, recordemos brevemente la construcción de la categoría $\quad \underline{\underline{G}}\,(X) \quad$ dada en $\;[5]\;$ p. 33 .

En primer lugar la inclusión $Sk^2 X \to X$ induce un isomorfismo $G(Sk^2X) \to \underline{\underline{G}}(X)$. Es por esto que podemos reducirnos a considerar conjuntos simpliciales X tales $sk^2 X = X$. Una aplicación simplicial de un tal X en Y está determinada por tres aplicaciones $\varphi_i, i = 0, 1, 2$

$$\varphi_i : X_i \to Y_i \qquad 0 \leq i \leq 2$$

que conmutan con las fases y degeneraciones. Hacemos esta anotación porque nos proponemos caracterizar $\underline{\underline{G}}\, X$, el cual debe satisfacer la relación

$$Hom\,(X\,.\,D(C)) \approx Hom\,(\underline{\underline{G}}(X)\,,\,C)$$

para cada categoría C. Así pues $\underline{\underline{G}}(X)$ debe ser el objeto inicial de la categoría $\underline{\underline{A}}(X)$ definida por a) y b).

a) Objetos de $\underline{\underline{A}}(X)$ son las parejas $(C\,,\,\varphi)$ en donde C es una categoría $(de\ \underline{\underline{Cat}})$ y $\varphi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2\}$, $\varphi_i : X_i \to D(C)_i$ compatibles con las fases y degeneraciones. Es decir, que se debe tener :

$$\varphi_o : X_o \to \text{objetos de } C = ob(C)$$

$$\varphi_1 : X_1 \to \text{flechas de } C = Fl(C)$$

$$\varphi_2 : X_2 \to Fl^2(C)$$

$(Fl^2(C)$ = parejas de flechas componibles de $C)$.

$$\text{fuente} \quad (\varphi_1(x)) = \varphi_o(d_1 x) \qquad x \in X_1 \tag{1}$$

$$\text{meta} \quad (\varphi_1(x)) = \varphi_o(d_o x) \tag{2}$$

$$\varphi_1(s_o(y)) = id_{\varphi_o(y)} \qquad y \in X_o \tag{3}$$

y además como para cada $\alpha = (u, v) \in Fl^2(C)$ se tiene la igualdad

$$\alpha_1 \alpha = d_o \alpha \, . \, d_2 \alpha$$

entonces para cada $\sigma \in X_2$, debe satisfacerse la relación

$$d_1 \varphi_2(\sigma) = d_o \varphi_2(\sigma) \, . \, d_2 \varphi_2(\sigma)$$

o lo que es lo mismo

$$\varphi_1(d_1 \sigma) = \varphi_1(d_o \sigma) \, . \, \varphi_1(d_2 \sigma) \tag{4}$$

b) Los morfismos en $\underline{\underline{A}}(X)$ de (C, φ) en (C', φ') son los functores $F : C \rightarrow C'$ tales que si se nota $F_i : D(C)_i \rightarrow D(C')_i$ $(i = 0, 1, 2)$ las aplicaciones asociadas de manera evidente a F, entonces se tenga

$$F_i \varphi_i = \varphi'_i \qquad i > 0, 1, 2.$$

Notemos $(\underline{\underline{G}}(X), \theta)$ el objeto inicial de la categoría $\underline{\underline{A}}(X)$. $\underline{\underline{G}}(X)$ puede ser descrita en consecuencia como la categoría que tiene

i) Un objeto $\bar{x}$ por cada $x \in X_o$ y para la cual

ii) El conjunto de las flechas es "engendrado" por los $\dot{f}$ donde $f \in X_1$, en donde se supone que

$$\text{fuente de } (\dot{f}) = d_1 f$$

$$\text{meta de } (\dot{f}) = d_o f$$

iii) Todo esto sometido a las relaciones

$$id_{\bar{x}} = s_o x \qquad x \in X_o$$

$$d_1 \sigma = d_2 \sigma \ . \ d_o \sigma \qquad \sigma \in X_2$$

La aplicación $\theta = \{\theta_0, \theta_1, \theta_2\} : X \to \underline{\underline{G}}(X)$ es evidentemente definida por las igualdades $\theta_o(x) = \bar{x}$, $\theta_1(f) = \dot{f}$, $\theta_2(\sigma) = (d_o \sigma, d_2 \sigma)$.

4.2. De lo que precede se deduce que para que $\underline{\underline{G}}\, X$ sea un grupoide es condición necesaria y suficiente que para cada $f \in X_1$, la flecha $\dot{f}$ sea inversible.

Esto sucede si por ejemplo el conjunto simplicial X satisface la condición de Kan en la dimensión 1.

Démonos en efecto $f \in X_2$. Sea $a = d_1 f$. Entonces

$$x_1 = s_o a$$

$$x_2 = f$$

forman una caja en dimensión 1 $(d_1 x_2 = d_1 x_1)$ y en consecuencia existe $\sigma \varepsilon X_2$ tal que

$$d_1 \sigma = s_o a$$

$$d_2 \sigma = f$$

Lo que va a implicar que

$$(d_o \sigma) \cdot \bar{f} = s_o a = id_{\bar{a}}$$

Lo cual implica que $\bar{f}$ tiene inverso a izquierda dado por $d_o \sigma$.

Para construir el inverso a la derecha se hace $y_o = f$, $y_1 = s_o b$ $(b = d_o f)$. Ellos forman una caja que es cerrada por μ, y en consecuencia

$$d_o \mu = f \;, \quad d_1 \mu = s_o b$$

$$f \;\cdot\; d_2 \mu = id_{\bar{b}}$$

■

BIBLIOGRAFIA

[1]	W. SHIH	Sur la condition d'extension de Kan pour les complexes simpliciaux. C. R. Ac. des Sciences. Univ. de París (1957) 1131 - 1132.
[2]	W. SHIH	Homologie des espaces fibrés. Publications Mathematiques I. H. E. S. No. 13.
[3]	J. MOORE	Seminar on Algebraic homotopy Theory. Princeton 1958.
[4]	MAY	Simplicial Objects in Algebraic topology.
[5]	P. GABRIEL M. ZISMAN	Calculus of fractions and Homotopy theory. Ergebisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 35 Springer.
[6]	C. RUIZ SALGUERO	Cohomologie a Coeffitients dans un presque-groupe simplicial et K-théorie algébrique. Tesis. U. de Lille. 1971.
[7]	C. RUIZ SALGUERO R. RUIZ S. FRIAS	On Kan's condition Revista Colombiana de Matemáticas U. Nal. de Colombia. Vol. VI No. 1, 1972.
[8]	C. RUIZ SALGUERO R. RUIZ	Teoría Simplicial Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. (Por aparecer).

[9] G. SEGAL Classifying Spaces and spectral sequences
Pub. Math. I. H. E. S. No. 34.

[10] Mc LANE Simplicial Topology
Lectures Notes by J. Yao
Chicago 1959.

[11] D. M. KAN A Combinatorial definition of homotopy groups.
Ann. of Math. 67, 282-312 (1958.

CARLOS RUIZ SALGUERO
ROBERTO RUIZ

Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Matemáticas
Bogotá.