Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. VII, 1973, págs. 101 - 107

LA DESIGUALDAD DE CAUCHY - SCHWARZ

por
Alonso TAKAHASHI

RESUMEN

Se obtiene una generalización de la desigualdad de Cauchy-Schwarz para una forma hermítica positiva con valores en una C^*-álgebra no necesariamente conmutativa. La demostración de este resultado se usa luego para dar una nueva demostración de la mencionada desigualdad cuando la C^*-álgebra en cuestión es conmutativa.

1. *C^*-álgebras.* Una C^*-álgebra es un álgebra normada e involutiva A tal que $\|a\|^2 = \|a^* a\|$ para todo $a \in A$. Si A es una C^*-algebra y $\tilde{A}$ es el álgebra involutiva obtenida a partir de A añadiendo un elemento unidad, entonces la norma de A puede extenderse a $\tilde{A}$ de manera única, bajo la condición de hacer de $\tilde{A}$ una C^*-álgebra ([1], 1.3.8). Esto permite reducir casi siempre el estudio de las C^*-álgebras al caso en el cual hay un elemento unidad; haremos esta hipótesis de ahora en adelante.

Para cada elemento a de una C^*-álgebra (con unidad 1_A), el *espectro* de a es el conjunto $Sp\ a$ de todos los números complejos λ tales que $a - \lambda \cdot 1_A$ no tiene inverso; en consecuencia, a es invertible si, y sólo si, $0 \notin Sp\ a$. Para todo a de A existe el límite $\rho(a) = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{1/n}$; éste es el *radio espectral* de a ([2], Theorem (1.4.1)) y se tiene que $\rho(a) = sup\ (Sp\ a)$ ([2], Theorem (1.6.4)). Si c es un elemento invertible entonces $Sp(c^{-1}) = (Sp\,c)^{-1} (= \{\lambda : \lambda^{-1} \in Sp\ c\})$.

Sea A una C^*-álgebra y sea b un elemento de A; se dice que b es *auto-adjunto* si $b^* = b$. En este caso, todo elemento $Sp\,b$ es real. Se dice que un elemento c es *positivo*, y se escribe $c \geq 0$, si c es auto-adjunto y puede escribirse en la forma aa^* para algún a de A; esto ocurre si, y sólo si, todos los elementos de $Sp\ c$ son números reales no negativos. El conjunto de todos los c de A tales que $c \geq 0$ se denota A^+; éste es un subconjunto de A cerrado con respecto a la topología inducida por la norma ([1], 1.6.1). Si $c \geq 0$ y $c' \geq 0$ entonces $c + c' \geq 0$ y también $tc \geq 0$ para todo real t no negativo; si a y b son elementos de A tales que $a \leq b$ entonces $c^* a c \leq c^* b c$, para todo c de A ([1], 1.6.8).

Nótese que, para todo número t y todo elemento a de A, $Sp(a + t \cdot 1_A) = Sp\,a + t\ (= \{\lambda + t : \lambda \in Sp\ a\})$; entonces, si $a > 0$ y tomamos $t = \varepsilon > 0$, $0 \notin Sp\ (a + \varepsilon \cdot 1_A)$; luego $a + \varepsilon \cdot 1_A$ es invertible.

Si a es un elemento auto-adjunto y t es un real tal que $t \leq \lambda$, para todo $\lambda \in Sp\ a$, entonces $Sp\ (a - t \cdot 1_A) = \{\lambda - t : \lambda \in Sp\ a\}$, luego $Sp\ (x - t \cdot 1_A)$ está constituido por números reales no negativos, es decir, $a \geq t \cdot 1_A$.

Si a es auto-adjunto (en particular, si $a \geq 0$) entonces $\|a^2\| = \|a^* a\| = \|a\|^2$ y entonces $\|a^{2n}\|^{1/2n} = \|a\|$, para todo n natural. Tomando el límite cuando $n \to \infty$ se concluye que $\rho(a) = \|a\|$ y entonces $Sup\ (Sp\ a) = \|a\|$.

2. *Formas hermíticas positivas.* Sea A una C^*-álgebra con unidad y sea H un módulo unitario sobre A; diremos que A es la C^*-álgebra de *escalares* de H. Como $1_A \in A$ puede identificarse cada número complejo λ con el elemento $\lambda \cdot 1_A$ de A y entonces H puede considerarse como un espacio vectorial complejo.

DEFINICIÓN. Una *forma hermítica* sobre H con valores en A es una aplicación

$$< | > : H \times H \to A$$

tal que, para todo $x, x', y \in H$ y todo $a \in A$ las siguientes condiciones se verifican :

(i) $\quad < x + x' \mid y > = < x \mid y > + < x' \mid y >$;

(ii) $\quad < a x \mid y > = a < x \mid y >$;

(iii) $\quad < x \mid y > = < y \mid x >^*$.

Fácilmente se comprueba que en este caso :

(i') $\quad < y \mid x + x' > = < y \mid x > + < y \mid x' >$;

(ii') $\quad < x \mid a y > = < x \mid y > a^*$;

(iii') $\quad < x \mid x >$ es auto-adjunto .

Una forma hermítica $< | >$ se dice *positiva* si, para todo $x \in H$ se tiene que

(iv) $\quad < x \mid x > \geq 0$.

3. *La desigualdad de Cauchy-Schwarz.* La conocida desigualdad de Cauchy-Schwarz para formas hermíticas positivas con valores complejos admite la siguiente generalización :

TEOREMA. Si H es un módulo unitario sobre una C^*-álgebra A y $< | >$

es una forma hermítica positiva sobre H *con valores en* A *, entonces*

$$<x \mid y> \; <x \mid y>^* \;\leq\; \| <y \mid y> \| \; <x \mid x>,$$

para todo par de elementos x, y *de* H *.*

Demostración . Sean a un elemento cualquiera de A y ε un número real mayor que cero . Entonces :

$$0 \leq <x - ay \mid x - ay> = <x \mid x> - <x \mid y> a^* - a <y \mid x> + a <y \mid y> a^* \; .$$

Como $a a^* \geq 0$ entonces también $\varepsilon \cdot a a^* \geq 0$; luego

$$0 \leq <x \mid x> - <x \mid y> a^* - a <y \mid x> + a <y \mid y> a^* + \varepsilon \cdot a a^* \; ,$$

es decir ,

$$0 \leq <x \mid y> - <x \mid y> a^* - a <y \mid x> + a\,(<y \mid y> + \varepsilon \cdot 1)\; a^* \; . \quad (\alpha)$$

Denotando por M el $sup\,[Sp <y \mid y>]$ y como $<y \mid y> \; \geq 0$, se tiene que $M = \| <y \mid y> \| \geq 0$.

Tomemos $z = <y \mid y> + \varepsilon \cdot 1$. Como $\varepsilon > 0$ entonces existe z^{-1} . Ahora bien, $inf\,[Sp \; z^{-1}] = inf\,\{ \lambda : \lambda^{-1} \in Sp \; z \} = 1 / sup\,(Sp \; z)$. Pero $Sp \; z = Sp\,(<y \mid y> + \varepsilon \cdot 1) = \{ \lambda + \varepsilon : \lambda \in Sp <y \mid y> \}$, luego $sup\,(Sp \; z) = M + \varepsilon$, es decir, $inf\,[Sp \; z^{-1}] = 1/M+\varepsilon$ y entonces $z^{-1} \geq [\,1/(M+\varepsilon)\,] \cdot 1_A$.

Sea ahora $a = <x \mid y> z^{-1}$. Como $z \geq 0$, en particular es auto-adjunto y entonces z^{-1} también lo es ; luego $a^* = z^{-1} <x \mid y>^*$. Reemplazando a y a^* en la desigualdad (α) se obtiene

$$0 \leq <x \mid x> - <x \mid y> z^{-1} <x \mid y>^* - <x \mid y> z^{-1} <x \mid y>^* + <x \mid y> z^{-1} z z^{-1} <x \mid y>^*,$$

esto es

$$0 \;\leq\; <x \mid x> - <x \mid y> z^{-1} <x \mid y>^* \; .$$

Luego

$$< x \mid y > z^{-1} < x \mid y >^* \quad \leq \quad < x \mid x > \quad .$$

Pero, de la desigualdad $[\,1/(M+\varepsilon)\,]\cdot 1 \leq z^{-1}$ anteriormente obtenida se desprende que

$$0 \leq <x \mid y> \left(\frac{1}{M+\varepsilon} 1_A \right) <x \mid y>^* \leq <x \mid y> z^{-1} <x \mid y>^* \ .$$

Luego

$$0 \leq \frac{1}{M+\varepsilon} <x \mid y><x \mid y>^* \leq <x \mid x> \ ,$$

esto es

$$0 \leq <x \mid y><x \mid y>^* \leq (M+\varepsilon) <x \mid x> \ .$$

Como A^+ es cerrado, se concluye que

$$0 \leq <x \mid y><x \mid y>^* \leq M <x \mid x> \quad ,$$

que es la desigualdad propuesta. ■

4. *El caso conmutativo.* Cuando A es conmutativa puede obtenerse un resultado más ajustado :

Corolario 1. Si en el teorema anterior A es conmutativa, entonces

$$<x \mid y><x \mid y>^* \leq <x \mid x><y \mid y> \ .$$

Demostración. Como en la demostración del teorema, obtenemos

$$<x \mid y> z^{-1} <x \mid y>^* \leq <x \mid x>$$

Como en este caso el producto de elementos positivos es positivo se tiene, multiplicando por z :

$$<x \mid y> <x \mid y>^* \leq <x \mid x><y \mid y> + \varepsilon <x \mid x> .$$

Esta relación implica el corolario . ■

5. *Desigualdad numérica.* Teniendo en cuenta que en una C^*-álgebra, si $a,b \in A^+$ y $a \leq b$ entonces $\|a\| \leq \|b\|$ ([1] , 1.6.9) , la desigualdad obtenida en 3 implica, bajo las mismas hipótesis, el resultado siguiente :

Corolario 2. Para todo x *y todo* y *en* H ,

$$\|<x|y>\| \leq \|<x|x>\|^{1/2} \|<y|y>\|^{1/2} .$$

6. *Notas . (1)* Si $A = C$, la desigualdad obtenida en el caso conmutativo es el resultado clásico .

(2) El resultado obtenido para el caso conmutativo no es cierto, en general, en el caso no-conmutativo. En efecto, si se toma $H = A$ = el espacio de las matrices 2×2 con elementos complejos y se define $<x|y> = xy^*$, donde y^* es la conjugada de la traspuesta de y, se obtiene una forma hermítica positiva sobre H con valores en A . Tomando

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

se tiene

$$<x|x> <y|y> - <x|y> <x|y>^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

y este elemento no es positivo .

BIBLIOGRAFÍA

1. DIXMIER, J. "*Les C*-algèbres et leur représentations*, 2eme éd., Gauthier-Villar, Paris, 1969.
2. RICKART, C. E. *General Theory of Banach Algebras*, D. van Nostrand, New York, 1960 .

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia, S. A.

(Recibido en septiembre de 1971) .