

DENSIDAD DE LOS OPERADORES DE SCHATTEN EN UN ESPACIO DE HILBERT

por

YU TAKEUCHI

Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia

§ 1. Introducción.

En un espacio de Hilbert, dado un sistema ortonormal completo $\{\varphi_k\}$ y un sistema ortonormal (no necesariamente completo) $\{\psi_k\}$, se define un operador T como sigue :

$$T : T\varphi_k = \lambda_k \psi_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (1)$$

donde $\{\lambda_k\}$ es una sucesión de números complejos. Los operadores de este tipo fueron estudiados antes de la aparición de la teoría espectral por P. A. M. Dirac [5] pues jugaban un papel importante en su conocida teoría de transformaciones en mecánica cuántica.

NOTA. Según Dirac, el operador (1) se denomina "Operador Ket" y se denota

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\psi_k\rangle\langle\varphi_k| \quad (2)$$

Recientemente, Robert Schatten^[1] trabajó con estos operadores en forma más sistemática con el objeto de estudiar los operadores completamente continuos utilizando una notación parecida a la usada por Dirac :

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k \otimes \varphi_k. \quad (3)$$

En el presente trabajo a los operadores de este tipo los llamaremos "operadores de Schatten" y usaremos la notación (3). Los operadores de Schatten no forman una álgebra, razón por la cual no se han estudiado en la teoría de Algebras de Banach, salvo casos de operadores completamente continuos.

EJEMPLO 1.

En el espacio $L_2(1, 2)$ el operador S :

$$S = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4x^2}$$

es un operador de Schatten (ver el apéndice). También lo es el siguiente :

$$T = - \frac{d^2}{dx^2}$$

ya que

$$T = - \frac{d^2}{dx^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \pi^2 n^2 \varphi_n \otimes \varphi_n$$

donde

$$\varphi_n = \sqrt{2} \operatorname{sen} n \pi x \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Por otra parte, el operador $T + S = \frac{1}{4x^2}$ no es de Schatten (ver el apéndice).

En este artículo se demuestra que los operadores de Schatten forman un conjunto denso dentro de cierta clase de operadores (acotados y no acotados), o sea que, para cualquier operador T tal que T^*T tiene dominio denso en el espacio, dado $\varepsilon > 0$ existe un operador de Schatten T_ε tal que $T - T_\varepsilon$ es acotado y

$$\|T - T_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Esto es, si el dominio de T^*T es denso en el espacio, el operador T es aproximable por los operadores de Schatten.

§ 2. Nociones Preliminares.

LEMA 1.

Sea H un operador hermítico, acotado y positivamente definido en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Si

$$\langle H \varphi, \varphi \rangle \leq \| \varphi \|^2$$

para algún $\varphi \in \mathcal{H}$ entonces existe un $\varphi_0 \in \mathcal{H}$ tal que la sucesión

$$\{ \| H^n \varphi_0 \| \}$$

converge a un valor finito .

OBSERVACION .

La demostración del Lema 1 es inmediata utilizando la teoría espectral de un operador auto-adjunto [2] ; aquí daremos una demostración directa [3] .

Demostración.

[I] Consideremos los subespacios :

$$\mathcal{M} = \{ \varphi, H\varphi, H^2\varphi, \dots \}$$

$$\mathcal{M}_n = \{ \varphi, H\varphi, \dots, H^{n-1}\varphi \} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) .$$

Sea P_n la proyección de \mathcal{M} sobre \mathcal{M}_n :

$$P_n \mathcal{M} = \mathcal{M}_n .$$

El operador $H_n = P_n H P_n$ es un operador hermítico de \mathcal{M} en \mathcal{M}_n , y se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n a = H a \quad \text{para todo } a \in \mathcal{M}.$$

Por la diagonalización de H_n , existe una base ortonormal

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ del subespacio \mathcal{M}_n , formada por los vectores propios del operador H_n :

$$H_n e_k = \lambda_k e_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Sean

$$\widetilde{\mathcal{M}}_n = \{e_k \mid \lambda_k \geq 1\},$$

$$\widetilde{\mathcal{M}}_n = \mathcal{M}_n \ominus \widetilde{\mathcal{M}}_n,$$

$$\varphi = \widetilde{\varphi}_n + \widetilde{\widetilde{\varphi}}_n, \quad \widetilde{\varphi}_n \in \widetilde{\mathcal{M}}_n, \quad \widetilde{\widetilde{\varphi}}_n \in \widetilde{\mathcal{M}}_n. \quad (1)$$

Como $\{\widetilde{\varphi}_n\}$ es una sucesión acotada, existe una subsucesión que converge débilmente a un elemento de \mathcal{M} , digamos a φ_0 . Para mayor sencillez supongamos que:

$$\widetilde{\varphi}_n \rightarrow \varphi_0 \quad (\text{débil}). \quad (2)$$

(i) Primero demostremos que $\varphi_0 \neq 0$.

Supongamos que $\varphi_0 = 0$. Se tendría por (1):

$$\widetilde{\varphi}_n \rightarrow \varphi \quad (\text{débil}), \quad (3)$$

luego:

$$\| \varphi \| \leq \underline{\lim} \| \tilde{\varphi}_n \| . \quad (4)$$

De (1), se tiene que $\| \tilde{\varphi}_n \| \leq \| \varphi \|$, o sea

$$\| \varphi \| \geq \overline{\lim} \| \tilde{\varphi}_n \| . \quad (5)$$

De (3) y (5) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}_n = \varphi . \quad (6)$$

Por lo tanto :

$$\langle H \varphi , \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle H_n \tilde{\varphi}_n , \tilde{\varphi}_n \rangle \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \tilde{\varphi}_n , \tilde{\varphi}_n \rangle = \| \varphi \|^2 ,$$

lo cual contradice a la hipótesis . Luego $\varphi_0 \neq 0$.

(ii) De (2) se tiene :

$$(H_n)^\nu \tilde{\tilde{\varphi}}_n \rightarrow H^\nu \varphi_0 \quad (\text{débil}), \text{ para todo } \nu ,$$

luego

$$\| H^\nu \varphi_0 \| \leq \underline{\lim} \| (H_n)^\nu \tilde{\tilde{\varphi}}_n \| \leq \underline{\lim} \| \tilde{\tilde{\varphi}}_n \| \leq \| \varphi \| \quad (\text{para todo } \nu)$$

esto es ,

$$\overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} \| H^\nu \varphi_0 \| \leq \| \varphi \| < + \infty \quad (7)$$

[II]

$$||H^\nu \varphi_o||^2 = \langle H^\nu \varphi_o, H^\nu \varphi_o \rangle = \langle H^{\nu+1} \varphi_o, H^{\nu-1} \varphi_o \rangle \leq ||H^{\nu+1} \varphi_o|| ||H^{\nu-1} \varphi_o||,$$

por consiguiente :

$$\frac{||H^\nu \varphi_o||}{||H^{\nu-1} \varphi_o||} \leq \frac{||H^{\nu+1} \varphi_o||}{||H^\nu \varphi_o||} \quad (\text{para todo } \nu).$$

Esto es, la sucesión $\{ ||H^\nu \varphi_o|| / ||H^{\nu-1} \varphi_o|| \}$ es creciente. Si su límite es mayor que 1 se tiene que la sucesión $\{ ||H^\nu \varphi_o|| \}$ diverge a $+\infty$.

Por lo tanto, de (7) :

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} ||H^\nu \varphi_o|| / ||H^{\nu-1} \varphi_o|| \leq 1,$$

o sea ,

$$\frac{||H^\nu \varphi_o||}{||H^{\nu-1} \varphi_o||} \leq 1, \quad \text{para todo } \nu. \quad (8)$$

O sea que la sucesión $\{ ||H^\nu \varphi_o|| \}$ es decreciente , por lo tanto tiene límite finito .

■

Nótese que

$$||H \varphi_o|| \leq ||\varphi_o|| \quad (9)$$

COROLARIO.

Sea H un operador hermítico, positivamente definido tal que

$$m \|\varphi\| \leq \|H\varphi\| \leq M \|\varphi\| \quad (m, M \text{ son constantes})$$

para todo $\varphi \in \mathcal{H}_0$, entonces se tiene :

$$m \|\varphi\|^2 \leq \langle H\varphi, \varphi \rangle \leq M \|\varphi\|^2.$$

Demostración.

$$(i) \quad \langle H\varphi, \varphi \rangle \leq \|H\varphi\| \|\varphi\| \leq M \|\varphi\| \|\varphi\| = M \|\varphi\|^2$$

(ii) Supongamos que existe φ tal que

$$\langle H\varphi, \varphi \rangle < m \|\varphi\|^2.$$

Entonces existe $r < m$ tal que

$$\langle H\varphi, \varphi \rangle < r \|\varphi\|^2.$$

Aplicando el Lema 1 al operador H/r , por (9) existe un elemento

$\varphi_0 \neq 0$ tal que

$$\left\| \frac{H}{r} \varphi_0 \right\| \leq \|\varphi_0\|,$$

esto es,

$$\|H\varphi_0\| \leq r \|\varphi_0\| < m \|\varphi_0\| \quad (\text{absurdo !})$$

TEOREMA 1.

Sea T un operador acotado de \mathcal{H}_1 en \mathcal{H}_2 , si

$$\sup \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} = M, \quad \inf \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} = m \quad (M \neq m)$$

entonces para todo $\lambda, m < \lambda < M$, existe una descomposición del espacio

\mathcal{H}_1 :

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$$

tal que

$$[1] \quad \varphi \in \mathcal{M}_1, \psi \in \mathcal{M}_2 \quad \text{implica} \quad \langle T\varphi, T\psi \rangle = 0$$

$$[2] \quad \sup_{\varphi \in \mathcal{M}_2} \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} \leq \lambda \leq \inf_{\varphi \in \mathcal{M}_1} \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|}.$$

OBSERVACION .

Abreviadamente se nota la propiedad [1] como sigue :

$$T\mathcal{M}_1 \perp T\mathcal{M}_2, \quad \text{o} \quad \langle T\mathcal{M}_1, T\mathcal{M}_2 \rangle = 0.$$

Demostración.

Sea $H = T^*T$ (T^* es el adjunto de T) entonces H es her -

mítico y positivamente definido. Sean

$$\mathcal{M}_2 = \{ \varphi \in \mathcal{H} / \lim_{\nu \rightarrow \infty} \| (\frac{H}{\lambda^2})^\nu \varphi \| < +\infty \} ,$$

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{H} \ominus \mathcal{M}_2 .$$

(i) Si $a \in \mathcal{M}_2$, $a \neq 0$ entonces se tiene que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \| (\frac{H}{\lambda^2})^\nu a \| < +\infty .$$

Por (9)

$$\| \frac{H}{\lambda^2} a \| \leq \| a \| ,$$

o sea

$$\| H a \| \leq \lambda^2 \| a \| .$$

Por lo tanto :

$$\| T a \|^2 = \langle H a , a \rangle \leq \| H a \| \| a \| \leq \lambda^2 \| a \|^2 ,$$

esto es :

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{M}_2} \frac{\| T \varphi \|}{\| \varphi \|} \leq \lambda .$$

(ii) Supongamos que :

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{M}_1} \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} < \lambda.$$

Entonces existe $b \in \mathcal{M}_1$ tal que

$$\langle Hb, b \rangle = \|Tb\|^2 < \lambda^2 \|b\|^2.$$

Como $Hb, H^2b, \dots \in \mathcal{M}_1$, por el Lema 1 existe $b_0 \in \mathcal{M}_1$ tal que

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\| \left(\frac{H}{\lambda^2} \right)^\nu b_0 \right\| < +\infty,$$

o sea que $b_0 \in \mathcal{M}_2$ (absurdo!). Por lo tanto :

$$\inf_{\varphi \in \mathcal{M}_1} \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} \geq \lambda.$$

(iii) Sean $\varphi \in \mathcal{M}_1$, $\psi \in \overline{\mathcal{M}_2}$. Entonces

$$H\varphi \in \mathcal{M}_1,$$

luego

$$\langle T\varphi, T\psi \rangle = \langle H\varphi, \psi \rangle = 0$$

■

COROLARIO.

Sea T un operador acotado de \mathcal{H} en \mathcal{H} con $\|T\| = M$. Sean

$$\lambda_0 = M > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > \lambda_{n+1} > \dots \rightarrow 0,$$

entonces existe una familia de subespacios $\{\mathcal{M}_k, k=0, 1, 2, \dots\}$

tal que

$$(i) \quad \mathcal{H} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \dots = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k.$$

$$(ii) \quad \langle T \mathcal{M}_k, T \mathcal{M}_j \rangle = 0 \quad \text{si} \quad k \neq j.$$

$$(iii) \quad \sup_{\varphi \in \mathcal{M}_k} \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} \leq \lambda_{k-1}, \quad \inf_{\varphi \in \mathcal{M}_k} \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} \geq \lambda_k, \quad T\mathcal{M}_0 = 0$$

OBSERVACION.

\mathcal{M}_0 es el núcleo de T , y \mathcal{M}_k es el subespacio correspondiente al intervalo $[\lambda_k, \lambda_{k-1}]$. Esta descomposición se llama "una partición del espacio \mathcal{H} correspondiente a la partición :

$$\{M = \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots, 0\}.$$

De (i) y (ii) se tiene :

$$T\mathcal{H} = T\mathcal{M}_0 \oplus T\mathcal{M}_1 \oplus T\mathcal{M}_2 \oplus \dots = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T\mathcal{M}_k.$$

Demostración.

Aplicando el Teorema 1 para $\lambda = \lambda_k$ existen π_k y π'_k tales que

$$\rho_{\mathcal{D}} = \pi_k \oplus \pi'_k, \quad \langle T \pi_k, T \pi'_k \rangle = 0,$$

$$\inf_{\varphi \in \pi'_k} \frac{\|T \varphi\|}{\|\varphi\|} \geq \lambda_k, \quad \sup_{\varphi \in \pi_k} \frac{\|T \varphi\|}{\|\varphi\|} \leq \lambda_k.$$

Sean

$$\pi_k = \pi_{k-1} \ominus \pi_k,$$

$$\pi_0 = \text{el núcleo de } T,$$

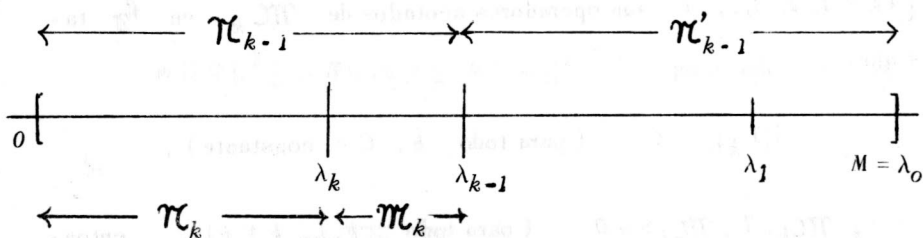


Fig. 1

entonces

$$\pi = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \pi_k = \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \dots$$

es un subespacio de \mathcal{H} . Si $\varphi \in \mathcal{H} \ominus \mathcal{M}$ entonces

$$\varphi \perp \mathcal{M}_k' \quad (\text{para todo } k)$$

o sea :

$$\|T\varphi\| \leq \lambda_k \|\varphi\| \quad (\text{para todo } k).$$

Esto es $\|T\varphi\| = 0$, ya que $\lambda_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$, o sea que $\varphi \in \mathcal{M}_0$. Por lo tanto tenemos :

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k$$

OBSERVACION .

Sea $\{\mathcal{M}_k, k=1, 2, 3, \dots\}$ una familia de subespacios de \mathcal{H} y si $T_k (k=1, 2, 3, \dots)$ son operadores acotados de \mathcal{M}_k en \mathcal{H} tales que

$$\|T_k\| \leq C \quad (\text{para todo } k; C = \text{constante}),$$

$\langle T_k \mathcal{M}_k, T_j \mathcal{M}_j \rangle = 0 \quad (\text{para todo } k, j, k \neq j)$, entonces se puede definir un operador T como sigue :

$$T\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} T_k \varphi_k$$

donde φ_k es la proyección de φ sobre \mathcal{M}_k . En realidad :

$$\varphi = \sum_1^\infty \varphi_k, \quad ||\varphi||^2 = \sum_1^\infty ||\varphi_k||^2$$

luego :

$$\sum_k ||T_k \varphi_k||^2 \leq C^2 \sum_k ||\varphi_k||^2 = C^2 ||\varphi||^2,$$

esto es, el operador T está bien definido para todo $\varphi \in \oplus_k \mathcal{M}_k$, además C es una cota de T . Evidentemente, la restricción de T al subespacio \mathcal{M}_k es igual a T_k .

§ 3. Operadores acotados con inverso acotado.

LEMA 2.

Sea H un operador hermítico tal que

$$m ||\varphi||^2 \leq \langle H\varphi, \varphi \rangle \leq M ||\varphi||^2 \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{H}.$$

Si

$$\varepsilon = \sqrt{m(M-m)} \ll m \quad (10)$$

entonces

$$\langle \varphi, \psi \rangle = 0 \quad \text{implica} \quad |\langle H\varphi, \psi \rangle| \leq \varepsilon ||\varphi|| ||\psi||.$$

NOTA.

La condición (10) es equivalente a

$$\frac{M}{m} \ll 2 \quad (11)$$

Demostración.

Sin pérdida de generalidad supongamos :

$$\langle H \varphi, \psi \rangle = a > 0, \quad \|\varphi\| = \|\psi\| = 1.$$

Si $\tau = \varphi + t\psi$ ($t = \text{real}$) se tiene :

$$\begin{aligned} \frac{\langle H \tau, \tau \rangle}{\|\tau\|^2} &= \frac{\langle H \varphi + t H \psi, \varphi + t \psi \rangle}{1 + t^2} \\ &= \frac{\langle H \varphi, \varphi \rangle}{1 + t^2} + \frac{2 a t}{1 + t^2} + t^2 \frac{\langle H \psi, \psi \rangle}{1 + t^2} \geq \frac{1}{1 + t^2} \{ m + 2 a t + m t^2 \}. \end{aligned}$$

Tomando $t = a/m$ se obtiene :

$$M \geq \frac{\langle H \tau, \tau \rangle}{\|\tau\|^2} \geq \frac{m}{1 + \frac{a^2}{m^2}} \left(1 + \frac{3 a^2}{m^2} \right)$$

o sea :

$$a^2 \leq m^2 \frac{M - m}{3m \cdot M} \leq \epsilon^2$$

ya que

$$\frac{3m \cdot M}{m} = 3 - \frac{M}{m} = 1 + (2 - \frac{M}{m}) > 1.$$

NOTA .

Se puede modificar la hipótesis del Lema 2 como sigue :

$$m || \varphi ||^2 \leq | \langle H \varphi, \varphi \rangle | \leq M || \varphi ||^2, \quad \text{para todo } \varphi \in \mathcal{H}.$$

Demostración.

Si existen $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ tales que

$$\langle H \varphi, \varphi \rangle > 0, \quad \langle H \psi, \psi \rangle < 0$$

entonces tenemos, para t real :

$$\langle H(\varphi + t\psi), \varphi + t\psi \rangle = t^2 \langle H \varphi, \varphi \rangle + 2t \operatorname{Re} \langle H \varphi, \psi \rangle + \langle H \psi, \psi \rangle,$$

por lo tanto existe un valor real de t tal que

$$\langle H(\varphi + t\psi), (\varphi + t\psi) \rangle = 0 < m || \varphi + t\psi ||^2,$$

y esto contradice a la hipótesis .

Por lo tanto, H es positivamente definido, ó , H es negativamente definido. Si H es negativamente definido, se aplica el Lema 2 al operador

$-H$.

COROLARIO 1.

Sea T un operador acotado, si $\frac{||T \varphi||}{||\varphi||} = \text{constante para todo } \varphi$
entonces

$$\langle \varphi, \psi \rangle = 0 \quad \text{implica} \quad \langle T \varphi, T \psi \rangle = 0 .$$

COROLARIO 2 .

Si $\frac{||T \varphi||}{||\varphi||} = \lambda$ (constante) para todo $\varphi \in H$, entonces T
es un operador de Schatten .

En realidad, para cualquier sistema ortonormal completo $\{ \varphi_k \}$ tenemos:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} (T \varphi_k) \otimes \varphi_k .$$

■

COROLARIO 3.

Sea H un operador hermítico tal que

$$\frac{||H \varphi||}{||\varphi||} = \lambda \quad (\text{ constante }) .$$

Entonces existe un sistema ortonormal completo, $\{ \tilde{\varphi}_k, \tilde{\tilde{\varphi}}_k \}$, tal que

$$H = \sum \lambda \tilde{\varphi}_k \otimes \tilde{\varphi}_k + \sum (-\lambda) \tilde{\tilde{\varphi}}_k \otimes \tilde{\tilde{\varphi}}_k .$$

Demostración.

Los valores propios de H (si existen) son λ ó $-\lambda$.

Sean

\mathcal{H}_+ = el subespacio determinado por todos los vectores propios correspondientes al valor propio λ ,

\mathcal{H}_- = el subespacio determinado por todos los vectores propios correspondientes al valor propio $-\lambda$,

entonces :

$$\langle \mathcal{H}_+, \mathcal{H}_- \rangle = 0, \quad H(\mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-) = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-.$$

Sea

$$\mathcal{M} = \mathcal{H} \ominus \{ \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \},$$

entonces

$$H\mathcal{M} \perp H(\mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-),$$

esto es :

$$H\mathcal{M} \subset \mathcal{M}.$$

Si existe un $\varphi_1 \in \mathcal{M}$ tal que $\langle H\varphi_1, \varphi_1 \rangle = 0$ entonces

$$\varphi_2 = \frac{1}{\lambda} H\varphi_1 \perp \varphi_1,$$

por lo tanto, $\{ \varphi_1, \varphi_2, \dots \}$ es una base ortonormal.

Tenemos :

$$\langle H\varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \lambda \varphi_2, \varphi_2 \rangle = \lambda = \langle \varphi_1, H\varphi_2 \rangle,$$

luego

$$H \varphi_2 = \lambda \varphi_1 + \dots$$

Como $\| H \varphi_2 \| = \lambda$ se tiene $H \varphi_2 = \lambda \varphi_1$.

Por lo tanto se obtiene :

$$H(\varphi_1 + \varphi_2) = \lambda (\varphi_1 + \varphi_2), \quad H(\varphi_1 - \varphi_2) = -\lambda (\varphi_1 - \varphi_2),$$

esto es imposible ya que H no tiene vectores propios en \mathcal{M} .

O sea que

$$\langle H \varphi, \varphi \rangle \neq 0 \quad (\text{para todo } \varphi \in \mathcal{M}).$$

Si para algunos $\varphi, \psi \in \mathcal{M}$ tenemos

$$\langle H \varphi, \varphi \rangle > 0, \quad \langle H \psi, \psi \rangle < 0,$$

por la demostración de la Nota del Lema 2 existe un t real tal que

$$\langle H(\varphi + t\psi), (\varphi + t\psi) \rangle = 0 \quad (\text{imposible!}),$$

esto es, H es positivamente definido o negativamente definido en \mathcal{M} .

Si H es positivamente definido, por el Corolario del Lema 1 tenemos :

$$\langle H \varphi, \varphi \rangle = \lambda \|\varphi\|^2$$

por lo tanto :

$$H \varphi = \lambda \varphi ,$$

pero esto es imposible puesto que no hay vectores propios en \mathcal{M} .

De la misma manera H no puede ser negativamente definido. Así se concluye que $\mathcal{M} = \{0\}$ o sea :

$$h_{\mathcal{H}} = h_{\mathcal{H}^+} \oplus h_{\mathcal{H}^-} .$$

Si $\{\tilde{\varphi}_k\}$ es una base ortonormal de $h_{\mathcal{H}^+}$ y $\{\tilde{\tilde{\varphi}}_b\}$ es una base ortonormal de $h_{\mathcal{H}^-}$ se tiene :

$$H = \sum_k \lambda \tilde{\varphi}_k \otimes \tilde{\varphi}_k + \sum_b (-\lambda) \tilde{\tilde{\varphi}}_b \otimes \tilde{\tilde{\varphi}}_b .$$

■

TEOREMA 2 .

Sea T un operador acotado de $h_{\mathcal{H}}$ sobre $h_{\mathcal{H}}$ tal que

$$\sup_{\varphi \in h_{\mathcal{H}}} \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} = M , \quad \inf_{\varphi \in h_{\mathcal{H}}} \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} = m > 0 . \quad (12)$$

Si $\varepsilon = \sqrt{m(M-m)} \ll m$, entonces existe un operador de Schatten, S tal que

$$\|T - S\| < \varepsilon , \quad \|T^{*I} - S^{*I}\| < \frac{\varepsilon}{mM}$$

Sea

$$y = ax + \tilde{x}, \quad \langle x, \tilde{x} \rangle = 0$$

entonces :

$$\bar{a} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\sum_i x_i \bar{y}_i}{\|x\|^2}$$

Tenemos :

$$\langle Cx, y \rangle = \langle Cx, ax \rangle + \langle Cx, \tilde{x} \rangle$$

$$= \bar{a} \langle Cx, x \rangle + \langle Cx, \tilde{x} \rangle$$

$$= \frac{\sum_i x_i \bar{y}_i}{\|x\|^2} \langle Cx, x \rangle + \langle Cx, \tilde{x} \rangle. \quad (17)$$

De (16) y (17) :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \neq k} C_{ik} x_i \bar{y}_k \right| &\leq \left| \sum_i x_i \bar{y}_i \left\{ \frac{\langle Cx, x \rangle}{\|x\|^2} - C_{ii} \right\} \right| + |\langle Cx, \tilde{x} \rangle| \\ &\leq \sum_i |x_i \bar{y}_i| \left| \frac{\langle Cx, x \rangle}{\|x\|^2} - \frac{\langle C\varphi_i, \varphi_i \rangle}{\|\varphi_i\|^2} \right| + |\langle Cx, \tilde{x} \rangle| \end{aligned}$$

(por el Corolario del Teorema 1 y por el Lema 2)

$$\leq \|x\| \|y\| (M \cdot m) + \varepsilon \|x\| \|y\| = \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\right) \|x\| \|y\| \approx \varepsilon \|x\| \|y\|, \quad (18)$$

puesto que $\varepsilon \ll m$.

Si en la desigualdad (18) tomamos

$$y_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\infty} C_{ij} x_i,$$

tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} C_{ik} x_i \right|^2 \leq \varepsilon \|x\| \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} C_{ik} x_i \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

esto es

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} C_{ik} x_i \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \left\{ \sum_i |x_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (19)$$

Por lo tanto :

$$\left\| \sum_i x_i T \varphi_i - \sum_{k=1}^{\infty} C_{kk} x_k \psi_k \right\| \quad (\text{por (14)})$$

$$= \left\| \sum_{k,i} x_i C_{ik} \psi_k - \sum_{k=1}^{\infty} C_{kk} x_k \psi_k \right\|$$

$$= \left\| \sum_k \left\{ \sum_{i \neq k} x_i C_{ik} \right\} \psi_k \right\| = \left\{ \sum_k \left| \sum_{i \neq k} C_{ik} x_i \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \varepsilon \left\{ \sum_i |x_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

Definimos ahora el operador de Schatten S como sigue :

$$S = \sum_k C_{kk} \psi_k \otimes \varphi_k \quad (\text{ó} \quad S \varphi_k = C_{kk} \psi_k). \quad (21)$$

Entonces, para $x = \sum x_i \varphi_i$, se tiene :

$$\|Tx - Sx\| = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x_i T\varphi_i - \sum_k C_{kk} x_k \psi_k \right\| \leq \varepsilon \|x\| ,$$

esto es :

$$\|T - S\| \leq \varepsilon . \quad (22)$$

También, de (21) y de (14) :

$$S^{-1} : S^{-1}\psi_k = \frac{1}{C_{kk}} \varphi_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (23)$$

$$T^{-1} : T^{-1}\psi_k = \sum_i B_{ki} \varphi_i , \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\frac{1}{M} \leq \frac{\|T^{-1}\varphi\|}{\|\varphi\|} \leq \frac{1}{m} .$$

Aplicando el procedimiento anterior al operador T^{-1} se tiene :

$$\|T^{-1} - S^{-1}\| \leq \varepsilon' \quad (24)$$

donde

$$\varepsilon' = \sqrt{\frac{1}{M} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M} \right)} = \frac{\varepsilon}{mM} \ll \frac{1}{M}$$

ya que $\varepsilon \ll m$.

Nótese que el operador S definido en (21) es hermítico si T es her-

mítico y positivamente definido puesto que :

$$C^*C = C^2 = H = T^*T = T^2 ,$$

$$C = T ,$$

por (15) :

$$\psi_i = \varphi_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots) .$$

§ 4. Densidad de los operadores de Schatten.

TEOREMA 3.

Sea T un operador acotado de \mathcal{H} sobre $\mathcal{H}_1 = T \mathcal{H}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe un operador de Schatten S tal que

$$\|T - S\| < \varepsilon , \quad T \mathcal{H} = S \mathcal{H} .$$

Si T^{-1} existe entonces existe S^{-1} y

$$\|T^{-1} - S^{-1}\| < \varepsilon \quad (\text{en } \mathcal{H}_1) .$$

Demostración.

Sea $M = \|T\|$. Dado $\varepsilon > 0$ existe N (natural) tal que

$$\frac{\sqrt{\log N}}{\sqrt{N}} < \varepsilon .$$

Consideremos la siguiente partición del intervalo $(0, M]$:

$$M = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n = \frac{1}{\log N}, \frac{1}{\log(N+1)}, \dots, \frac{1}{\log(N+k)}, \dots \rightarrow 0 \quad (25)$$

donde

$$(\log N)^4 (\lambda_{j-1} - \lambda_j) \lambda_j < \varepsilon^2 . \quad (26)$$

Correspondiente a la partición (25) obtenemos la partición del espacio \mathcal{H} (ver el Corolario del Teorema 1) :

$$\pi_0 \oplus \pi_1 \oplus \pi_2 \oplus \dots \oplus \pi_n \oplus \tilde{\pi}_1 \oplus \tilde{\pi}_2 \oplus \dots \oplus \tilde{\pi}_k \oplus \dots$$

donde π_0 es el núcleo de T , π_k es el subespacio correspondiente al intervalo $[\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ y $\tilde{\pi}_k$ es el subespacio correspondiente a

$$\left[\frac{1}{\log(N+k)}, \frac{1}{\log(N+k+1)} \right] .$$

Definimos los operadores de Schatten, S_0, S_k, \tilde{S}_j de acuerdo con el Teorema 2, correspondientes a las restricciones de T a los subespacios π_0, π_k y $\tilde{\pi}_j$ respectivamente. Entonces :

$$S_0 = T \quad \text{en} \quad \pi_0 ,$$

$$\left. \begin{aligned} \|S_k - T\| &< \sqrt{\lambda_k(\lambda_{k-1} \cdot \lambda_k)} < \varepsilon && \text{en } \mathcal{M}_k, \\ \| \tilde{S}_j - T \| &< \frac{\log(1 + \frac{1}{N})}{\log(N+1)\sqrt{\log N}} < \varepsilon && \text{en } \tilde{\mathcal{M}}_j. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Por la observación final del § 2 se puede construir un operador de Schatten S como sigue :

$$S = S_0 \quad \text{en } \mathcal{M}_0, \quad S = S_k \quad \text{en } \mathcal{M}_k \quad \text{y} \quad S = \tilde{S}_j \quad \text{en } \tilde{\mathcal{M}}_j.$$

De (27) tenemos :

$$\|S - T\| < \varepsilon.$$

Evidentemente se tiene :

$$T h_0 = S h_0.$$

Si T^{-1} existe, entonces $\mathcal{M}_0 = \{0\}$; como S_k, \tilde{S}_j son invertibles también lo es el operador S . De (24) tenemos :

$$\|S_k^{-1} - T^{-1}\| \leq \varepsilon' \quad \text{en } \mathcal{M}_k,$$

$$\|S_j^{-1} - T^{-1}\| \leq \varepsilon'' \quad \text{en } \tilde{\mathcal{M}}_j,$$

donde :

$$\varepsilon' = \sqrt{\lambda_k(\lambda_{k-1} + \lambda_k)} / \lambda_k \lambda_{k-1} < \varepsilon ,$$

$$\varepsilon'' = \left\{ \log(N+k-1) \log \frac{N+k}{N+k-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \approx \left\{ \frac{\log(N+k-1)}{N+k-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\sqrt{\log N}}{\sqrt{N}} < \varepsilon ,$$

por lo tanto :

$$\|T^{-1} - S^{-1}\| < \varepsilon \quad \text{en} \quad \mathcal{H}_1 .$$

COROLARIO 1

Sea T un operador acotado, hermítico y positivamente definido, entonces el operador S en el Teorema 3 es hermítico de la forma :

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k \otimes \varphi_k , \quad \lambda_k \geq 0 .$$

(Ver la observación final del § 3) .

COROLARIO 2 .

Sea T un operador tal que $\inf \frac{\|T\varphi\|}{\|\varphi\|} > 0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe un operador de Schatten, S tal que

$$\|T - S\| < \varepsilon$$

Demostración .

En \mathcal{H}_1 el operador T^{-1} está definido y es acotado .

Basta entonces aplicar el Teorema 3 al operador T^{-1} . ■

COROLARIO 3.

Sea H un operador hermítico y positivamente definido. Dado $\varepsilon > 0$ existe un operador de Schatten, $S = \sum_k \mu_k \varphi_k \otimes \varphi_k$, tal que :

$$\| H - S \| < \varepsilon$$

Demostración.

$H + I$ satisface la condición del Corolario 2, luego existe un operador S_I de la forma :

$$S_I = \sum_k \lambda_k \varphi_k \otimes \varphi_k$$

tal que

$$\| H + I - S_I \| < \varepsilon .$$

Considérese entonces

$$S = S_I - I = \sum_k (\lambda_k - 1) \varphi_k \otimes \varphi_k .$$

Nótese que

$$\lambda_k - 1 \geq 0 .$$

Ahora, consideremos un operador T , no necesariamente acotado, tal que el dominio de T^*T es denso en el espacio \mathcal{H} . Por el Corolario 3, dado $\varepsilon > 0$ existe un operador de Schatten

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \varphi_k \otimes \varphi_k \quad (\mu_k \geq 0)$$

tal que

$$\|T^*T - S\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{Supóngase : } \varepsilon < 1).$$

Sean

$$\mathcal{M} = \{ \varphi_k / \mu_k \geq 1 \},$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{M} = \{ \varphi_k / \mu_k < 1 \}.$$

Si $\varphi \in \mathcal{M}$ tenemos :

$$\|T^*T \varphi - S \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi\|$$

luego :

$$\|T^*T \varphi\| > (1 - \frac{\varepsilon}{2}) \|\varphi\|$$

ya que

$$\|S \varphi\| \geq \|\varphi\| \quad \text{si} \quad \varphi \in \mathcal{M}.$$

Por el Corolario 1, Lema 1, para todo $\varphi \in \mathcal{M}$ tenemos :

$$\|T\varphi\|^2 = \langle T\varphi, T\varphi \rangle = \langle T^*T\varphi, \varphi \rangle > (1 - \frac{\varepsilon}{2}) \|\varphi\|^2, \quad (28)$$

Por el Corolario 2 de este párrafo existe un operador de Schatten, S_1 , definido en \mathcal{M} , tal que

$$\|T - S_1\|_{\mathcal{M}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad T\mathcal{M} = S_1\mathcal{M}. \quad (29)$$

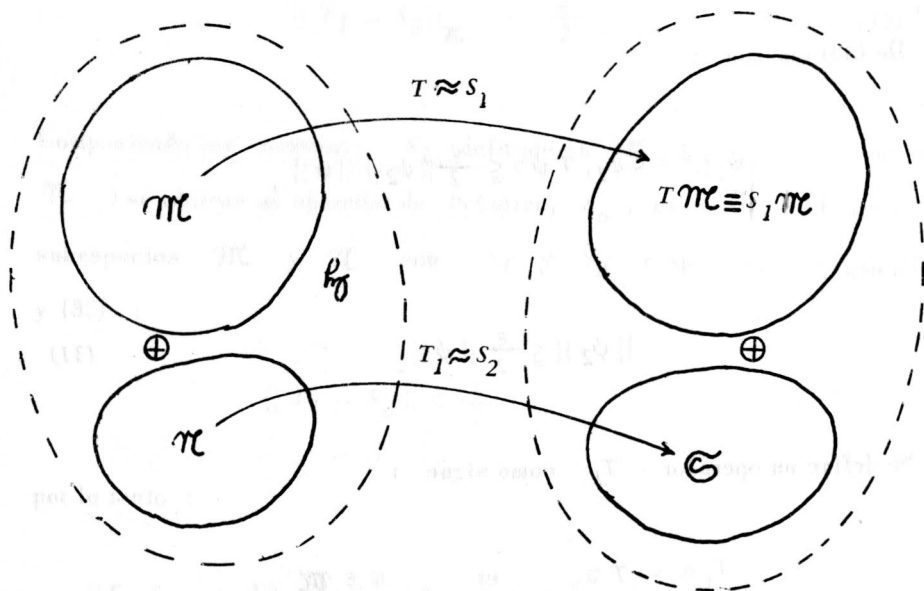


Fig. 2

Si $\varphi \in \mathcal{M}$, $\psi \in \mathcal{N} = h_2 \ominus \mathcal{M}$

tenemos :

$$\begin{aligned} |\langle T\varphi, T\psi \rangle| &= |\langle T\varphi, T\psi \rangle - \langle S\varphi, \psi \rangle| \\ &= |\langle (T^*T - S)\varphi, \psi \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\varphi\| \|\psi\| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \|T^{-1}T\varphi\| \|\psi\| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \|T\varphi\| \|\psi\| \approx \frac{\varepsilon}{2} \|T\varphi\| \|\psi\| \quad (30) \end{aligned}$$

Sea

$$\mathcal{G} = h_0 \ominus s_1 \pi = h_0 \ominus T \pi ,$$

Dado $\psi \in \pi$, descompongamos $T\psi$ como sigue :

$$T\psi = \psi_1 + \psi_2 , \psi_1 \in \mathcal{G} , \psi_2 \in \overline{s_1 \pi} = \overline{T\pi} .$$

De (30) tenemos :

$$\|\psi_2\|^2 = \langle \psi_2, T\psi \rangle \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\psi_2\| \|\psi\| ,$$

o sea

$$\|\psi_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\psi\| . \quad (31)$$

Se define un operador T_I como sigue :

$$T_I \varphi = T\varphi \quad \text{si} \quad \varphi \in \pi ,$$

$T_I \psi = \psi_1 =$ la proyección de $T\psi$ sobre \mathcal{G} , si $\psi \in \pi$.

De (31) se sigue que

$$\|T - T_I\| < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

Como T es acotado en π ($1 + \frac{\varepsilon}{2}$ es una cota), T_I es acotado

en \mathcal{M} y $T_1 \mathcal{M} \subset \mathcal{E}$. 0 sea :

$$\langle T_1 \mathcal{M}, T_1 \mathcal{M} \rangle = 0.$$

Por el Teorema 3, existe un operador de Schatten S_2 de \mathcal{M} en \mathcal{E} , tal que :

$$\|T_1 - S_2\|_{\mathcal{M}} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (32)$$

Componiendo los operadores S_1 (definido en \mathcal{M}) y S_2 (definido en \mathcal{M}) se obtiene un operador de Schatten, S_o , cuyas restricciones a los subespacios \mathcal{M} y \mathcal{N} son S_1 y S_2 respectivamente. De (29) y (32) :

$$\|T_1 - S_o\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

por lo tanto :

$$\|T - S_o\| \leq \|T - T_1\| + \|T_1 - S_o\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Así obtenemos el siguiente teorema :

TEOREMA 4.

Sea T un operador no necesariamente acotado tal que el dominio \mathcal{D} de T^*T es denso en \mathcal{H}_0 . Dado $\varepsilon > 0$ existe un operador de Schatten S_o , definido en \mathcal{D} , tal que $T - S_o$ es acotado y :

$$\|T - S_0\| < \varepsilon.$$

■

Observación.

Un operador no siempre es aproximable por los operadores de Schatten.

EJEMPLO 2.

Sea $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ un sistema ortonormal completo en el espacio \mathcal{H} y sea \mathcal{D} el espacio lineal (no necesariamente cerrado) determinado por $\{e_1, e_2, \dots\}$. Definimos un operador T en \mathcal{D} como sigue :

$$T e_k = e_1 \quad (\text{para todo } k).$$

Entonces el dominio \mathcal{D}^* del operador adjunto T^* es $\mathcal{H} \ominus \{e_1\}$.

Demostración.

Si $\varphi \in \mathcal{H} \ominus \{e_1\}$ entonces

$$\langle T f, \varphi \rangle = 0 = \langle f, 0 \rangle \quad \text{para todo } f \in \mathcal{D}$$

esto es :

$$T^* \varphi = 0.$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}^*$, descomponiendo φ como sigue :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \varphi_1 \in \{e_1\}, \quad \varphi_2 \in \mathcal{H} \ominus \{e_1\},$$

entonces, para todo $f \in \mathcal{D}$, tenemos

$$\langle Tf, \varphi \rangle = \langle Tf, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle Tf, \varphi_1 \rangle = \langle f, T^* \varphi \rangle,$$

o sea

$$\varphi_1 \in \mathcal{D}^*.$$

Si $\varphi_1 \neq 0$ entonces $e_1 \in \mathcal{D}^*$ (imposible!), esto es:

$$\varphi_1 = 0,$$

o sea que:

$$\mathcal{D}^* \subset \mathcal{H} \ominus \{e_1\},$$

esto es:

$$\mathcal{D}^* = \mathcal{H} \ominus \{e_1\}.$$

Supongamos que para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existe S tal que

$$S : S\varphi_k = \mu_k \psi_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\|S - T\| < \varepsilon.$$

Sea

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{\infty} u_{kj} e_j \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

donde (u_{kj}) es una matriz unitaria. Tenemos :

$$\text{luego } \|S\varphi_k - T\varphi_k\| < \varepsilon, \quad T\varphi_k = (\sum_{j=1}^{\infty} u_{kj}) e_1,$$

$$\|T\varphi_k\| = |\sum_{j=1}^{\infty} u_{kj}| > \|S\varphi_k\| - \varepsilon = |\mu_k| - \varepsilon.$$

Para $k \neq b$:

$$|\langle T\varphi_k, T\varphi_b \rangle| = |\langle (T\varphi_k - S\varphi_k) + S\varphi_k, (T\varphi_b - S\varphi_b) + S\varphi_b \rangle|$$

$$= |\langle (T-S)\varphi_k, (T-S)\varphi_b \rangle + \langle (T-S)\varphi_k, S\varphi_b \rangle + \langle S\varphi_k, (T-S)\varphi_b \rangle +$$

$$+ \langle S\varphi_k, S\varphi_b \rangle| \leq \varepsilon^2 + \varepsilon|\mu_b| + \varepsilon|\mu_k|.$$

Por otra parte :

$$|\langle T\varphi_k, T\varphi_b \rangle| = |(\sum_{j=1}^{\infty} u_{kj}) \overline{(\sum_{i=1}^{\infty} u_{bi})}| \geq \{|\mu_k| - \varepsilon\} \{|\mu_b| - \varepsilon\}.$$

Entonces :

$$\varepsilon\{ \varepsilon + |\mu_k| + |\mu_b| \} \geq \{|\mu_k| - \varepsilon\} \{|\mu_b| - \varepsilon\},$$

o sea :

$$|\mu_k| |\mu_b| \leq 2\varepsilon(|\mu_k| + |\mu_b|) = |\mu_k| + |\mu_b|,$$

$$(1 - |\mu_k|)(1 - |\mu_b|) \leq 1.$$

esto es imposible, ya que $\{\mu_k\}$ es una sucesión no acotada (T es un operador no acotado).

■

A P E N D I C E

[I] En el espacio de Hilbert $L_2(1, 2)$, el operador S :

$$S = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4x^2}$$

es hermitico bajo la condición de frontera :

$$\varphi(1) = \varphi(2) = 0.$$

Sean t_n las raíces de la ecuación :

$$J_0(t) Y_0(2t) - J_0(2t) Y_0(t) = 0.$$

Entonces, los elementos propios del operador S correspondientes a los valores propios $\lambda_n = (t_n)^2$ son :

$$\varphi_n = C_n \sqrt{x} \{ J_0(t_n x) Y_0(t_n) - Y_0(t_n x) J_0(t_n) \}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

donde C_n es la constante de normalización. Por la teoría de Titchmarsh^[4] se sabe que $\{\varphi_n\}$ es un sistema completo, por lo tanto se tiene :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n \otimes \varphi_n \quad (\lambda_n = (t_n)^2).$$

[II] Si un operador T es de Schatten :

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k \otimes \varphi_k$$

entonces se tiene :

$$\langle T \varphi_k, \psi_l \rangle = \langle \lambda_k \psi_k, \psi_l \rangle = \lambda_l \delta_{k,l} = \langle \varphi_k, \overline{\lambda_l} \varphi_l \rangle \quad (\text{para todo } k)$$

esto es, ψ_l ($l = 1, 2, 3, \dots$) pertenecen al dominio de T^* .

Tenemos :

$$T^* T \varphi_k = T^* (\lambda_k \psi_k) = |\lambda_k|^2 \varphi_k$$

o sea :

$$T^* T = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \varphi_k \otimes \varphi_k,$$

esto es, los elementos propios del operador $T^* T$ forman una base ortonormal del espacio.

El operador $\frac{1}{4x^2} \times$ es acotado en $L_2(1, 2)$, y el operador

$$\left(\frac{1}{4x^2}\right)^* \left(\frac{1}{4x^2}\right) = \frac{1}{16x^4} \times$$

no posee valores propios, razón por la cual el operador $\frac{1}{4x^2} \times$ no es de Schatten.

R E F E R E N C I A S

- [1] Roberto Schatten : Norm ideals of completely continuous operators, Springer Verlag, New York, 1970.
- [2] F. Riesz, B. Nagy: Functional Analysis, Frederick Ungar Pub. Co. Fourth Ed. New York, 1965.
- [3] H. Nakano : Espacio de Hilbert, Kyoritsu, Tokyo, 1945.
- [4] E. C. Titchmarsh : Eigenfunction Expansions, Clarendon Press, Oxford 1962.
- [5] P.A.M. Dirac : The principles of quantum mechanics, Oxford Uni. Press Third Ed. 1947.