Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VI, 1972, págs. 116-124

QUELQUES PROBLÈMES DE CLASSES CARACTÉRISTIQUES SECONDAIRES

par

Daniel **LEHMANN**

Les techniques récemment utilisées par Bott et Haeffliger [1] [2], pour étudier les invariants des feuilletages de codimension q (le cas $q=1$ avait été étudié par Godbillon-Vey [3] au préalable) se généralisent a d'autres situations géométriques que celles des Γ-structures.

1. *NOTATIONS ET RAPPELS.*

Soit $E \to M$ un fibré vectoriel différentiable de fibre $\mathbb{R}^q$ ($\dim M < +\infty$), et $I_q = \mathbb{R}[c_1, \ldots, c_q] = \bigoplus_{p \geq 0} I_q^p$ (degré $c_i = i$) l'algèbre des polynomes sur $End(\mathbb{R}^q)$, à coefficients réels, invariants par $GL(q, \mathbb{R})$.

Pour toute connexion ∇ sur E, de courbure K, on note

$$\lambda(\nabla) : I_q \to A_{\mathbb{C}}^{pair}(M)$$

l'homomorphisme d'algèbres (de Chern-Weil) qui, à tout polynome $\Phi \in I_q^p$, associe la 2-forme fermée $(\frac{i}{2\pi})^p \Phi(K)$.

Si ∇' désigne une autre connexion sur E, on définit une connexion $\tilde{\nabla}$ sur

$E \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ en posant

$$\tilde{\nabla}_X s = t \nabla_X s_t + (1-t) \nabla'_X s_t \quad \text{si} \quad X \in T(M \times \{t\})$$

$$(\text{où} \quad s_t = s|_{M \times \{t\}})$$

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} s = 0 \quad \text{si} \quad s_t \quad \text{ne dépend pas de} \quad t .$$

Notons $\lambda(\nabla, \nabla') : I_q \to A_{\mathbb{C}}^{impair}(M)$ l'application composée $\pi_* \cdot \lambda(\tilde{\nabla})$, où $\pi_* : A_{\mathbb{C}}^{pair}(M \times \mathbb{R}) \to A_{\mathbb{C}}^{impair}(M)$ désigne l'intégration le long des fibres de $M \times [0,1] \to M$:

$$\pi_*(f(x,t)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}) = 0$$

$$\pi_*(f(x,t)\, dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{r-1}}) = \left(\int_0^1 f(x,t)dt\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{r-1}}$$

Rappelons la formule (cf. Bott p. 82 [1]) :

$$d(\lambda(\nabla, \nabla')\Phi) = \lambda(\nabla')\Phi - \lambda(\nabla)\Phi \qquad (*)$$

qui prouve en particulier que la classe de cohomologie de $\lambda(\nabla)\Phi$ ne dépend pas de la connexion ∇.

On notera

$$\lambda : I_q \to H^*(M, \mathbb{C})$$

l'homomorphisme caractéristique, induit par $\lambda(\nabla)$ en cohomologie, et qui prend ses valeurs dans la cohomologie de dimension multiple de 4.

2. *LE PROCESSUS DE BOTT.*

Nous allons généraliser une construction faite par Bott dans le cas du fibré transverse à un feuilletage.

Soient C et C' deux sous-ensembles *connexes non vides* de l'espace (affine) des connexions sur E, et soient I et I' deux idéaux homogènes de I_q tels que

$$I \subset \bigcap_{\nabla \in C} Ker\,\lambda(\nabla) \quad \text{et} \quad I' \subset \bigcap_{\nabla \in C'} Ker\,\lambda(\nabla').$$

Graduons les algèbres quotients I_q/I et I_q/I' en posant $dim\,\bar{\Phi} = dim\,\bar{\bar{\Phi}} = 2$ (degré Φ) (où $\bar{\Phi}$ et $\bar{\bar{\Phi}}$ désignent respectivement les classes modulo I et I' d'un élément homogène Φ de I_q). Graduons l'algèbre extérieure $\Lambda(I_q^+)$ construite sur l'espace vectoriel sous-jacent à l'idéal maximal $I_q^+ = \oplus_{p \geq 1} I_q^p$ de I_q (on oublie la structure d'idéal) en posant $dim\,\Psi = 2$ (degré Ψ)-1, ceci $\forall \Psi \in I_q^+$.

Sur le produit tensoriel gradué d'algèbres

$$W(I,I') = (I_q/I) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} (I_q/I') \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \Lambda(I_q^+)$$

on définit une différentielle d (de degré $+1$), en posant :

$$d(\bar{\Phi} \otimes 1 \otimes 1 = 0$$

$$d(1 \otimes \bar{\bar{\Phi}} \otimes 1) = 0$$

$$d(1 \otimes 1 \otimes \Phi) = 1 \otimes \bar{\bar{\Phi}} \otimes 1 - \bar{\Phi} \otimes 1 \otimes 1 \qquad \forall \Phi \in I_q^+$$

Choisissons une conexion ∇ dans C, et une autre ∇' dans C'. On définit un homomorphisme d'algebres graduées

$$\rho_{\nabla,\nabla'} : W(I,I') \to A^*_{\mathbb{C}}(M)$$

en posant :

$$\rho_{\nabla,\nabla'}(\Phi \otimes 1 \otimes 1) = \lambda(\nabla)\,\Phi$$
$$\rho_{\nabla,\nabla'}(1 \otimes \Phi \otimes 1) = \lambda(\nabla')\,\Phi$$
$$\rho_{\nabla,\nabla'}(1 \otimes 1 \otimes \Phi) = \lambda(\nabla,\nabla')\,\dot{\Phi}$$

La formule (*) montre que $\rho_{\nabla,\nabla'}$ commute avec les différentielles. La connexité des ensembles C et C' permet de montrer que l'homomorphisme d'algèbres

$$\rho : H^*(W(I,I')) \to H^*(M,\mathbb{C})$$

induit en cohomologie par $\rho_{\nabla,\nabla'}$ ne dépend pas des connexions ∇ et ∇' choisies respectivement dans C et C'.

Nous appellerons *algèbre caractéristique d'ordre 2* **(associée à I, I', C, C') la sous-algèbre $Im\,\rho$ de $H^*(M,\mathbb{C})$, et** *classes caractéristiques secondaires* **(ou exotiques d'ordre 2) les éléments de $Im\,\rho - Im\,\lambda$ $[Im\,\lambda \subset Im\,\rho]$.**

Les classes caractéristiques secondaires apparaissent alors comme des *obstructions à ce que C et C' aient une intersection non vide* **(les classes caractéristiques ordinaires représentant évidemment une obstruction à l'existence de connexions sans courbure).**

On a en effet la

Proposition 1. Si $C \cap C' \neq \emptyset$, les classes caractéristiques secondaires sont toutes nulles.

Lemme 1. Si $X \in T_{(x,t)}(M\times\{t\}$, et si $s \in (E\times\mathbb{R})_{(x,t)} \approx E_x$, la courbure

$\tilde{K}$ de $\tilde{\nabla}$ vérifie :

$$\tilde{K}(X,(\frac{\partial}{\partial t})_{(x,t)}).s = \nabla'_X s - \nabla_X s.$$

On peut en effet prolonger s en une section $\tilde{s}$ de $E\times\mathbb{R}$, telle que $s|_{M\times\{t\}}$ soit une section de E indépendante de t. On peut, de même, prolonger X en un champ de vecteurs $\tilde{X}$ sur $M\times\mathbb{R}$ tel que $X|_{M\times\{t\}}$ soit tangent à la variété $M\times\{t\}$, et que les champs de vecteurs ainsi obtenus sur M soient indépendants de t, de sorte que $[\tilde{X},\frac{\partial}{\partial t}] = 0$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\tilde{K}(\tilde{X},\frac{\partial}{\partial t}).\tilde{s} &= \tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\left(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{s}\right) - \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{s}\right) - \tilde{\nabla}_{[\tilde{X},\frac{\partial}{\partial t}]}\tilde{s} \\ &= -\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}(t\ \nabla_X s + (1-t)\nabla'_X s) \\ &= \nabla'_X s - \nabla_X s,\end{aligned}$$

d'où le lemme.

Démonstration de la proposition. Si $C \cap C' \neq \emptyset$, on peut choisir $\nabla = \nabla'$ de sorte que $\tilde{K}(X,\frac{\partial}{\partial t}) = 0$, $\forall X \in T(M\times R)$: on en déduit que, $\forall \Phi \in I_q^+$ $\lambda(\tilde{\nabla})\Phi$ n'a pas de terme en dt, et que par conséquent $\lambda(\nabla,\nabla') = 0$, d'où la proposition.

REMARQUES. *1)* On a une famille de sous-algèbres différentielles graduées (les algèbres marquées $d=0$ ont une différentielle nulle et sont donc égales à leur cohomologie).

$$
\begin{tikzcd}
(l_q/l')\otimes\Lambda(l) \arrow[r, hook] & (l_q/l)\otimes(l_q/l')\otimes\Lambda(l) \arrow[dr, hook] & \\
\underset{d=0}{\Lambda(l\cap l')} \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] \arrow[r] & (l_q/l)\otimes(l_q/l')\underset{d=0}{\otimes}\Lambda(l\cap l') \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] \arrow[r, hook] & (l_q/l)\otimes(l_q/l')\otimes\Lambda(l_q^+) \\
(l_q/l)\otimes\Lambda(l') \arrow[r] & (l_q/l)\otimes(l_q/l')\otimes\Lambda(l') \arrow[ur, hook] & W(l,l') \arrow[u, phantom, "\shortparallel"]
\end{tikzcd}
$$

2) **En particulier, si C' est un ensemble connexe non vide de connexions sans courbure sur E, on peut prendre $l' = l_q^+$, $W(l,l') = (l_q/l)\otimes\Lambda(l_q^+)$, et la famille précédente de sous-algèbres différentielles devient :**

$$\Lambda(l) \hookrightarrow (l_q/l)\underset{d=0}{\otimes}\Lambda(l) \hookrightarrow (l_q/l)\otimes\Lambda(l_q^+) = W(l, l_q^+)$$

3) **Si, dans les algebres précédentes, on remplace les algèbres extérieures $\Lambda(\mathfrak{a})$ (où $\mathfrak{a}$ est l'espace vectoriel sous jacent à un idéal homogène de l_q) par les algèbres extérieures $\Lambda(A)$ construites sur un sous-espace vectoriel gradué A de $\mathfrak{a}$, on obtient évidemment autant de sous-algèbres différentielles graduées.**

CONJECTURE. Si A est l'espace vectoriel engendré par un système de générateurs de l'idéal $\mathfrak{a}$, les sous-algèbres de $H^*(M,\mathbb{C})$ obtenues en prenant les images par ρ des algèbres construites avec $\Lambda(\mathfrak{a})$ ou avec $\Lambda(A)$ sont les mêmes.

Cette conjecture est vérifiée par exemple pour l'algèbre $\Lambda(l\cap l')$ (à diffé-

rentielle nulle).

On peut aussi se demander si certaines des inclusions d'algèbres différentielles, décrites ci-dessus, sont des équivalences d'homotopie, au moins quand on remplace $\Lambda(\mathcal{U})$ par $\Lambda(A)$. En général, c'est faux; mais Jouanolou m'a donné une démonstration de ce que

$$WO_q = (I_q / d^o\Phi > q) \quad \Lambda(h_1, h_3, \ldots, h_{q'}) \to (I_q / d^o\Phi > q) \quad \mathbb{R}[c_2, c_4, \ldots, c_{q''}]$$

$$\Lambda(h_1, h_2, \ldots, h_q)$$

[q' (resp. q'') = plus grand entier impair (resp. pair) $\leq q$] est une équivalence d'homotopie.

Il en est de même pour

$$\underset{d=0}{\Lambda(h_1, h_3, \ldots, h_{q'})} \hookrightarrow \mathbb{R}[c_2, c_4, \ldots, c'_{q''}] \otimes \Lambda(h_1, h_2, \ldots, h_q)$$

3. *EXEMPLES*.

	Hypothèses sur E	*C*	*I*	*A* (*système de générateurs de I*)
1.	aucune hypothèse particulière	connexions respectant une métrique	Idéal engendré par les polynomes de degré impair	$c_1, c_3, \ldots, c_{q'}$ (q' plus grand entier impair $\leq q$)
2.	E est le fibré transverse à un feuilletage de codimension q	connexions "basiques" (*cf.* [1])	Idéal des polynomes de degré $> q$	$(c_1)^{q+1}, (c_1)^{q-1}c_2, \ldots$ etc....

3.	E admet une connexion sans courbure	famille connexe de connexions sans courbure	I_q^+	$c_1, \ldots, c_q$
4.	E est somme directe d'un fibré E' de dim k et d'un fibré trivial de dimension $q\text{-}k$ $E = E' \otimes \theta_{q-k}$	Connexions respectant E' et triviales sur θ_{q-k}	Idéal engendré par $c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_q$	$c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_q$
5.	E est orientable	Connexions respectant une forme volume	Idéal engendré par c_1	c_1

- Les familles *(1.2)* et *(2.3)* permettent de retrouver respectivement les algèbres WO_q et W_q et la théorie de Bott-Haeffliger pour les feuilletages généraux et pour ceux admettant un fibré transverse plat.

- La famille *(1.3)* correspond au problème suivant : On suppose que le groupe structural $GL(q, \mathbb{R})$ de E peut être réduit à un sous-groupe discret. Peut-il l'être en fait à un sous-groupe fini? [On sait que ce n'est pas toujours vrai : il suffit, d'après Milnor, de prendre un $GL(2, \mathbb{R})$-fibré E (i.e. réel orienté, de dimension 2) de base une surface compacte orientable de genre $g \geq 2$, et de supposer que la classe d'Euler $\chi(E)$ vérifie $1 \leq |\chi(E)| < g$].

- La famille *(3.4)* correspond au problème suivant : on se donne un fibré vectoriel E' de dimension k, et on le suppose stablement plat (plus précisément, on suppose que $E' \otimes \theta_{q-k}$ admet une connexion sans courbure). Est-il plat ? [$T(S^n)$ est stablement trivial, et n'est pas plat, sauf pour $n = 1, 3, 7$]

- Les exemples 1, 4 et 5 sont des cas particuliers de la situation suivante: le groupe structural $GL(q, \mathbb{R})$ de E est réduit à un sous-groupe de Lie G, et les connexions considérées sont celles qui respectent cette G-structure. Si l'on suppose E muni également d'une H-structure pour un autre sous-groupe de Lie H de G, l'exotisme fourni par les 2 familles de connexions ainsi définies, représente une obstruction à la possibilité de résoudre le problème suivant : existe-t-il une G-structure P'_G sur E, homotope à celle (P_G) que l'on s'est donnée, ainsi qu'une H structure P'_H homotope a celle (P_H) que l'on s'est donnée, telles que l'intersection $P'_G \cap P'_H$ des fibrés principaux associés (de groupes respectifs G et H) soit un $G \cap H$ - fibré principal différentiable ?

- Il est bien clair, que dans le cas des 3 familles (1.4), (1.5) et (4.5), le problème géométrique admet toujours une solution, de sorte que l'exotisme correspondant est nul.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Bott : Lectures on characteristic classes and foliations (notes by Lawrence Conlon) [miméographié]
2. A. Haeffliger : Sur les classes caractéristiques des feuilletages [Séminaire Bourbaki - juin 1972]
3. Godbillon-Vey : Un invariant des feuilletages de codimension 1 [Comptes Rendus Ac. Sc., Paris - juin 1971]

Département de Mathematiques
Université des Sciences et Techniques de Lille
59 - Villeneuve d'Ascq, France

(Recibido en julio de 1972)