*Revista Colombiana de Matemáticas*
*Volumen VII, 1973, págs. 45-52*

# ALGUNOS ASPECTOS NUMÉRICOS DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE DUFFING

por

*Gaston* ***DEMARÉE*** *y Diego* ***ESCOBAR C.***

*RESUMEN*

Los autores obtienen una cota del error de la solución periódica aproximada de la ecuación de Duffing, $\ddot{x}+1.98\dot{x}+0.04x^3 = \operatorname{sen} wt$, asociada con el método del balance armónico. La estimación del error se establece, bajo ciertas condiciones, por medio de series de Fourier y estimaciones sucesivas.

**1. *Introducción.*** En la mayor parte de los casos se desconoce una solución exacta (o soluciones exactas) de las ecuaciones diferenciales no-lineales que se presentan en problemas de vibraciones. Por esta razón, usualmente se construyen soluciones aproximadas. Algunas veces, uno se encuentra limitado a calcular solamente una aproximación de primer orden, debido a que las aproximaciones de orden superior requieren un número muy grande de cálculos. Un método clásico para la aproximación de primer orden es el método del primer armónico. En muy pocos casos se conocen cotas explícitas para el error de las soluciones periódicas aproximadas, debido a que se dispone de pocas teorías del error.

La notación usada en este informe fue introducida por P. Sagirow [1] cuando investigaba una estimación del error en la frecuencia de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales no-lineales homogéneas.

Una estimación del error para la solución periódica aproximada de la ecuación de Duffing

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x + \beta x^3 = \rho(\omega t) \tag{1}$$

ha sido calculado para diferentes valores de la frecuencia de entrada, de acuerdo con el método desarrollado por G. Demarée [2] .

El tratamiento numérico se hace largo, debido a que no se conoce una buena estimación para la amplitud de la solución periódica exacta. Aplicando el mismo método se obtiene una buena estimación de la amplitud.

La aplicación de un teorema de W. S. Loud [3] , con $\beta = 0.04$ , $c = 1.98$ y $\rho(\omega t) = sen\, \omega t$ garantiza la existencia y unicidad de una solución periódica armónica impar de (1), con período $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

2. *Aspectos Numéricos.* A través de todo el informe se usa la notación introducida en [1] y [2] y muchas fórmulas se presentan sin prueba, haciendo referencia a [2] . Las estimaciones del error para la solución periódica aproximada se calculan para $\omega = 0.8\ (0.1)\ 5.0$. Para frecuencias menores, el método no puede ser aplicado, debido a que algunas desigualdades dejan de cumplirse. El programa general para calcular la estimación del error consiste de seis partes :

a.- Aproximación del primer armónico. Se calcula una primera aproximación del coeficiente del primer armónico usando la aproximación clásica de la relación frecuencia-amplitud. Esta aproximación tiene la siguiente forma :

$$\overline{x}(t) = \overline{d}_1\ sen\ (\omega t + \overline{\theta}_1) = \overline{d}_1 \cos \omega t + \overline{b}_1\ sen\ \omega t \tag{2}$$

donde las barras indican la aproximación del primer armónico.

b.- Cálculo de las series $\sum_{3}^{\infty *} \frac{1}{L_n}$ y $\sum_{3}^{\infty *} \frac{1}{nL_n}$ . Los asteriscos indican suma sobre los términos impares únicamente. Se suma un gran número de términos de estas series lentamente convergentes, hasta obtener una precisión de 9 cifras significativas.

c.- Estimación de la amplitud de $x(t)$. La mayor dificultad del problema consiste en encontrar a priori una buena cota para la amplitud de la solución periódica exacta $x(t)$ ; una buena estimación se deriva de [2] . La desigualdad que proporciona esta estimación se resuelve aumentando el número de cifras por medio de un proceso iterativo.

d,e.- Estimación de $d_1$ y de $\sum_{3}^{\infty *}$. Las estimaciones de la amplitud del primer armónico, $d_1 \cos(\omega t + \theta_1)$ , y de los armónicos impares de orden mayor, $\sum_{3}^{\infty *} (a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t)$. de la solución exacta, se calculan fácilmente usando la estimación de la amplitud de la solución periódica exacta $x(t)$ .

f.- Estimación de $|\varepsilon| + |\eta|$ . Se calcula finalmente una estimación para la suma de los errores en los coeficientes $a_1$ y $b_1$ del primer armónico.

Los cálculos fueron hechos usando el computador IBM 1130 de la Universidad de los Andes, con precisión extendida, lo cual proporciona 9 cifras significativas. Un listado del programa se puede obtener escribiendo a uno cualquiera de los autores.

3. *Conclusiones.* La estimación del error de la solución periódica aproximada, obtenida por el método del primer armónico, está dada por :

$$|x(t) - \bar{x}(t)| \leq |a_1 - \bar{a}_1| + |b_1 - \bar{b}_1| + |\sum_{3}^{\infty *}| = |\varepsilon| + |\eta| + |\sum_{3}^{\infty *}| .$$

La suma de las estimaciones de $|\sum_{3}^{\infty *}|$ y $|\varepsilon| + |\eta|$ proporciona el resultado final.

Este resultado, redondeado en 8 decimales, se encuentra en el apéndice para $\omega = 0.8\,(0.1)\,5.0$ .

Para frecuencias superiores a 0.8, la estimación del error decrece rápidamente a medida que aumentan los valores de la frecuencia. Las estimaciones de $|\sum_{3}^{\infty}|$ y $|\varepsilon|+|\eta|$ aumentan a medida que aumenta la nolinealidad. No se espera una diferencia notoria entre la solución periódica aproximada (2) y la solución exacta $x(t)$, debido a que se escogió una no-linealidad "pequeña". Esto queda confirmado por los resultados numéricos.

*Agradecimientos.* Los autores agradecen la ayuda y colaboración brindada por el personal del Centro de Computación de la Universidad de los Andes para obtener los resultados numéricos.

## REFERENCIAS

1. P. SAGIROW, *Zur Trage der Fehlerabschätzung beim Verfahren der harmonischen Balance*, ZAMM, 40 (1960), 456-463.
2. G. DEMARÉE, *On the error estimate for the approximate periodic solution of the nonlinear forced differential equation $L(D)\,x + f(x) = p \sin \omega t$ (en Alemán)* Publications du Séminaire de Mécanique de la Faculté des Sciences Appliquées de l'Université Libre de Bruxelles, 1966-67, 82-89.
3. W. S. LOUD, *On periodic solutions of Duffing's equation with damping,* Journal of Mathematics and Physics, (1955), 173-178.

*Facultad de Ingeniería*
*Universidad de los Andes*
*Bogotá, D. E., Colombia, S. A.*

*(Recibido en junio de 1972).*

## *APÉNDICE*

| $\omega$ | $\lvert\varepsilon\rvert + \lvert\eta\rvert + \lvert \sum_{3}^{\infty} {}^{*} \rvert$ |
|---|---|
| 0.8 | 0.01586329 |
| 0.9 | 0.00686280 |
| 1.0 | 0.00357416 |
| 1.1 | 0.00202959 |
| 1.2 | 0.00120667 |
| 1.3 | 0.00074242 |
| 1.4 | 0.00046961 |
| 1.5 | 0.00030411 |
| 1.6 | 0.00020103 |
| 1.7 | 0.00013536 |
| 1.8 | 0.00009267 |
| 1.9 | 0.00006441 |
| 2.0 | 0.00004541 |
| 2.1 | 0.00003243 |
| 2.2 | 0.00002345 |
| 2.3 | 0.00001714 |
| 2.4 | 0.00001267 |
| 2.5 | 0.00000946 |
| 2.6 | 0.00000712 |
| 2.7 | 0.00000541 |
| 2.8 | 0.00000415 |
| 2.9 | 0.00000321 |
| 3.0 | 0.00000250 |
| 3.1 | 0.00000196 |
| 3.2 | 0.00000154 |
| 3.3 | 0.00000123 |
| 3.4 | 0.00000098 |
| 3.5 | 0.00000079 |
| 3.6 | 0.00000064 |
| 3.7 | 0.00000052 |
| 3.8 | 0.00000042 |
| 3.9 | 0.00000035 |
| 4.0 | 0.00000029 |
| 4.1 | 0.00000024 |
| 4.2 | 0.00000020 |
| 4.3 | 0.00000016 |
| 4.4 | 0.00000014 |

| | |
|---|---|
| 4.5 | 0.00000012 |
| 4.6 | 0.00000010 |
| 4.7 | 0.00000008 |
| 4.8 | 0.00000007 |
| 4.9 | 0.00000006 |
| 5.0 | 0.00000005 |

| $\omega$ | ESTIMACIÓN DEL ERROR |
|---|---|
| 0.8 | 0.158632926E-01 |
| 0.9 | 0.686279620 E-02 |
| 1.0 | 0.357415772 E-02 |
| 1.1 | 0.202958939 E-02 |
| 1.2 | 0.120667401 E-02 |
| 1.3 | 0.742417358 E-03 |
| 1.4 | 0.469610429 E-03 |
| 1.5 | 0.304114385 E-03 |
| 1.6 | 0.201034258E-03 |
| 1.7 | 0.135357647 E-03 |
| 1.8 | 0.926671191E-04 |
| 1.9 | 0.644148653E-04 |
| 2.0 | 0.454097269E-04 |
| 2.1 | 0.324317544E-04 |
| 2.2 | 0.234456191E-04 |
| 2.3 | 0.171425998E-04 |
| 2.4 | 0.126679037E-04 |
| 2.5 | 0.945507396E-05 |
| 2.6 | 0.712362139E-05 |
| 2.7 | 0.541474391E-05 |
| 2.8 | 0.415031190E-05 |
| 2.9 | 0.320635084E-05 |
| 3.0 | 0.249565772E-05 |
| 3.1 | 0.195628783E-05 |
| 3.2 | 0.154381963E-05 |
| 3.3 | 0.122611140E-05 |
| 3.4 | 0.979707641E-06 |
| 3.5 | 0.787353253E-06 |
| 3.6 | 0.636252817E-06 |
| 3.7 | 0.516852897E-06 |
| 3.8 | 0.421965656E-06 |
| 3.9 | 0.346148958E-06 |
| 4.0 | 0.285255243E-06 |
| 4.1 | 0.236104042E-06 |
| 4.2 | 0.196242027E-06 |
| 4.3 | 0.163766338E-06 |
| 4.4 | 0.137191952E-06 |
| 4.5 | 0.115355327E-06 |
| 4.6 | 0.973395421E-07 |
| 4.7 | 0.824180181E-07 |
| 4.8 | 0.700134606E-07 |
| 4.9 | 0.596639763E-07 |
| 5.0 | 0.509994501E-07 |