Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VII (1973) págs. 67-79

SOBRE DERIVACIONES EXTERIORES DE ÁLGEBRAS DE LIE

por

Beatriz Farías de CRAIGNOU

RESUMEN

En este trabajo se estudia la existencia o inexistencia de derivaciones exteriores de un álgebra de Lie y dónde se hallan en D(L).

Las álgebras de Lie nilpotentes poseen por lo menos una derivación exterior. Las álgebras de Lie solubles con centro no trivial tienen derivaciones exteriores en el radical de D(L). Ciertas clases de álgebras de Lie tienen derivaciones exteriores contenidas en el nil-radical de D(L).

Es de notar que no todas las álgebras de Lie que poseen centros no triviales tienen derivaciones exteriores. Si el radical R de L posee derivaciones exteriores, entonces L posee derivaciones exteriores. Se da además una condición necesaria y suficiente para que una derivación sea interior y finalmente algunos resultados muestran cómo la estructura de L está afectada por la inexistencia de derivaciones exteriores.

1. *Introducción.*

La terminología, definiciones y bibliografía usadas en mi artículo sobre Derivaciones de Algebras de Lie (Rev. Colombiana Mat., VII(1973), serán las mismas usadas en este nuevo artículo expositorio.

Primero que todo vamos a considerar la existencia de derivaciones exteriores (no-interiores) de un álgebra de Lie L, y una vez que su existencia haya sido establecida vamos a considerar donde están situadas en $D(L)$.

2. *Existencia de Derivaciones Exteriores.*

El primer resultado muestra que todas las derivaciones de un álgebra de Lie semisimple son interiores.

DEFINICIÓN 1. La forma de Killing sobre un álgebra de Lie L es una forma bilineal que a cada pareja de elementos x,y de L asocia un elemento $(x,y)_L$ del cuerpo ϕ sobre el cual L está definida y dada por

$$(x,y)_L = traza\ (adx\ ady) = tr(adx\ ady)\ .$$

Denotamos por $L^{\perp}$ el conjunto de todos los y tales que $(x,y)_L = 0$ para todo $x \in L$. La forma de Killing se dice regular si $L^{\perp} = (0)$. Tenemos entonces las siguientes caracterizaciones de álgebras de Lie semisimples.

LEMA 2. L es semisimple si, y sólo si, la forma de Killing de L es regular.

Prueba. [20, p.22].

TEOREMA 3. Si L es semisimple, entonces toda derivación D de L es interior.

Prueba. La aplicación $x \to tr(adx)D$ es una aplicación lineal de L en ϕ. Puesto que (x,y) es regular existe un elemento $\delta \in L$ tal que

$$(\delta, x) = tr(adx)D \quad , \text{ para todo } \quad x \in L\ .$$

Sea E la derivación $D - ad\delta$, entonces

$$tr(adx)E = tr(adx)D - tr(adx)(ad\delta) = tr(adx)\,D - (\delta, x) = 0.$$

Ahora consideremos

$$\begin{aligned}(xE,y) &= tr\,(adxE)\,ady = tr\,[adx, E]\,ady \\ &= tr(\,(adx)\,Eady - Eadx\;ady) = tr(Eady\;adx - Eadx\;ady) \\ &= tr\;E\;ad\,[\,yx\,] = 0.\end{aligned}$$

Puesto que (x,y) es regular, esto implica $E = 0$. Entonces $D = ad\delta$, esto es, toda derivación es interior.

En contraste con el resultado precedente tenemos el resultado siguiente de Jacobson y Shenkman.

TEOREMA 4. Toda álgebra de Lie nilpotente tiene una derivación exterior.

Prueba. Puesto que L es soluble posee un ideal M de codimensión 1. Para algún e, sea $L = \phi e \oplus M$ y sea $Z = \{\, x \in L \mid [x, M] = 0 \,\}$ el centralizador de M en L. Entonces Z es un ideal de L y $(0) \neq Z(L) \subset Z$. Existe un entero n tal que $Z \subset L^n$ y $Z \not\subset L^{n+1}$. Escojamos un elemento z tal que $z \in Z$ y $z \notin L^{n+1}$. Entonces la transformación lineal D que envía $l = m + \lambda e$, $m \in M$, $\lambda \in \phi$, en λz es una derivación de L. Si D es interior, entonces $D = ad\delta$ para algún $\delta \in L$ y $(m+\lambda e)\,ad\delta = [m+\lambda e, \delta] = [m, \delta] + \lambda [e, \delta] = \lambda z$, lo cual implica que $[\delta, m] = 0$ y $d \in Z$, así que $z = [\delta, e] \in [Z, L] \subset [L^n, L] = L^{n+1}$, contrario a la escogencia de z.

En [25] Togo prueba un resultado mucho más fuerte y muestra que toda álgebra de Lie soluble cuyo centro es diferente de (0) tiene derivaciones exteriores. Además existen derivaciones exteriores que satisfacen $D^2 = 0$.

LEMA 5. Sea L un álgebra de Lie sobre un cuerpo ϕ tal que $Z(L) \neq (0)$. Asumamos además que L no es la suma directa de un ideal unidimensional y de un ideal L_1 tal que $L_1 = L_1^2$ y $Z(L_1) = 0$, entonces L tiene una derivación *exterior nilpotente* D, *con* $D^2 = 0$. *Si esto ocurre,* L *tiene una derivación exterior semisimple* .

Prueba . Consideremos primero el caso donde L no es abeliana y no tiene sumandos directos abelianos, i.e., $Z(L) \subset L^2$. Puesto que $L \neq L^2$, existe un ideal M de L de codimensión 1 que contiene L^2. Puesto que $Z(L) \subset L^2 \subset M$, se sigue del lema 5 que $[L,Z(M)] \subset Z(M)$, pero $[L,Z(M)] \neq Z(M)$. Escojamos $e \in L$ tal que $L = M \oplus \phi e$ y $z \in Z(M)$ tal que $z \notin [L, Z(M)]$. Entonces la transformación lineal que envía $l = m + \lambda e$, $m \in M, \lambda \in \phi$, en λz es una derivación D de L, exterior como en la prueba del teorema 4. Aún más , tenemos $D^2 = 0$ puesto que $MD = (0)$ y $eD^2 = zD = 0$.

Si L no es abeliana y tiene un sumando directo no abeliano diferente de (0) , entonces $Z(L) \not\subset L^2$. Descomponemos entonces L en una suma directa de un ideal central no nulo L_1 y un ideal no nulo L_2 que contenga a $[L,L]$, tal que $Z(L_2) \subset L_2^2$. Si $dim L_1 > 1$, para toda transformación lineal D_1 de L_1 sea D su extensión trivial en L. Entonces D es una derivación exterior, de otra manera $l_1 D_1 = [l_1, d] = 0$ para toda D_1. Si tomamos D_1 tal que $D_1^2 = 0$, entonces $D^2 = 0$. Si $dim\ L_1 = 1$ y $L_2 \neq [L_2, L_2]$, un endomorfismo arbitrario diferente de cero D de L, que satisfaga las condiciones $L_2 D \subset L_1$ y $(L_1 + [L_2, L_2])D = (0)$ es una derivación exterior de L tal que $D^2 = 0$. De hecho, si el endomorfismo D es una derivación interior, $D = ad\delta$, para todo $l \in L$, $l = l_1 + l_2$, $l_1 \in L_1$, $l_2 \in L_2$ y $(l_1 + l_2)D = [(l_1 + l_2), \delta] = [l_1, \delta] + [l_2, \delta] = l_2 D \in L_1$. Esto lleva a una contradicción puesto que $L_1 \cap L_2 = (0)$.

Si $dim L_1 = 1$ y $Z(L_2) \neq (0)$, un endomorfismo arbitrario D, no nulo, de L que satisfaga las condiciones $L_1 D \subset Z(L_2)$ y $L_2 D = (0)$ es una derivación exterior y puesto que $L_1 D^2 = (0)$, $D^2 = 0$. Finalmente, si $dim\ L_1 = 1$ y $L_2 = [L_2, L_2]$ con $Z(L_2) = (0)$, i.e., $L = Z(L) \oplus [L,L]$ donde $Z(L) = L_1$ y $[L,L] = L_2$, entonces la extensión trivial D de un endomorfismo D_1 de L_1 es una derivación exterior de L, y D es semisimple.

Finalmente, consideremos el caso cuando L es abeliana. Todo endomorfismo no nulo D de L es una derivación exterior porque, de otra manera, $D = ad\delta$ para algún $\delta \in L$ y entonces $lD = [l, \delta] \in L, L = (0)$ para todo $l \in L$, lo cual es una contradicción. Si $dim\ L > 1$, existe una derivación D tal que $D^2 = 0$, por ejemplo, la derivación definida por $L_1 D \subset L_2$ y $L_2 D = (0)$ si $L = L_1 \oplus L_2$. Si $dim\ L = 1$ toda derivación es semisimple.

COROLARIO. Toda álgebra de Lie soluble cuyo centro es diferente de cero y toda álgebra de Lie nilpotente de dimensión > 1 tienen derivaciones exteriores nilpotentes.

Prueba. Un álgebra de Lie soluble no tiene ningún sumando directo diferente de cero S tal que $S = [S,S]$. El corolario es entonces consecuencia del teorema 6.

3. *Localización de derivaciones exteriores.*

Habiendo establecido la existencia de derivaciones exteriores en ciertas álgebras de Lie, determinamos ahora en dónde están situadas en $D(L)$. Sato en [18] muestra que siempre hay una derivación exterior en el radical de $D(L)$ si L es nilpotente. El problema es entonces determinar si una derivación tal puede encontrarse en el nil-radical de $D(L)$. Introducimos entonces algunas notaciones :

$$N_o = \{ D \in D(L) \mid LD \subset L^2 \text{ y } L^2 D = (0) \} ;$$

$$C_o = \{ D \in D(L) \mid LD \subset Z(L) \text{ y } Z(L) D = (0) \} ;$$

$$C(L) = \{ D \in D(L) \mid LD \subset Z(L) \} .$$

Como L^2 y $Z(L)$ son ideales característicos de L se sigue que N_o y C_o son ideales abelianos de $D(L)$. Entonces N_o y C_o están contenidos en el nil-radical de $D(L)$.

TEOREMA 7. Sea L un álgebra de Lie no-abeliana tal que $L \neq [L,L]$ y $Z(L) \neq (0)$.

(1) Si L no tiene sumandos directos abelianos y $Z(M) \subset L^2$ para algún ideal M de L de codimensión 1, entonces L tiene una derivación exterior en N_o.

(2) Asumamos que L tiene un sumando directo abeliano diferente de (0).

(a) Si $Z(L)$ no es un sumando directo de L, entonces L tiene una derivación en $N_o \cap C(L)$.

(b) Si $Z(L)$ es un sumando directo de L y $L/Z(L)$ no coincide con el álgebra derivada, entonces L tiene una derivación exterior en C_o.

(c) Si $Z(L)$ es un sumando directo de L y $L/Z(L)$ coincide con el álgebra derivada, entonces L tiene una derivación exterior en $Z(D(L))$.

Prueba. (1) Por hipótesis, $Z(L) \subset L^2$ y existe un ideal M de codimensión 1 tal que $Z(M) \subset L^2$ y $Z(L) \subset L^2 \subset M$. Por el lema 5, $[L, Z(M)] \subset Z(M)$, pero $[L,Z(M)] \neq Z(M)$. Además tenemos que todo endomorfismo D de L definido de tal manera que $LD \subset Z(M)$, $LD \not\subset [L, Z(M)]$ y $MD = (0)$, es una derivación exterior de L, la cual pertenece a N_o puesto que $Z(M) \subset L^2 \subset M$.

(2) Puesto que L tiene un sumando directo abeliano diferente de (0), $Z(L) \not\subset [L, L]$. Entonces podemos escribir $L = L_1 \oplus L_2$, donde L_1 es un ideal central, L_2 un ideal tal que $[L, L] \subset L_2$ y $Z(L_2) \subset [L_2, L_2]$. Si $Z(L)$ no es un sumando directo de L, entonces $Z(L_2) \neq (0)$. Todo endomorfismo D, no nulo, de L definido de tal manera que $L_1D \subset Z(L_2)$ y $L_2D = (0)$ es una derivación exte -

rior que pertenece a $N_o \cap C(L)$.

Si $Z(L)$ es un sumando directo y $L/Z(L)$ no coincide con $[L,L]$, entonces $Z(L) = L_1$ y $L_2 \neq [L_2, L_2]$. Todo endomorfismo no nulo D de L tal que $L_2 D \subset L_1$ y $(L_1 + [L_2, L_2])\, D = 0$ es una derivación exterior que pertenece a C_o. Si $Z(L)$ es un sumando directo y $L/Z(L)$ coincide con $[L, L]$, entonces $Z(L) = L_1$ y $L_2 = [L_2, L_2] = [L, L]$. La extensión trivial del endomorfismo identidad de L_1 es una derivación exterior que pertenece a $Z(D(L))$.

Togo considera además una clase de álgebras de Lie no incluídas en el teorema 7, que llama álgebras de tipo T [26,267], probando esencialmente que tales álgebras tienen una derivación exterior en el radical de $D(L)$.

Finalmente, Sato señala que el radical nilpotente de $D(L)$ puede consistir únicamente de derivaciones interiores. Un ejemplo de tal caso es el siguiente :

Sea L un álgebra de Lie cuya base $\{x_1, x_2, x_3\}$ satisface

$$[x_1, x_2] = x_3, \ [x_1, x_3] = [x_2, x_3] = 0 \ .$$

Definamos una derivación D_o por

$$x_1 D_o = x_1 \ , \ x_2 D_o = x_2 \ , \ x_3 D_o = 2x_3 \ ;$$

entonces, puesto que $L D_o \not\subset [L, L]$, D_o no es interior, de modo que L posee derivaciones exteriores. El nil-radical de $D(L)$ es de hecho de dimensión 2, generado por $ad\, x_1$ y $ad\, x_2$.

En otro artículo, Sato [18] señala que las álgebras de Lie que poseen derivaciones exteriores tienen centro diferente de (0), y en el teorema 3 se ha mostrado que toda derivación de un álgebra de Lie semisimple es interior. Nos preguntamos entonces si las álgebras de Lie de centro no trivial tienen derivaciones exteriores. Sato muestra que la respuesta es negativa construyendo un álgebra de Lie de dimensión 41 con centro de dimensión 1 y sin derivaciones exteriores.

4. Derivaciones exteriores del Radical.

La existencia de derivaciones exteriores del radical R de L implica la existencia de derivaciones exteriores de L. Para establecer este resultado necesitamos las definiciones siguientes [4,180].

DEFINICIÓN. Una subálgebra A de un álgebra de Lie L es *toroidal* si, y sólo si, es abeliana y todos sus elementos son semisimples.

Sea $x \in GL(V)$ el álgebra de Lie de todos los automorfismos lineales de un espacio vectorial de dimensión finita V sobre un cuerpo ϕ, y $G(x)$ la más pequeña subálgebra de $GL(V)$ que contiene a x. Todo elemento de $G(x)$ es llamado una *réplica* de x. En la descomposición de Fitting las componentes semisimple y nilpotente de x son réplicas de x.

DEFINICIÓN. Una subálgebra G de $GL(V)$ es *algebraica* si, y sólo si, toda réplica de un elemento de G pertenece también a G [4, 180].

DEFINICIÓN. Una subálgebra G de $GL(V)$ es *escindible* si las componentes de cada elemento de G pertenecen también a G.

Probamos ahora un resultado de Hochschild [10] que da una descomposición de una derivación de L.

LEMA 10. Sea $L = S \oplus R$ una descomposición de Levi de L. Denotemos por $A(S)$ el conjunto de derivaciones de L que envian S en (0). Entonces toda derivación de L es la suma de una derivación interior y de una derivación que anula a S.

Prueba. Tenemos $RD \subset R$ para toda derivación D de L. Todas las derivaciones de S son interiores, luego existe un $x \in L$ tal que $sD = [x,s]$, para todo $s \in S$. Sea $D' = D - adx$, entonces $SD' = (0)$ y, por lo tanto, $[s,r]D' = [sD',r] + [s,rD'] = [s,rD']$, $s \in S$, $r \in R$. Así, $D = D' + adx$.

Recíprocamente, toda derivación de R que satisfaga $[s,r]D = [s,rD]$ puede extenderse a una derivación de L si definimos $sD = 0$ para todo $s \in S$. De donde $D(L) = I(L) + A(S)$.

Podemos ahora probar el

LEMA 11. Entre las subálgebras toroidales maximales del radical de $D(R)$ existe una que puede inmergirse en $A(S)$.

Prueba. Puesto que $D(R)$ es algebraica las componentes semisimple y nilpotente de toda derivación de R están en $D(R)$; entonces si P es el radical nilpotente de $D(R)$, existe una subálgebra semisimple maximal G_1 y una subálgebra toroidal maximal B del radical H de $D(R)$ tales que $D(R) = G_1 + H$, $H = B_1 + P$, $[G_1 B_1] = (0)$, [5, 144]. Puesto que $ad_R SD = [ad_R S, D]$, $ad_R S$ es un ideal semisimple de $D(R)$. Entonces existe una subálgebra semisimple maximal G de $D(R)$ tal que $ad_R S \subset G$. Entonces G es la imagen del automorfismo especial σ de $D(R)$, [9]. Sea $\sigma(B_1) = B$. Luego B es una subálgebra toroidal maximal del radical H de $D(R)$ y $[G,B] = (0)$. Se sigue que $[ad_R S, B] = (0)$, i.e., para toda $D \in B$, y todos $s \in S$ y $r \in R$, $ad_R SB = (0)$, i.e., $[r,sD] = 0$, i.e., $[s,r]D = [s,rD]$. En consecuencia, D puede extenderse a una derivación de L haciendo $SD = (0)$. Y, por lo tanto, B puede inmergirse en $A(S)$.

Si L no es soluble podemos probar el

TEOREMA 12. Sea L un álgebra de Lie no soluble, R su radical. Si R

tiene una derivación exterior semisimple en el radical de $D(R)$, *entonces* L *tiene una derivación exterior semisimple.*

Prueba. Sea $L = R \oplus S$ una descomposición de Levi de L. Por el lema 11 existe una subálgebra toroidal maximal B del radical H de $D(R)$ que puede inmergirse en $A(S)$. Si H tiene una derivación exterior semisimple en el radical de $D(R)$ tal derivación exterior es un elemento de B y es una derivación exterior de L.

5. *Una condición necesaria y suficiente para que una derivación sea interior.*

Sea L_1 una subálgebra de L. Denotemos por $D|L_1$ la restricción a L_1 de una derivación D de L y para todo subconjunto G de $D(L)$ denotemos por $G|L_1$ el conjunto de $D|L_1$ para toda $D \in G$.

Si I es un ideal semisimple de L y I_0 el conjunto de todos los $x \in L$ tales que $[I,x] = (0)$, entonces I_0 es un ideal de L que contiene el radical de L y $L = I \oplus I_0$.

Probemos primero el

LEMA 13. *Un ideal semisimple de* L *y su ideal complementario en* L *son ambos característicos.*

Prueba. Sean I un ideal semisimple de L é I_0 el ideal complementario de I en L. Si $D \in D(L)$, entonces $D|I$ es una derivación de I en L y, por lo tanto, interior. Entonces existe un $x \in L$ tal que $D|L = ad_1 x$. De donde $ID = [I, x] \subset I$ puesto que I es un ideal y entonces I es característico.

Sea R el radical de L. Puesto que $R \subset I_0$ tenemos que $I_0 \cap R = R$ es el radical de I_0. Entonces existe una subálgebra semisimple T de I_0 tal que

$I_o = T \oplus R$. Puesto que R es semisimple existe un $y \in L$ tal que $D|T = ad_T y$ para toda $D \in D(L)$. Como I_o es un ideal de L, $TD = [T, y] \subset I_o$. Esto, junto con $RD \subset I_o$ y, en consecuencia, I_o es característico.

Requerimos también el resultado siguiente, el cual anotamos sin prueba :

LEMA 14. Sean R y N el radical y nil-radical de L, respectivamente. Sea G una subálgebra semisimple maximal del ideal complementario del ideal semisimple más grande de L. Entonces ninguna adx, para x en G, induce derivaciones interiores de R ó N [21,72] .

TEOREMA 15. Una derivación D de L es interior si, y sólo si, existe un elemento $x \in L$ tal que $D|R = adx|R$, donde R es el radical de L.

Prueba. Por su definición, si D es interior, existe un $x \in L$ tal que $D = ad_L x$ y entonces $D|R = ad_R x$. Supongamos ahora que I es el ideal semisimple más grande de L, e I_o su ideal complementario en L ; G una subálgebra semisimple maximal de I_o, y, por lo tanto, $I_o = G \oplus R$. Sea $G_o = I \oplus G$, entonces G_o es una subálgebra semisimple de L. En consecuencia, existe $y \in L$ tal que $D|G_o = ady \mid G_o$. Sea $D_1 = D - ady$, entonces D_1 es una derivación de L tal que $G_o D_1 = (0)$ y esto es suficiente para probar el teorema en el caso de D_1 .

Supongamos que D es una derivación de L tal que $G_o D = (0)$ y satisface la condición del teorema. Si Z es el centro de R, puesto que $[G, Z] \subset Z$ y toda representación de un álgebra de Lie semisimple es completamente reducible, podemos encontrar un subespacio U de R tal que $R = U \oplus Z$ y $[G,U] \subset U$. Sea $x \in L$ tal que $D|R = ad_R x$; entonces $rD = r\ adx = [r,x]$, para todo $r \in R$, $s \in G$. Puesto que $(G_o) D = 0$ tenemos $(G) D = (0)$, de donde $[[r, u], s] = [[r, s], u]$, para todo $r \in R$. Como $[u,s] \in R$, tenemos, por lema el 14, que $[u, s] = 0$ y

adu anula a G y es una derivación interior de L, cuando $x \in U$. Así, $G\, adx \subset G\, ad\, U \subset [G,U] \subset U$ y $G\, adx \subset Z$. Por lo tanto, $G\, adx \subset Z \cap U = (0)$. Pero $G_o adx = (0)$ y, por consiguiente, $D = adx$.

Como una consecuencia tenemos el

COROLARIO. (i) $D(L) = I(L)$ si, y sólo si, $D(L) \mid R = I(L) \mid R$.

(ii) Si toda derivación de R puede extenderse a una derivación interior de L, entonces todas las derivaciones de L son interiores.

6. *Estructura de L.*

Finalmente investigamos cómo la estructura de L está afectada por la existencia o inexistencia de derivaciones exteriores. En este sentido tenemos el siguiente resultado, otra consecuencia del teorema 6.

TEOREMA 16. Sea L un álgebra de Lie tal que $Z(L) \neq (0)$. Entonces :

(1) Si L no tiene derivaciones exteriores D tales que $D^2 = 0$, entonces L es 1-dimensional ó L no es soluble y su radical R es $[L,R]$, ó es la suma directa de $[L,R]$ y del centro $Z(L)$, el cual es 1-dimensional. En todos estos casos, R es nilpotente.

(2) Si $D(L) = I(L)$, el ideal de derivaciones interiores, L no es soluble y $R = [L, R]$.

Prueba. Sea $L = S \oplus R$ una descomposición de Levi de L. Entonces $L^2 = S \oplus [L,R]$ y, en consecuencia, $[L,R]$ es el radical de L^2. Además $[L,R] \subset N$, el radical nilpotente de L.

(1) Si L no tiene derivaciones exteriores D tales que $D^2 = 0$ y L no es 1-dimensional, entonces por el teorema 6, o bien $L = L^2$, o bien L es la suma di-

recta de un ideal central 1-dimensional L_1 y un ideal diferente de (0), L_2, tal que $L_2 = L_2^2$ y $Z(L_2) = (0)$. De donde L no es soluble. En el primer caso $L = S \oplus R = L^2 = S \oplus [L, R]$ y, por lo tanto, $R = [L, R]$. En el segundo caso $L = L_1 \oplus L_2$, $L_1 = Z(L)$, y el radical R_2 de L_2 es $[L_2, R_2] = [L, R]$. Entonces $R = Z(L) \oplus [L, R]$. En ambos casos R es nilpotente.

(2) Puesto que L no tiene derivaciones exteriores, del teorema 6 se sigue que $L = L^2$. Entonces L no es soluble y $R = [L, R]$.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia, S. A.

(Recibido en enero de 1973).