Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VII, 1973, págs. 109 - 112

UNE NOTE SUR LES INVARIANTS CARACTÉRISTIQUES DE CERTAINS Γ_q - STRUCTURES

par

Alberto MEDINA

RESUMÉ

On établie certaines résultats concernant les classes caractéristiques de Γ_q - structures.

Dans cette note on établie certains résultats concernants les classes de Γ_q - structures définies à partir du faisceau des germes de transformations affines d'une varieté fixée.

Touts les variétés ici considerées seront supposées différentiables de classe C^∞. (M_q, D) sera une varieté munie d'une connexion linèaire D et Γ_q' dénotara le faiseeau des germes de difféomorphismes locaux de M_q qui préservent la connexion. Considérons une Γ_q'- structure différentiable sur la variété V et soit Q son fibré vectoriel transverse. On a :

THÉORÈME 1. $\quad Pont^{(i)}(Q) = 0 \qquad i > q$.

Démonstration. Supposons donnée la Γ_q'- structure pour le cocycle d' Haefliger $\{ U_i , f_i , \gamma_{ij}^x \}$. Puisque il existe un morphisme de fibré vectoriel

$$Q_i = Q | U_i \longrightarrow T(M_q)$$

on obtient une connexion D' sur Q en posant,

$$D' \mid Q_i = f_i^{-1}(D) .$$

Désignons par K(resp. K') la courbure de la connexion D (resp. D').

D'autre part, considérons l'algèbre graduée A des formes différentielles sur M_q invariantes par de transformations affines. Comme les γ_{ij}^x sont de germes de transformations affines, l'image réciproque de A (par les f_i) est une sous-algèbre graduée B de l'algèbre graduée des formes différentielles sur V, telle que $B^{(r)} = 0$ si $r > q$. De plus comme D est préservée par des applications affines, pour tout polynôme φ invariante par le réprésentation adjointe $\varphi(K) \in A$. La démonstration s'achève en remarquant simplement le fait que la forme

$$\varphi(K') = f_i^{-1}(\varphi(K))$$

appartient à B .

On souligne que en fait la démonstration précedente montre la nullitée des formes différentielles qui representent les classes de Pontrjagin en dimension supérieur à q. Donc si α, β, γ sont des éléments de l'anneau caractéristique de Q avec ,

$$\text{dégré } \alpha + \text{dégré } \beta > q$$

$$\text{dégré } \beta + \text{dégré } \gamma > q$$

le triple produit de Massey $< \alpha, \beta, \gamma >$ est défini (voir [1]) et on a :

THÉORÈME 2. $< \alpha, \beta, \gamma > = 0$

On obtient un résultat analogue pour les produits de Massey d'ordre supérieur .

Etudions maintenant les classes caractéristiques éxotiques de cettes Γ_q'-structures. Pour ceci soit $B\Gamma_q'$ l'espace classifiant de la catégorie topologique Γ_q'. Si BGL_q est le classifiant de GL_q et F est la fibre homotopique de l'application $B\Gamma_q' \to BGL_q$ obtenue à partir de la différentielle, on voit tout de suite que F' est l'espace classifiant des Γ'_q - structures à fibré normal trivial et on découle :

THEOREME 3. Toute Γ'_q - structure a fibré normal trivial a toutes ses classes éxotiques nulles .

Démonstration . Considérons la base de $H^*(W_q)$

$$H^*(W_q) = H^*(I^{(q)} \otimes \Lambda (h_1, h_2, \dots, h_q))$$

où $I^{(q)} = \mathbb{R}[c_1, \dots, c_q] / \{ \varphi , \text{dégré } \varphi > q \}$, donnée par les classes de cohomologie des

$$\alpha = c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_s} \otimes h_{j_1} \wedge h_{j_2} \wedge \dots \wedge h_{j_t}$$

avec $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s \leq q$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_t \leq q$,

$$i_1 + i_2 + \dots + i_s \leq q , \qquad j_1 \leq i_1$$

et $i_1 + i_2 + \dots + i_s + j_1 > q$ (voir [1] , [2]) . D'après le théorème 1 les classes éxotiques $\lambda([\alpha])$ sont nulles si $i_1 + i_2 + \dots + i_s > [q/2]$. Par conséquent s'il y a une classe non nulle celle-ci correspond à un cocycle α pour lequel $i_1 + \dots + i_s \leq [q/2]$. Mais, dans ce cas $i_1 , j_1 \leq [q/2]$ c'est qui entraîne $i_1 + \dots + i_s + j_1 \leq q$ contre l'hypothèse. On a donc montré la nullité de l'application

$$\lambda : H^*(W_q) \longrightarrow H^*(F' ; \mathbb{C})$$

Finalement dans le cas où le fibré normal n'est pas trivial on peut remarque que si $T : WO_q \to WO_{[q/2]}$ est l'application naturelle la commutativé du diagramme

$$\begin{tikzcd} H^*(WO_q) \arrow[d] \arrow[drr, "\lambda"] & & \\ H^*(WO_{[q/2]}) \arrow[rr, "\lambda"] & & H^*(B\Gamma'_q ; C) \end{tikzcd}$$

permet d'affirmer la nullité des classes correspondants aux éléments du noyau de T^* .

REMARQUE . Au moment ou ce papier eté rédigé C. Roger a publié un article ([4]) où l'on étudie una situation plus particulière que la situation ici présentée.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. BOTT. *Lectures on characteristic classes and foliations.* Lectures notes in mathematics, 279, Springer Verlag, Berlin, 1971.
2. A. HAEFLIGER. *Sur les classes caractéristiques des feuilletages.* Séminaire Bourbaki, N° 412, juin 1972.
3. J.S. PASTERNACK. *Foliations and compact Lie group actions.* Comment.Math. Helv. 46 (1971).
4. C. ROGER. *Sur les classes caractéristiques des feuilletages donées par des isométries.* C. R. Acad. Sc. Paris, série A, 276 (1973), 1185.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E., Colombia, S. A.

(Reçu le 22 de mai de 1973).