Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VII (1973), págs. 113-120

FUNCIÓN GENERATRIZ DE MOMENTOS DE VALORES PROPIOS DE UNA MATRIZ CON DISTRIBUCIÓN WISHART

por

Luis H. RODRÍGUEZ

RESUMEN

Un problema general en el análisis Multivariante de la Estadística lo constituye la derivación de la función generatriz de momentos de una matriz cuya ley de distribución sigue la Wishart. En este artículo se deriva dicha función para los valores propios de la matriz y se incluye un ejemplo a manera de ilustración. Los resultados son válidos para el caso particular en que n-p es un número impar; donde n es el parámetro correspondiente a la distribución Wishart y p la dimensionalidad de la distribución.

1. *Introducción.* Existen varios problemas en el área del análisis estadístico multivariante que se relacionan con los valores propios de una matriz aleatoria cuya función de densidad probabilística es Wishart, es decir,

$$(1.1)\qquad A \sim W_p(n,\Sigma) = \frac{|A|^{(n-p-1)/2}\, exp(-\tfrac{1}{2}\, tr\, \Sigma^{-1} A)}{2^{np/2}\, \pi^{p(p-1)/4}\, |\Sigma|^{n/2} \prod_{i=1}^{p} \Gamma[(n+1-i)/2]}$$

donde $A = \sum_{j=1}^{n} \vec{Z}_j \vec{Z}_j'$ y $\vec{Z}_j$ se distribuye como normal multivariante con parámetros $\vec{0}$ y Σ. Para el caso particular $\Sigma = I$, la matriz idéntica, la función de densidad en (1.1) se puede escribir en términos de los valores propios $c_1, \ldots, c_p$, de A como sigue :

$$(1.2)\quad f(c_1,\ldots,c_p) = \begin{cases} \dfrac{\pi^{p/2}\prod_{i=1}^{p} c_i^{(n-p-1)/2}\, exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} c_i)\prod_{i<j}(c_i - c_j)}{2^{p/2}\prod_{i=1}^{p}\{\Gamma[(n+1-i)/2]\Gamma[(p+1-i)/2]\}} & si\ A\ está \\ definida\ positiva; & \\ 0 \quad en\ caso\ contrario. & \end{cases}$$

Se asume que $n \geq p$ sin pérdida de generalidad. Si $p > n$, entonces la función de densidad de los valores propios no nulos se obtiene a partir de (1.2) intercambiando n por p. Los resultados en este artículo serán válidos para el caso en que $p > n$ si se hace el intercambio de los papeles de n y p. Usando una propiedad del determinante de la matriz $B = (c_i^{j-1})$ [1], la ecuación (1.2) puede escribirse como,

$$(1.3)\quad f(c_1,\ldots,c_p) = \left[\pi^{p/2}\sum_{i=1}^{p!}(-1)^{s_j + p(p-1)/2}(c_1 \ldots c_p)^{(n-p+1)/2} (c_1^{j_1} \ldots c_p^{j_p})\, exp\,(-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} c_i)\right] \Big/ 2^{np/2}\prod_{i=1}^{p}\Gamma[\tfrac{1}{2}(n-1-i)]\Gamma[\tfrac{1}{2}(p+1-i)]$$

si A está definida positiva y donde los valores propios de A satisfacen $c_1 > c_2 > \ldots > c_p$.

2. *Función Generatriz de momentos.* La multiplicación de (1.3) por una constante [1] y la definición de función generatriz de momentos da como resultado :

$$(2.1)\quad M(t_1,\ldots,t_p) = k(n,p)\int_0^{\infty}\int_0^{c_1}\cdots\int_0^{c_{p-1}}\left[\sum_{j=1}^{p!}(-1)^{s_j + p(p-1)/2}\right.$$

$$\prod_{i=1}^{p} \frac{\left(\frac{c_i}{2}\right)^{\alpha_{j_i}-1} exp\{-\tfrac{1}{2}\, c_i(1-2t_i)\}}{\Gamma(\alpha_{j_i})} \Bigg] dc_1\, dc_2 \ldots dc_p \quad ,$$

donde :

$$(2.2) \qquad k(n,p) = \frac{\pi^{p/2} \prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(p-1)} \Gamma[\tfrac{1}{2}(n+2i)]}{\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}(p-1)-1} \Gamma[\tfrac{1}{2}(n-1-2i)] \prod_{i=1}^{p} \Gamma(i/2)]}$$

para p impar, y

$$(2.3) \qquad k(n,p) = \frac{\pi^{p/2} \prod_{i=o}^{\frac{1}{2}p-1} \Gamma[\tfrac{1}{2}(n+1+2i)]}{\prod_{i=o}^{\frac{1}{2}p-1} \Gamma[\tfrac{1}{2}(n-2i)] \prod_{i=1}^{p} \Gamma(i/2)}$$

para p par, y s_j y α_j están dados por la tabla incluída al final de este artículo.

El intercambio de la suma y las integrales (válido en este caso) permiten al autor sugerir un sistema de notación abreviada, a saber :

$$(2.4) \qquad B_{pj}(\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_p}; t_1, \ldots, t_p) = \int_o^\infty \frac{y_1^{j_1-1} exp[-y_1(1-2t_1)]}{\Gamma(\alpha_{j_1})} \; G^p_{(p-1)j} \; dy_1$$

donde $G^p_{(p-1)}$ es el resultado de integrar (2.1) con respecto a las variables $c_2, c_3, \ldots, c_p$ y G es función de los α y los t. Una fórmula recurrente para dichas integrales se encuentra en [1].

La notación (2.3) permite entonces presentar la función generatriz de momentos de los valores propios de la matriz con distribución Wishart de la siguiente manera :

$$(2.5)\qquad M(t_1,t_2,t_3,t_4,\ldots,t_p) = k(n,p)\sum_{j=1}^{p!}(-1)^{s_j+\frac{p(p-1)}{2}}\, B_{pj}(\alpha_{j_1},\ldots,\alpha_{j_p};t_1,\ldots,t_p)$$

A partir de ella se pueden calcular los momentos por los métodos ya conocidos para derivar la ecuación (2.5) y evaluar con $t_i = 0$ según el momento del valor propio que interese .

3. *Función Generatriz de momentos para* $p=2$. La evaluación de (2.5) para el caso $p=2$, si $n-p$ es un número impar, se expone en detalle a fin de dar una idea más clara sobre los resultados anteriores.

En primer lugar efectuamos la evaluación de la constante $k(n,p)$ de acuerdo con la ecuación (2.3) :

$$k(n,2) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

El siguiente paso será evaluar las ecuaciones de la forma (2.4) ,

$$B_{2j}(\alpha_{j_1}\,\alpha_{j_2};t_1,t_2) = \prod_{i=1}^{2}(1-2t_i)^{-\alpha_{ji}}\sum_{i=o}^{\alpha_{j_2}-1}\left\{\left(1-2t_2\right)^{x-\alpha_{j_2}}\left(2-2t_1-2t_2\right)^{-(x+\alpha_{j_1})}\frac{\Gamma(x+a_{ji})}{\Gamma(\alpha_{j_1})\Gamma(x+1)}\right\}$$

Por consiguiente, la función generatriz de momentos tendrá la forma :

$$(3.1)\qquad M(t_1,t_2) = -\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left\{-\left(1-2t_1\right)^{-\frac{n-1}{2}}\left(1-2t_2\right)^{-\frac{n+1}{2}} + \sum_{x=o}^{\frac{1}{2}(n+1)-1}\left[\left(1-2t_2\right)^{x-\frac{n+1}{2}}\right.\right.$$

$$\left.\left(2-2t_1-2t_2\right)^{-\left(x+\frac{n-1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(x+\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma(x+1)}\right] + (1-2t_1)^{-\frac{n+1}{2}}(1-2t_2)^{-\frac{n-1}{2}} -$$

$$\left.\sum_{x=o}^{\frac{1}{2}(n-1)-1}\left[\left(1-2t_2\right)^{x-\frac{n-1}{2}}\left(2-2t_1-2t_2\right)^{-(x+\frac{n+1}{2})}\frac{\Gamma\left(x+\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma(x+1)}\right]\right\} .$$

Esta función servirá para calcular los momentos de los valores propios de una matriz $A \sim W_2(n,I)$. Es de notar que éstos dependen únicamente del parámetro n que indica el número de vectores $\vec{Z}_j$ distribuidos como normales multivariantes con media $\vec{0}$ y covarianza Σ .

4. *Ejemplo.* **Asumamos,** $p=2$, $n=5$, $j=1,2$; **de modo que** $1_1=0$, $1_2=1$; $2_1=1$, $2_2=0$; $\alpha_{1_1}=2$; $\alpha_{1_2}=3$; $\alpha_{2_1}=3$, $\alpha_{2_2}=2$. **Por consiguiente ,**

$$(4.1)\quad M(t_1,t_2)=\frac{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(3)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left\{\left[-(1-2t_1)^{-2}\cdot(1-2t_2)^{-3}+\sum_{x=o}^{2}\left[(1-2t_2)^{x-3}\cdot(2-2t_1-2t_2)^{-(x+2)}\cdot\frac{\Gamma(x+2)}{\Gamma(2)\Gamma(x+1)}\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.(1-2t_1)^{-3}\cdot(1-2t_2)^{-2}-\sum_{x=o}^{1}\left[(1-2t_2)^{x-2}\cdot(2-2t_1-2t_2)^{-(x+3)}\cdot\frac{\Gamma(x+3)}{\Gamma(3)\Gamma(x+1)}\right]\right]\right\}$$

y ,

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} M(0,0) &= 1\\ M'(t_1,0) &= 7\tfrac{2}{3}\\ M'(0,t_2) &= 2\tfrac{1}{3}\\ M''(0,0) &= 12 . \end{aligned}$$

Estos resultados se comparan favorablemente con los obtenidos en [2] para la traza de la matriz A .

$E(c_1+c_2) = 2n$ **y para el caso de** $n=5$, **el valor esperado será** *10* **que es la suma de los dos valores esperados hallados en (4.2) .**

6. *Conclusiones.* **La función generatriz de momentos de los valores propios de una matriz A que se distribuye como una Wishart con parámetros $n, \Sigma=I$ y de di-**

mensión p, puede ser hallada mediante la expresión de la correspondiente función de densidad en forma tal que podamos aplicar un proceso iterativo al desarrollar las integrales que aparecen en el problema. Los momentos de dichos valores propios para una p fija, son funciones únicamente del parámetro n de la distribución Wishart. Ha sido demostrado por el autor para el caso $p=2$, que los valores medios de los valores propios suman $2n$. Para el caso en que $n-p$ es un número par, el autor ha demostrado, aunque no en forma satisfactoria, que las integrales en cuestión son divergentes [1] y, por lo tanto, la función generatriz de momentos no existe para ningún t real.

Se halla en proceso de investigación el determinar si los valores esperados de los valores propios son consistentes, ya que el ejemplo expuesto demuestra que en general son sesgados.

BIBLIOGRAFÍA

1. RODRÍGUEZ, LUIS H. *Moment Generating Function and moments of a Wishart matrix with related problems in MANOVA.* Tesis inédita para Ph.D. Kansas State University. Manhattan, Kansas, 1973.
2. JAMES, A. T., *Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples.* Ann. Math. Statist. 35 (1964), 475-501.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D.E., Colombia, S. A.

(Recibido en junio de 1973).

Tabla : Parámetros de la función generatriz de momentos.

p	j	j_1	j_2	j_3	j_4	α_{j_1}	α_{j_2}	α_{j_3}	α_{j_4}	K(n,p)	s_j
2	1	0	1			$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$			$\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})$	0
	2	1	0			$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$				1
3	1	0	1	2		$\frac{n-2}{2}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n+2}{2}$			0
	2	0	2	1		$\frac{n-2}{2}$	$\frac{n+2}{2}$	$\frac{n}{2}$			1
	3	1	0	2		$\frac{n}{2}$	$\frac{n-2}{2}$	$\frac{n+2}{2}$			1
	4	1	2	0		$\underline{n}$	$\underline{n+2}$	$\underline{n-2}$		$\dfrac{2\pi^{\frac{1}{2}}\,\Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})\,\Gamma(\frac{n-3}{2})}$	2
	5	2	0	1		$\frac{n+2}{2}$	$\frac{n-2}{2}$	$\frac{n}{2}$			2
	6	2	1	0		$\frac{n+2}{2}$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n-2}{2}$			3
4	1	0	1	2	3	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$		0
	2	0	1	3	2	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n+1}{2}$		1
	3	0	2	1	3	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$		1
	4	0	2	3	1	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-1}{2}$		2
	5	0	3	1	2	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$		2
	6	0	3	2	1	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$		3
	7	1	0	2	3	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$		1
	8	1	0	3	2	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n+1}{2}$		2
	9	1	2	0	3	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n+3}{2}$		2
	10	1	2	3	0	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-3}{2}$	$\dfrac{2\pi\,\Gamma(\frac{n+1}{2})\,\Gamma(\frac{n+3}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\,\Gamma(\frac{n-2}{2})}$	3

p	j	j_1	j_2	j_3	j_4	α_{j_1}	α_{j_2}	α_{j_3}	α_{j_4}	K(n,p)	s_j
	11	1	3	0	2	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n+1}{2}$		3
	12	1	3	2	0	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n-3}{2}$		4
	13	2	0	1	3	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$		2
	14	2	0	3	1	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-1}{2}$		3
	15	2	1	0	3	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n+3}{2}$		3
	16	2	1	3	0	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-3}{2}$		4
	17	2	3	0	1	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n-1}{2}$		4
	18	2	3	1	0	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-3}{2}$		5
	19	3	0	1	2	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$		3
	20	3	0	2	1	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-1}{2}$		4
	21	3	1	0	2	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n+3}{2}$		4
	22	3	1	2	0	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-3}{2}$		5
	23	3	2	0	1	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-3}{2}$	$\frac{n-1}{2}$		5
	24	3	2	1	0	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n+3}{2}$	$\frac{n-1}{2}$	$\frac{n-3}{2}$		6