Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VII (1973), págs. 85-92

CONEXIONES SOBRE EL FIBRADO TRANSVERSO A UNA FOLIACIÓN

por

Alberto **MEDINA PEREA**

RESUMEN

Se caracterizan ciertas conexiones sobre el fibrado transverso a una fibración básica. En particular, se deduce la nulidad del exotismo de una foliación dotada de una métrica transversalmente proyectable.

Se dan aquí algunas caracterizaciones simples de ciertas conexiones, sobre el fibrado transverso a una foliación, básicas en el estudio de las clases características de Bott y Haefliger. Todos los objetos aquí considerados se supondrán diferenciables de clase C^∞.

Partiendo de la noción clásica de conexión sobre un fibrado principal, darse una conexión sobre un fibrado vectorial $E \xrightarrow{p} M$ equivaldrá a darse una conexión sobre el fibrado principal de referenciales asociado. Utilizaremos en lo que sigue con notaciones evidentes, la siguiente proposición :

PROPOSICIÓN 1. Darse una conexión sobre $E \xrightarrow{p} M$ *equivale a darse un operador diferencial de primer orden,*

$$D : \Gamma(E) \to \Gamma(T^* \otimes E)$$

que cumpla la condición

$$D(fs) = df \otimes s + fDs \, ,$$

para toda función f *y toda sección* s *.*

Supongamos M provista de una foliación $\mathcal{F}$ de codimensión p y notemos con F al fibrado vectorial adaptado a $\mathcal{F}$. El fibrado $Q = T(V)/F$ será el fibrado transverso a $\mathcal{F}$ y $E_T(M, p_T, Gl(p, \mathbb{R}))$ denotará al fibrado principal asociado, que llamaremos fibrado de referenciales transversos a la foliación $S; \pi : T(V) \to Q$ es la aplicación canónica; E_T puede dotarse de una 1-forma tensorial θ con valores en $\mathbb{R}^p$, poniendo para todo Z tangente en u a E_T,

$$\theta(Z) = u^{-1}(\pi(p_T Z)) \, ,$$

con $p_T(u) = x$ y en donde u es considerado como un isomorfismo de $\mathbb{R}^p$ sobre la fibra Q_x. Definimos entonces una foliación $\mathcal{F}_T$ sobre E_T poniendo :

Un vector Z tangente en u a E_T es tangente a $\mathcal{F}_T$ si $\theta(Z) = 0$ y $d\theta(Z,Z') = 0$ para todo vector Z' tangente en u a E_T.

Como se muestra inmediatamente que $\mathcal{F}_T$ es invariante por translaciones a derecha y que sus hojas son revestimientos de las hojas de $\mathcal{F}$, diremos, siguiendo a Molino ([2]) que E_T es *foliado sobre $(M, \mathcal{F})$*. Una sección local de E_T reunión de hojas (locales) de $\mathcal{F}_T$ se dirá sección adaptada a $\mathcal{F}_T$, o simplemente, sección adaptada.

Una conexión ω sobre E_T se llama *transversa*, o de Molino, si las hojas de

la foliación F_T son horizontales para la conexión. La existencia de conexiones transversas está garantizada por el hecho de que la distribución determinada por F_T es diferenciable e invariante por translaciones.

Consideremos ahora una métrica Riemanniana sobre M y con ayuda de ella construyamos un campo diferenciable de elementos de contacto de dimensión p suplementarios (ortogonales) en cada punto al espacio tangente a la hoja correspondiente. En la vecindad de cada punto se pueden construir entonces n 1-formas reales diferenciables linealmente independientes, $dx^1, \ldots, dx^p, \theta^{p+1}, \ldots, \theta^n$, donde las x^i son funciones distinguidas y las θ^i definen el campo de elementos de contacto suplementarios a las hojas. Esto permite expresar localmente toda q-forma diferenciable β sobre M como una suma de " formas puras " del tipo (r,s) :

$$\beta = \sum_{r+s=q} \beta_{r,s} \quad ,$$

donde una forma pura de tipo (r,s) es, por definición, una combinación lineal de formas $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} \wedge \theta^{d_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{d_s}$.

Además, si se calcula el referencial dual del coreferencial $\{ dx^a, \theta^u \}$, $1 \leq a \leq p$, $p+1 \leq u \leq n$ con $\theta^u = dx^u + t^u_a \, dx^a$, se encuentra

$$X_a = \partial/\partial x^a - t^u_a \, \partial/\partial x^u \quad , \quad X_u = \partial/\partial x^u$$

donde $\{X_a\}$ es un referencial de Q y $\{X_n\}$ es un referencial de F . Convendremos en decir que una forma diferenciable β de tipo $(r\;,0)$

$$\beta = \beta_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$$

es *transversalmente proyectable* si $X_u (\beta i_1 \ldots i_r) = 0$ para todo u ([5]) .

Adoptado este lenguaje, consideremos una conexión ω sobre nuestro fibrado principal foliado E_T ; se tiene entonces :

PROPOSICIÓN 2. La conexión ω es transversa si, y solamente si, la restricción de ω a toda sección adaptada de E_T es una forma de tipo (1,0).

Claramente si la restricción de ω a toda sección adaptada es de tipo *(1,0)* todo vector tangente a F_T es horizontal para la conexión ya que el campo de elementos de contacto definido por F está precisamente dado por $dx^a = 0$.

Recíprocamente, si ω_o denota la restricción de ω a una sección adaptada s y

$$\omega_o = k_a\, dx^a + k_u\, \theta^u \;,$$

el hecho de ser ω transversa implica,

$$\omega_o(\partial/\partial x_u) = k_u = 0 \,. \qquad \blacksquare$$

Una conexión D sobre Q,

$$D : \Gamma(Q) \;\rightarrow\; \Gamma(T^* \otimes Q)$$

será llamada *básica* o de Bott si para todo $X \in \Gamma(F)$

$$D_X Z = \pi[X, \tilde{Z}] \;,$$

donde $\tilde{Z}$ es un campo vectorial tal que $\pi(\tilde{Z}) = Z$. La existencia de una conexión de esta naturaleza está siempre asegurada (ver [1]). Nos proponemos mostrar el resultado siguiente :

PROPOSICIÓN 3. Darse una conexión transversa sobre E_T equivale a darse una conexión básica sobre Q.

Supongamos primeramente que D es una conexión básica y sea $\psi_\alpha : E_T \mid U_\alpha \;\rightarrow\; U_\alpha \times Gl(p,\mathbb{R})$ una trivialización local de E_T tal que el re -

ferencial $\{X_a\}$ esté definido por la sección $\sigma_\alpha(x) = \psi_\alpha^{-1}(x, I)$. Localmente D puede escribirse ,

$$D X_a = \theta_a^b \otimes X_b \ .$$

Pero como D es básica,

$$\theta_a^b(X_u) X_b = D_{X_u} X_a = \pi[X_u, X_a] = \pi(-X_u(t_a^v) X_v) = 0 \quad ,$$

lo que equivale a decir que la matriz de la conexión D es de tipo $(1,0)$. Sea $\{E_b^a\}$ la base canónica de $Gl(p, \mathbb{R})$ y pongámos

$$\omega_\alpha = \theta_b^a \otimes E_b^a \ .$$

Existe entonces una única conexión sobre E_T determinada por las ω_α que, de acuerdo con la proposición 2, es transversa.

Recíprocamente, sea $\omega = \omega_a^b \otimes E_b^a$ una conexión transversa sobre E_T. Si $\theta_a^b = (\sigma_\alpha)^* \omega_a^b$ y $\overset{\alpha}{D} X_a = \theta_a^b \otimes X_b$.

Se obtiene una conexión D sobre Q poniendo

$$D|_{U_\alpha} = D^\alpha$$

Además, como σ_α es adaptada la restricción de ω_a^b a σ_α es de tipo $(1,0)$ y, por consiguiente :

$$\theta_a^b(X_u) = \omega_a^b(\sigma_\alpha X_u) = 0 \quad ,$$

es decir,

$$\overset{\alpha}{D}_{X_u} X_a = \theta_a^b(X_u) X_b = 0 \ .$$

Por lo tanto, si $Z = \xi_a X_a$, $X = \xi_u X_u$ se tiene $D_X Z = D_{\xi_u X_u}(\xi_a X_a) = \xi_u X_u(\xi_a) X_a$.

Finalmente, teniendo en cuenta las relaciones

$$[X_u X_v] = 0\ ,\quad [X_u, X_a] = -\ X_u(t_a^v)\, X_v \quad ,$$

se encuentra

$$\pi[\xi_u X_u, \xi_a X_a + \xi_v X_v])\ = \xi_u X_u(\xi_a)\, X_a\ . \qquad \blacksquare$$

Una conexión transversa ω sobre E_T es *proyectable* si ella es localmente la imagen recíproca de una conexión sobre el fibrado principal inducido por E_T sobre una subvariedad transversa a F . Se muestra inmediatamente que ω es proyectable si la restricción de ω a toda sección adaptada es de tipo *(1, 0)* y transversalmente proyectable. Una obstrucción a la existencia de una conexión proyectable es la llamada clase de Atiyah - Molino de la foliación ([2]). En lo que sigue nos proponemos construir una conexión proyectable tal que la forma diferenciable que representa la clase de Atiyah-Molino de F , con respecto a esta conexión, sea nula.

Una métrica g sobre M dada localmente por

$$g = g_{ab}\, dx^a\, dx^b + g_{uv}\, \theta^u\, \theta^v$$

se dice *transversalmente proyectable* ([4]) si

$$X_u(g_{ab}) = 0$$

para todo u, $p + 1 \leq u \leq n$.

Consideremos una variedad auxiliar B de dimensión p provista de una métrica g_B y supongamos que la foliación F con métrica transversalmente proyectable está dada por el atlas estructural $\{U_i f_i\}$ donde $\{U_i\}$ es un recubrimiento abierto de M y las f_i, $f_i : U_i \to B$, submersiones que satisfacen la condición:

Para todo $x \in U_i \cap U_j$ *existe una isometría local de* B , h^x *tal que*

$$f_j = h^x \circ f_i$$

en la vecindad de x .

Se tiene entonces ,

PROPOSICION 4. Existe una conexión ω *sobre* E_T *transversa proyectable deducida de manera natural de la conexión de Levi-Civita* ω' *de* B .

Demostración. Sea $R(B)$ el fibrado de referenciales de B . Como la aplicación

$$\begin{aligned} Q \mid U_i &\longrightarrow f_i^*(T(B)) \\ [X_x] &\longmapsto (x, df_i X_x) \end{aligned}$$

es un isomorfismo, se deduce la existencia de un morfismo de fibrado principal

$$F_i : E_T \mid U_i \longrightarrow R(B)$$

y en consecuencia el diagrama

$$\begin{tikzcd} E_T \mid U_i \arrow[r, "F_i"] \arrow[d, "P_T"'] & R(B) \arrow[d, "p"] \\ U_i \arrow[r, "f_i"] & B \end{tikzcd}$$

donde p es la correspondiente proyección, es conmutativo. Por lo tanto, si θ' denota la forma canónica sobre $R(B)$ se tiene,

$$\theta = F_i^* \theta'$$

Por otra parte, si se define la conexión ω sobre E_T poniendo

$$\omega\big|_{E_T \mid U_i} = f_i^* \omega' \quad ,$$

se encuentra que la relación

$$d\theta' + \omega' \wedge \theta' = 0 \quad ,$$

implica inmediatamente

$$d\theta + \omega \wedge \theta = 0 \, .$$

La nulidad de esta torsión y la proposición 2 permiten mostrar que ω es transversa. Ella es también proyectable.

Además se observa que la conexión D sobre Q deducida de ω, preserva la métrica sobre Q determinada por g_B. ■

Nota. Como D es básica y preserva la métrica, tomando $\nabla^0 = \nabla^1 = D$ se deduce que las solas clases características obtenidas mediante el morfismo exótico son las clases de Pontryagin (ver [1]). Nótese además que,

$$Pont^{(k)}(Q) = 0 \qquad \text{para} \qquad k > p \, .$$

BIBLIOGRAFÍA

1. R. BOTT, *Lectures on characteristic classes and foliations*, Lecture Notes Math., 279, Springer-Verlag, Berlín, 1972.
2. P. MOLINO, *Classe d'Atiyah d'un feuilletage et conexions transverses projetables*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 272 (1971), 779-781.
3. P. MOLINO, *Classes caractéristiques et obstruction d'Atiyah pour les fibrés principaux feuilletés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 272 (1971), 1376-1378.
4. B. L. REINHART, *Foliated manifolds with bundlelike metrics*, Ann. of Math., 69 (1959), 119-132.
5. I. VAISMAN, *Variétés riemanniennes feuilletées*, Czechoslovak Math. J., 21(96) (1971), 46-75.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D. E., Colombia, S. A.

(Recibido en marzo de 1973).