Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VII (1973), págs. 3-22

SOBRE DERIVACIONES DE ÁLGEBRAS DE LIE

por

Beatriz FARÍAS

Este trabajo expositorio se basa en numerosos artículos sobre derivaciones de álgebras de Lie. Si L es un álgebra de Lie, entonces las derivaciones de L forman un álgebra de Lie, $D(L)$. Al comenzar se introducen las nociones de nilpotencia característica y solubilidad característica, las cuales se usan más tarde para discutir las relaciones entre las estructuras de L y $D(L)$. Entre las derivaciones de L están las interiores, que son las únicas de álgebras de Lie semisimples. Para completar el trabajo deberían estudiarse las derivaciones exteriores y determinar dónde se encuentran en $D(L)$. Sobre estas derivaciones exteriores existe otro trabajo que por su longitud debe presentarse separado del presente.

CAPITULO 1

Algebras de Lie característicamente nilpotentes y característicamente solubles.

1.1. Definiciones.

Todas las álgebras de Lie aquí consideradas son de dimensión finita y el cuerpo algebraicamente cerrado y de característica 0.

Una *derivación* en un álgebra de Lie es una transformación lineal D tal que

$[x,y]D = [xD, y] + [x, yD]$ para todo $x, y \in L$.

Si D_1 y D_2 son derivaciones de L, entonces bajo la composición $[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1$, las derivaciones de L forman un álgebra de Lie, $D(L)$.

Para un elemento $x \in L$, la aplicación $adx : y \to [y,x] = y\, adx$, para todo $y \in L$, es una derivación llamada *interior* determinada por x. Una derivación no interior se llama *exterior*. Las derivaciones interiores forman un ideal de $D(L)$, denotado $I(L)$, tal que $I(L) \approx L/Z(L)$, donde $Z(L)$ es el centro de L.

$[L_1, L_2]$ denotará el subespacio generado por los productos $[l_1, l_2]$, $l_i \in L_i$. L es *abeliana* si $[L,L] = (0)$; L es *nilpotente* si la serie central inferior $L^1 = L$, $L^2 = [L, L]$, ..., $L^{n+1} = [L^n, L]$ es tal que $L^h = (0)$ para algún h; L es *soluble* si la serie derivada $L^{(0)} = L$, $L^{(1)} = [L,L]$, ..., $L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}]$ es tal que $L^{(k)} = (0)$ para algún k.

1.2. Algebras de Lie característicamente nilpotentes.

Un $x \in L$ se llama *D-constante* si $xD = 0$ y $x \neq 0$. En [12] Jacobson muestra que un álgebra de Lie que posee una derivación sin constantes es nilpotente. Entonces nos preguntamos si L nilpotente posee una derivación sin constantes. Como toda álgebra de Lie nilpotente tiene una derivación exterior tal derivación no sería interior. Sin embargo, en [8] Dixmier y Lister dan un ejemplo de un álgebra M de dimensión 8, definida por

$[e_1, e_2] = e_5$	$[e_2, e_3] = e_8$	$[e_3, e_4] = -e_5$
$[e_1, e_3] = e_6$	$[e_2, e_4] = e_6$	$[e_3, e_5] = -e_7$
$[e_1, e_4] = e_7$	$[e_2, e_6] = -e_7$	$[e_4, e_6] = -e_8$

$[e_1, e_5] = -e_8$ y de otra manera, para $i < j$ $[e_i, e_j] = 0$, donde M es nilpotente y, si D es una derivación, entonces $MD = M^2$. En particular si $l_i D = \sum_{j=1}^{8} \lambda_{ij} e_j$, $i = 1, \ldots, 8$, entonces la matriz de D es

$$\left(\begin{array}{c|c}
0 & \begin{array}{cccc} \lambda_{67} & \lambda_{57} & \lambda_{17} & \lambda_{18} \\ -\lambda_{58} & \lambda_{68} & \lambda_{27} & \lambda_{28} \\ -\lambda_{68} & -\lambda_{58} & \lambda_{37} & \lambda_{38} \\ -\lambda_{57} & -\lambda_{67} & \lambda_{47} & \lambda_{48} \end{array} \\
\hline
0 & \begin{array}{c|c} 0 & \begin{array}{cc} \lambda_{57} & \lambda_{58} \\ \lambda_{67} & \lambda_{68} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array} \end{array}
\end{array}\right).$$

Así $D(M)$, el álgebra de derivaciones de M es de dimensión 12, y cada derivación es nilpotente, es decir, posee constantes.

La existencia de M inició el estudio de una clase de álgebras de Lie que conduce a un cierto número de resultados sobre la estructura de $D(L)$. Así, sea L un álgebra de Lie y $L^{[0]} = L$, $L^{[1]} = LD(L) = \{ \sum x_i D_i \mid x_i \in L, D_i \in D(L) \}$, $L^{[k+1]} = L^{[k]} D(L)$. Entonces tenemos

DEFINICION 1.1. L es característicamente nilpotente si y sólo si $L^{[k]} = 0$ para algún k.

El álgebra M del ejemplo es característicamente nilpotente puesto que $M^{[4]} = (0)$. Si L es característicamente nilpotente entonces todas las derivaciones y en particular las interiores son nilpotentes. Entonces, por el teorema de Engel, L es nilpotente. Dixmier, [7], ha clasificado las álgebras de Lie de dimensión ≤ 5. Ninguna de ellas es característicamente nilpotente. Parece que las álgebras de Lie característicamente nilpotentes son de dimensión ≥ 8.

1.3. Algebras de Lie característicamente solubles.

En esta sección establecemos la estructura de $D(L)$ cuando L es característicamente nilpotente. La definición de álgebras de Lie característicamente solubles sigue de estos resultados. Primero probamos

LEMA 1.2. Sea L nilpotente. Si L es suma directa de dos ideales diferentes de (0), uno de los cuales es central, entonces $D(L)$ no es nilpotente.

Prueba : Sea $L = L_1 \oplus Z$ (Z ideal es central). Sea $x \neq 0$, $x \in Z$ y $(x) \oplus U = Z$. Existe $y \in L_1$, $y \neq 0$, puesto que L_1 es nilpotente. Definimos las transformaciones lineales D_1 y D_2 de L por

$$L_1 D_1 = (0)\,,\quad xD_1 = y\,,\quad UD_1 = (0)$$

$$L_1 D_2 = (0)\,,\quad xD_2 = x\,,\quad UD_2 = (0)\,.$$

Entonces D_1 y D_2 son derivaciones y satisfacen $[D_1 D_2] = D_1$. Así la serie central inferior no puede terminar en (0) y $D(L)$ no es nilpotente. ■

TEOREMA 1.3. L es característicamente nilpotente si y sólo si $D(L)$ es nilpotente y L no es 1-dimensional.

Prueba : Supongamos $D(L)$ nilpotente y dimensión de $L > 1$. Consideremos L como $D(L)$- módulo y descompongamos a L en suma directa de subespacios L_α donde $L_\alpha = \{\, x \in L \mid x(D - \alpha(D))^{N(x)} = 0$, para cada $D \in D(L)$ y N suficientemente grande $\}$. Los L_α son submódulos, y así, en particular, son ideales de L. Más aún, si β es un peso diferente de α, $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$

donde $L_{\alpha+\beta}=(0)$ si $\alpha+\beta$ no es un peso de $D(L)$. Entonces $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_\alpha \cap L_\beta \cap L_{\alpha+\beta}$, entonces $[L_\alpha, L_\beta] = (0)$, a menos que $\alpha = \beta = 0$.

Si M denota la suma de L_α con $\alpha \neq 0$, entonces $L = L_0 \oplus M$, con M un ideal central. Puesto que $D(L)$ es nilpotente, L es nilpotente, y, por el lema 1.2, $L_0 = (0)$ ó $M = (0)$. Si $L_0 = (0)$ entonces $L = M$ es abeliana. Si $dim\, L > 1$, entonces L es suma directa de ideales (todos centrales) lo cual contradice el lema 1.2. Por tanto, $M = (0)$ y así $L = L_0$, lo cual, por definición, implica que toda derivación de L es nilpotente y así L es característicamente nilpotente.

Recíprocamente, si L es característicamente nilpotente $L^{[k]} = (0)$ para algún k, de modo que para todo producto de k derivaciones $D_1 D_2 D_3 \ldots D_k = 0$, lo cual a su vez implica que el producto de Lie de k derivaciones cualesquiera es cero. Así $D(L)$ es nilpotente. Si L es 1-dimensional, la aplicación idéntica es una derivación y L no puede ser entonces característicamente nilpotente.

■

DEFINICION 1.4. L es característicamente soluble si y sólo si D(L) es soluble y $Z(L) \subseteq [L, L]$.

La segunda condición asegura que L no es 1-dimensional, así álgebras de Lie característicamente nilpotentes son característicamente solubles. Por otra parte, el álgebra de dimensión 2, $L_2 = \{ e_1, e_2 \mid [e_1, e_2] = e_1 \}$ es soluble y $D(L_2) \approx L_2$, pero L_2 no es nilpotente; entonces solubilidad característica no implica nilpotencia característica.

1.4 Algunas propiedades de álgebras de Lie característicamente nilpotentes y característicamente solubles.

Primero dos resultados útiles :

LEMA 1.5. Si L es característicamente nilpotente entonces

(1) $Z(L) \subset [L, L]$

(2) $L^3 \neq (0)$

Prueba : (1). Sea $Z(L) \not\subset [L, L]$ entonces existen subespacios L_1 y M de $Z(L)$ tales que $Z(L) = L_1 \oplus M$ y $M \subset [L, L]$. Sea L_2 un subespacio de L que contenga a $[L, L]$ y tal que $L = L_1 \oplus L_2$. Si l_1, l'_1 y l_2, l'_2 son elementos de L_1 y L_2 respectivamente, entonces

$$[l_1 + l_2, l'_1 + l'_2] = [l_2, l'_2] \in L_2$$

implica que L_2 es un ideal diferente de cero de L. Pero L_1 es un ideal central diferente de cero, y así, por el lema 1.2, $D(L)$ no es nilpotente, i.e., L no es característicamente nilpotente.

(2) Sea $L^3 = (0)$; puesto que L es nilpotente, $L \neq L^2$, y existe un subespacio $U \neq (0)$ tal que $L = U \oplus L^2$ y $[L,U] = [U,U]$. La aplicación D definida por $xD = x$ para $x \in U$ y $yD = 2y$ para $y \in L^2$ es una derivación no nilpotente de L, de modo que L no puede ser característicamente nilpotente. ■

Las álgebras de Lie característicamente nilpotentes difieren de muchas maneras de las álgebras de Lie nilpotentes; por ejemplo, subálgebras y álgebras cocientes de un álgebra de Lie característicamente nilpotentes no son necesariamente característicamente nilpotentes. Esto puede verse en el ejemplo dado en 1.2. El ideal $M^2 = (e_5, e_6, e_7, e_8)$ y el álgebra cociente M/M^2 no son característicamente nilpotentes. Nilpotencia característica, pues, no es heredada en general por los ideales; sin embargo, si los ideales son sumandos directos, tenemos el

LEMA 1.6. (Leger). Sea L suma directa de los ideales L_i $(i=1,\ldots,n)$. Entonces L es característicamente nilpotente si y sólo si cada L_i es característicamente nilpotente.

Prueba: Se encuentra con ligeras modificaciones en [16] y es omitida aquí por larga. ∎

Si L es un álgebra con un ideal nilpotente N tal que L/N es nilpotente, entonces L no es necesariamente nilpotente. Chao, en [3] muestra que si L/N^2 se asume nilpotente entonces L es también nilpotente. Consideramos una caracterización similar para las álgebras de Lie característicamente nilpotentes discutidas por Togo en [27].

LEMA 1.7. Sean L un álgebra de Lie y N una subálgebra característica (estable bajo todas las derivaciones de L). Si $ND(L)^m \subset N^n$, entonces para cada entero $r \geq 1$, $N^r D(L)^{rm-r+1} \subset N^{n+r-1}$

Es fácil probar este lema usando inducción sobre r.

TEOREMA 1.8. Sea L un álgebra de Lie y N un ideal característico de L. Entonces L es característicamente nilpotente si L/N^n es característicamente nilpotente para algún $n \geq 2$.

Prueba: Puesto que L es un álgebra de Lie, N^k, $k=2,3,\ldots$ son también ideales de L. Asumamos que L/N^n es característicamente nilpotente para algún $n \geq 2$. Si D es una derivación de L, entonces la transformación lineal $\overline{D}$ de L/N^n definida por $(N^n + l)\overline{D} = N^n + (l)D$, es una derivación de L/N^n. Pero L/N^n es característicamente nilpotente, así que para algún m tenemos $LD(L)^m \subseteq N^n$.

Poniendo $f(r) = \sum_{j=o}^{r} (jn - j + 1)\, m - (jn - j)$ se puede mostrar por inducción que

$$LD(L)^{f(r)} \subseteq L^{(r+1)\, n-r}$$

Para k suficientemente grande, puesto que $n \geq 2$, $N^{(k+1)\, n-k} = (0)$, de modo que $L^{[f(k)]} = (0)$, i.e., L es característicamente nilpotente. ■

Consideremos ahora qué puede decirse acerca de L si exigimos que (a) el álgebra derivada o (b) una subálgebra de Cartan de L es característicamente soluble o es característicamente nilpotente. Primero consideramos la situación si L tiene un álgebra derivada característicamente nilpotente y mostramos inicialmente que el álgebra M de 1.2 no puede ser álgebra derivada de ningún álgebra de Lie.

Para tal M, tenemos $M^{[1]} = M^2$, así que si $M \subseteq L$ y $M = L^2$, entonces

$$[M, L] \subseteq M^{[1]} = M^2.$$

Esto implica que $M^2 = [M\, [L,L]] \subseteq [M^2, L] \subseteq M^3$, lo cual contradice la nilpotencia de M. ¿ Existen, entonces, o nó, álgebras deLie con álgebras derivadas característicamente nilpotentes? Se puede mostrar que una álgebra de Lie característicamente nilpotente no es un álgebra derivada si $L^{[1]} \subseteq L^2$ ó si $L^{[4]} = (0)$.

Con este propósito sea L característicamente nilpotente y definamos una sucesión creciente Z_i de ideales inductivamente como sigue :

$Z_o = (0)$ y para $i > 0$, Z_i es el más grande subespacio de L tal que $Z_i\, D(L) \subseteq Z_{i-1}$. Entonces existe un entero $n > 0$ tal que $Z_n = L$.

LEMA 1.9. Si L *es característicamente nilpotente y es un álgebra derivada, entonces* $[L, Z_i] \subseteq Z_{i-2}$, *para cada* $i \geq 2$.

Prueba : Escribamos $L = [H, H]$. Sea $x \in L$, entonces $x = \sum_{j=1}^{k} [h_j, h_{j'}]$ con $h_j, h_{j'} \in H$. Si D_h es la derivación de L inducida por $h \in H$, entonces $adx = \sum_{j=1}^{k} [D_{b_j}, D_{b_j'}]$, y así $Z_i\, adx \subseteq Z_{i-2}$.

COROLARIO. Si L es un álgebra de Lie característicamente nilpotente y $D(L)$ anula a $Z(L)$, entonces L no es un álgebra derivada.

Prueba : Si L satisface las hipótesis, entonces $Z_2 \subseteq Z(L)$. Entonces $Z_1 = Z_2 = Z(L)$ y $L = Z(L)$, contrario a la nilpotencia característica de L . ■

TEOREMA 1.10. Sea L un álgebra de Lie característicamente nilpotente y m y n los enteros más pequeños tales que $L^m = (0)$ y $L^{[n]} = (0)$. Si $m-1 > (n+1)/2$ entonces L no es un álgebra derivada.

Prueba : Se sigue fácilmente del lema 1.9. ■

COROLARIO. En cada uno de los siguientes casos un álgebra de Lie característicamente nilpotente no es un álgebra derivada.

$$(i) \quad L^{[1]} \subseteq L^2$$

$$(ii) \quad L^{[4]} = (0)$$

Prueba : Sean m y n como en el teorema. Si $L^{[1]} \subseteq L^2$, entonces $L^{[k-1]} = L^k$ y así $m = n+1$. Puesto que $n > 2$, $m-1 = n > (n+1)/2$. Si $L^{[4]} = (0)$, entonces $(n+1)/2 < 3$. Puesto que $m \geq 4$ y $L^3 \neq (0)$ tenemos $m-1 > (n+1)/2$. ■

Si el álgebra derivada se asume característicamente soluble tenemos el siguiente resultado de Togo [23] .

TEOREMA 1.11. Sea L un álgebra de Lie que no tiene subálgebras propias, cuya álgebra derivada sea igual a $[L,L]$. Si $[L,L]$ es característicamente soluble, entonces L es característicamente soluble.

Prueba : Sea G una subálgebra maximal semisimple de $D(L)$ y asumamos $G \neq (0)$. Sea D una derivación semisimple diferente de cero. Sea H el conjunto de elementos de L anulados por D. H es un ideal que contiene $[L,L]$ puesto que $[L,L]\, G = (0)$, por la solubilidad característica de $[L,L]$. Entonces existe un subespacio U de L tal que $L = U + H$ y $UD \subseteq U$. Mostremos que $[U,H]=(0)$. Sea λ un valor propio de D y x un elemento de U correspondiente a λ. Entonces para todo $y \in H$ tenemos

$$[x,y]\, D = [xD, y] = \lambda\, [x,y] = 0.$$

Puesto que $\lambda \neq 0$, $[x,y] = 0$ y $[U,H] = (0)$. Se sigue que

$$[[U,U], L] \subseteq [[U,L], U] = [[U,U], U] \subseteq [H,U] = (0).$$

Entonces $[L,L] = [U,U] \oplus [H,H]$, donde $[U,U]$ es un ideal central de $[L,L]$. Puesto que $[L,L]$ es característicamente soluble, $[U,U] \subset [H,H]$ y así $[L,L] = [H,H]$. Esto contradice la hipótesis, puesto que H es una subálgebra propia de L. Entonces $G=(0)$, i.e., $D(L)$ es soluble. L tampoco puede contener un ideal central como sumando directo, de otra manera si A es un ideal central entonces $L = A \oplus B$ implica $[L,L] = [B,B]$, contrario a la hipótesis. Luego L es característicamente soluble. ■

Existen muchos ejemplos que ilustrarían la situación del teorema, omitidos aquí para abreviar.

En la estructura de álgebras de Lie las subálgebras de Cartan juegan un papel vital. Aquí investigamos la estructura de L si una tal subálgebra es característicamente soluble. En [2] se prueba que si una subálgebra de Cartan es característicamente nilpotente, entonces L es soluble. En [5: p.222] Chevalley muestra que si L es un álgebra de Lie, R su radical, H una subálgebra de Cartan de L, entonces H es suma de $H \cap R$ y una subálgebra de Cartan H_1 de una subálgebra semisimple maximal tal que H_1 sea un ideal central de H. Usando este resultado, el mencionado resultado probado en [2] por Leger y Togo puede generalizarse al

TEOREMA 1.13. Si una subálgebra de Cartán de L es característicamente soluble, entonces L es soluble.

Prueba: Sea $L = R \oplus S$ la descomposición de Levi de L. Si H es característicamente soluble, entonces no puede ser un ideal central, de otro modo $Z(H) \not\subseteq [H,H]$. Así $S = (0)$ y L es soluble. ■

El álgebra de Lie de dimensión 5 con base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ tal que $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_1, e_5] = e_5$ y para $i < j$ $[e_i, e_j] = 0$, en los demás casos, tiene como subálgebra de Cartan a $H = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Si D es una derivación de H entonces la matriz de D tiene la forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ 0 & 0 & \lambda_{11} + \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda_{11} + \lambda_{22} \end{bmatrix},$$

así que $D(H)$ es soluble y puesto que $Z(H) \subseteq H^2$, H es característicamente soluble. L es soluble pero no nilpotente. Así en el teorema 1.13, no podemos decir que L sea nilpotente.

CAPITULO 2

La estructura de $D(L)$

2.1. Introducción .

Es natural preguntarnos como están relacionadas las estructuras de L y $D(L)$. En 2.6 se muestra en un ejemplo que existen álgebras de Lie no isomorfas cuyas álgebras de derivaciones son isomorfas, de modo que la estructura de L no está completamente determinada por la estructura de $D(L)$. Sin embargo, existe una conexión íntima entre la estructura de $D(L)$ y la de L. En este capítulo vamos a determinar la estructura de L cuando $D(L)$ es suma directa de un ideal semisimple y el radical.

2.2. Nilpotencia de $D(L)$.

TEOREMA 2. $D(L)$ es abeliana si, y sólo si, L es 1-dimensional.

Prueba : **Si $D(L)$ es abeliana, entonces adL es abeliana así que $ad\,[L,L] = [adL, adL] = (0)$. Así $L^3 = (0)$ y L no puede ser característicamente nilpotente. Pero $D(L)$ es nilpotente, entonces L debe ser 1-dimensional, entonces ciertamente $D(L)$ es abeliana. ■**

TEOREMA 2.2. $D(L)$ es nilpotente no abeliana si, y sólo si, L es característicamente nilpotente y L no es 1-dimensional.

Este es el teorema 1.3, pero lo repetimos por completez.

2.3. Solubilidad de $D(L)$.

Decidir cuándo $D(L)$ es soluble es mucho más difícil. Los resultados obtenidos dependen esencialmente de la estructura de L cuando $D(L) = G \oplus H$, donde G es un ideal semisimple y H el radical de $D(L)$. Requerimos algunos

resultados sobre la manera de romperse $D(L)$ cuando L es suma directa de ideales. Si $E(L)$ es el conjunto de todas las transformaciones lineales de L en L y $E(L_i, L_j)$ el de las transformaciones lineales de L_i en L_j, entonces

$$D(L_i, L_j) = D(L) \cap E(L_i, L_j) \quad \text{y} \quad D(L_i, L_i) = D(L_i) .$$

LEMA 2.3. Sea L suma directa de ideales L_i $(i = 1, \ldots, n)$, entonces

(i) para $i \neq j$, $D(L_i, L_j)$ consiste de todos los elementos $T_{ij} \in E(L_i, L_j)$ tales que $LT_{ij} \subseteq Z(L_j)$ y $[L_i, L_i]\, T_{ij} = (0)$;

(ii) $D(L) = \sum_{i,j=1}^{n} D(L_i, L_j)$;

(iii) para $i \neq j$, $D(L_i, L_j)$ es abeliana y $[D(L_i, L_j), \sum_{k=1}^{n} D(L_k)] = D(L_i, L_j)$.

Prueba : Omitida por fácil. ■

Si $C(L_i)$ denota la subálgebra de $D(L)$ que envía L_i en $Z(L_i)$ y L_j en (0), para $i \neq j$, tenemos el

LEMA 2.4. Sea L suma directa de ideales L_i $(i = 1, \ldots, n)$. Supongamos que $Z(L_i) \subseteq [L_i, L_i]$ para algún i. Entonces $C(L_i)$ es un ideal abeliano de $D(L)$ y $[D(L_j, L_i), D(L_i, L_j)] \subseteq C(L_i)$ para todo $i \neq j$.

Prueba : Cuestión de hacer los cálculos. ■

Antes de abordar el resultado principal veamos un ejemplo. Sea L de dimensión 3, con base $\{x_1, x_2, x_3\}$ tal que $[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = [x_2, x_3] = 0$. Entonces $L^3 = (0)$ y L es nilpotente. Si definimos una derivación D de L por $x_i D = \sum_{j=1}^{3} \lambda_{ij} x_j$, $i = 1, 2, 3,$ entonces la matriz de D es

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

$D(L)$ no es ni siquiera soluble, y además $D(L)$ tiene una subálgebra semisimple de dimensión 4. Aquí vemos que si bien $D(L)$ soluble implica L soluble (porque $I(L) = L/Z(L)$, y siendo $I(L)$ soluble, L es soluble), por el contrario, L soluble no implica que $D(L)$ sea soluble. El ejemplo sugiere que podemos abordar el problema imponiendo condiciones a $D(L)$ antes que a L, línea tomada por Togo en [22] para mostrar

TEOREMA 2.5. Sea L una álgebra de Lie soluble tal que $Z(L) \subset [L,L]$. Si $D(L)$ es suma directa de un ideal semisimple y el radical, entonces L es característicamente soluble.

Prueba: L es no abeliana, de otro modo $L = Z(L) \subset [L,L] = (0)$. Sea $D(L) = G \oplus H$, donde G es un ideal semisimple y H el radical de $D(L)$. Puesto que L es soluble adL es un ideal soluble de $D(L)$ así que $adL \subset H$. Entonces para todo $D \in G$, $adLD = [adL, D] = (0)$. Entonces $LD \subset Z(L) \subset [L,L]$ y $D^2 = 0$; entonces todos los elementos de G son nilpotentes. Puesto que G es semisimple, $G = (0)$. Así $D(L)$ es soluble y L es característicamente soluble. ■

TEOREMA 2.6. Sea L un álgebra de Lie no abeliana. Si $D(L)$ es la suma directa de un ideal semisimple y el radical, entonces $D(L)$ es soluble y L es o característicamente soluble o suma directa de un ideal característicamente soluble y un ideal 1-dimensional.

Prueba: Demasiado larga para este trabajo. Véase mi tesis [28]. ■

El próximo problema es determinar cuando $D(L)$ puede ser igual a la suma directa de su radical y un ideal semisimple.

DEFINICION. Un álgebra de Lie es *reductiva* si $L = S \oplus A$ donde S es un ideal semisimple y A un ideal abeliano.

TEOREMA 2.7. $D(L)$ es la suma directa de un ideal semisimple y el radical si, y sólo si, una de las condiciones siguientes se cumple

(i) L es reductiva

(ii) L es la suma directa de un ideal semisimple y un ideal característicamente soluble.

(iii) L es la suma directa de un ideal semisimple, un ideal característicamente soluble y un ideal central 1-dimensional.

Prueba : Muy bonita, pero por la misma razón del teorema anterior ver [28] .

COROLARIO. $D(L)$ es soluble si y sólo si L es característicamente soluble ó 1-dimensional o suma directa de un ideal característicamente soluble y un ideal central 1-dimensional. ∎

2.4. Semisimplicidad de $D(L)$.

Puesto que todas las derivaciones de un álgebra de Lie semisimple son interiores [13] podemos probar

TEOREMA 2.8. Si $D(L)$ es semisimple, así también lo es L .

Prueba : Sea $D(L)$ semisimple y supongamos $L = S \oplus R$, S una subálgebra semisimple y R el radical. Entonces para todo $D \in D(L)$, $[adr, D] = adrD$, así que $adR = \{ adr \mid r \in R \}$ es un ideal de $D(L)$. Puesto que R es soluble adR es soluble y así $adR = (0)$, lo cual implica $ladr = [l,r] = 0$, para todo $r < R$, $l \in L$; de modo que $R \subseteq Z(L)$ y, por tanto, $R = Z(L)$. Pero toda derivación del centro R puede extenderse a una derivación que anula S y lo mismo puede hacerse si R y S se intercambian. Puesto que R es abeliana, $D(R)$ es el álgebra de Lie de todas las transformaciones lineales de R y ésta no es

simple a menos que $R = (0)$. Entonces $L = S$ es semisimple. Si L es semisimple, $D(L)$ consiste solamente de derivaciones interiores. Puesto que $Z(L) = (0)$, $D(L) = I(L) \approx L$ y $D(L)$ es semisimple.

2.5. Radical nilpotente de $D(L)$ como sumando directo.

En esta sección consideramos la estructura de L cuando $D(L)$ es suma directa de un ideal semisimple y el radical nilpotente.

TEOREMA 2.9. $D(L)$ es la suma directa de un ideal semisimple y el radical nilpotente si, y sólo si, L es reductiva ó L es la suma directa de un ideal semisimple y un ideal característicamente nilpotente.

Prueba : **A partir del lema 2.3 y el teorema 2.7. Para eliminar la tercera posibilidad del teorema 2.7, úsese el teorema 2.6 y el teorema 2.8.** ■

COROLARIO 1. Si $D(L)$ es la suma directa de un ideal semisimple y al radical nilpotente, entonces el radical de $D(L)$ es 1-dimensional y consiste de elementos semisimples ó consiste de elementos nilpotentes.

Prueba : **El resultado sigue del teorema 2.9 y del hecho de que un álgebra de Lie es característicamente nilpotente si y sólo si todas sus derivaciones son nilpotentes.** ■

COROLARIO 2. Sean R y N el radical y el nil-radical de L, respectivamente. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes :

(1) $D(L)$ es la suma directa de un ideal semisimple y el radical consistente de elementos nilpotentes.

(2) R es característicamente nilpotente.

(3) N es característicamente nilpotente.

(4) $N(D(L))^n = (0)$ *para algún entero* n.

Prueba : (1) => (2) es consecuencia de Teorema 2.9

(2) => (3) porque (2) implica $R = N$

(3) => (4) puesto que N es un ideal característico de L.

(4) => (1) : Sea L tal que $ND(L)^n = (0)$ para algún entero n.

Para una subálgebra semisimple maximal S de L sea $L = \oplus R$. Puesto que $N(adS)^n = (0)$ y $[R,S] \subset N$, se sigue que $R(adS)^{n+1} = [R,S]\,(adS)^n \subset N(adS)^n = (0)$. Puesto que adS es semisimple $RadS = (0)$, esto es, $[R,S] = (0)$. Entonces, por el lema 2.3, $D(L) = D(S) \oplus D(R)$, $D(S)$ semisimple. Puesto que $RD \subset N$ para todo $D \subset D(L)$, se sigue que $RD(R)^{n+1} = (0)$, y entonces $D(R)$ consiste de elementos nilpotentes y (1) se satisface. ■

TEOREMA 2.10. (i) Si el radical de L es característicamente soluble, entonces es un sumando directo de L.

(ii) Si el nil-radical de L es característicamente soluble, entonces el radical de L es también característicamente soluble.

Prueba : (i) Sean S y R respectivamente una subálgebra semisimple maximal y el radical de L. Si R es característicamente soluble, $D(R)$ es soluble; luego la imagen del homomorfismo que restringe adS a R es semisimple y soluble. Entonces esta imagen es (0) y $[R,S] = (0)$, i.e., R es un sumando directo.

(ii) Sea N el nil-radical de L, N característicamente soluble. Sea G una subálgebra semisimple maximal de $D(R)$. Puesto que N es estable bajo todas las derivaciones de $D(L)$, la imagen del homomorfismo restringido de G en $D(N)$ es (0), así que $NG = (0)$. Puesto que $RD \subset N$ para todo D en $D(R)$, tenemos $RG^2 = (0)$. Puesto que G es completamente reducible se sigue que $RG = (0)$. Así $G = (0)$, i.e., $D(R)$ es soluble. Si R no es caracte -

rísticamente soluble, por el teorema 2.6, luego R contiene un ideal 1-dimensional Z como sumando directo. Luego N contiene a Z como su sumando directo y, por tanto, $Z(N) \nsubseteq [N, N]$, lo cual contradice la solvabilidad característica de N. Así R es característicamente soluble. ■

2.6. *Ejemplo*.

Sean A_1 y A_2 Lie álgebras abelianas tales que $dim\, A_1 \neq A_2$. Entonces $D(A_i) = S_i \oplus Z_i$ $(i = 1, 2,)$, S_i un ideal semisimple, Z_i un ideal 1-dimensional. Sean $L_1 = S_2 \oplus A_1$ y $L_2 = S_1 \oplus A_2$. Entonces, por lema el 2.3, $D(L_1) = D(S_2) \oplus S_1 \oplus Z_1$ y $D(L_2) = D(S_1) \oplus S_2 \oplus Z_2$. Puesto que $D(S_i) \approx S_i$ $(i = 1, 2)$ (teorema 2.8), se sigue que $D(L_1) \approx D(L_2)$, pero L_1 no es isomorfa a L_2.

BIBLIOGRAFÍA

1. BOREL A. : *Groupes linéaires algèbriques*, Annals of Math., 64 (1956), 20-82.
2. BOURBAKI N. : *Groupes et algèbres de Lie*, Ch 1. Hermann, París, 1960.
3. CHAO, C. Y. : *Some characterizations of nilpotent Lie algebras*, Math. Z. 103 (1968), 40-42.
4. CHEVALLEY, C. : *Théorie des groupes de Lie*. Tome II, París, 1951.
5. CHEVALLEY, C. : *Théorie des groupes de Lie*. Tome III, París, 1955.
6. DIXMIER, J. : *Sous-algèbres de Cartan et décomposition de Levi dans les algèbres de Lie*, Trans. Roy. Soc. Canada, Ser. III, Sect. III, 20 (1956), 17-21.
7. DIXMIER, J. : *Sur les réprésentations unitaires des groupes de Lie nilpotents*, III, Canad. J. Math., 10 (1958), 321-248.
8. DIXMIER, J. and LISTER, W. G. : *Derivations of nilpotent algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957), 155-158.
9. HARISH-CHANDRA : *On the radical of a Lie algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 14-17.
10. HOCHSCHILD, G. : *Semisimple algebras and generalized derivations*, Amer. J. Math., 64 (1942), 677-694.

11. *JACOBSON, N.: Abstract derivations and Lie algebras,* Trans. Amer. Math. Soc., 42 (1937), 206-224.

12. *JACOBSON, N.: A note on automorphisms and derivations of Lie algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 281-283.

13. *JACOBSON, N.: Lie algebras,* Interscience Publ., New York, 1962.

14. *LEGER, G.: A note on the derivations of Lie algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 511-514.

15. *LEGER, G.: Derivations of Lie algebras, III,* Duke Math. J., 30 (1963), 637-645.

16. *LEGER, G. and TOGO, S.: Characteristically nilpotent Lie algebras,* Duke Math. J., 26 (1959), 623-628.

17. *SATO, T.: On the derivations of nilpotent Lie algebras.* Tohoku Math. J., 17 (1965), 244-249.

18. *SATO, T.: The derivations of Lie algebras.* Tohoku Math. J., 23 (1971), 21-36.

19. *SERRE, J.P.: Algèbres de Lie semisimples complexes.* Benjamin, New York, 1956.

20. *STEWART, I: Lie algebras.* Springer-Verlag, Berlin, 1970.

21. *TOGO, S.: On the derivation of Lie algebras.* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser A., 19 (1955), 71-77.

22. *TOGO, S.: On the derivation algebras of Lie algebras,* Canad. J. Math., 13 (1961), 201-216.

23. *TOGO, S.: Derivations of Lie algebras.* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A., 28 (1964), 133-158.

24. *TOGO, S.: Lie algebras wich have few derivations.* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A, 29 (1965), 29-41.

25. *TOGO, S.: Derivations of Lie algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., 128 (1967), 264-276.

26. *TOGO, S.: Outer derivations of Lie algebras.* Trans. Amer. Math. Soc., 128 (1967), 264-276.

27. *TOGO, S.: A theorem on characteristically nilpotent Lie algebras.* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A., 33 (1969), 209-212.

28. *FARÍAS, B.: Derivations of Lie algebras.* U.C.W. Aberystwyth, 1971.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia, Sur América

(Recibido en octubre de 1972)