Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VIII, (1974), pág. 7 - 14

UNA NOTA SOBRE PROBLEMAS DE EXTENSIÓN

por

Luz G. TORRES

1. *Introducción*. Consideremos el siguiente problema bastante general : Dados dos conjuntos M y M', un subconjunto propio D de M y una función $f: D \to M'$ que satisface una propiedad dada (P), ¿existe, entonces, una extensión $f: M \to M'$ de f que satisface (P)?

Obviamente, la naturaleza de M y M', así como la de la función f, dan lugar a una gran variedad de problemas particulares de extensión, muchos de los cuales son harto conocidos. El objetivo de este corto trabajo es la presentación de un resultado obtenido por G. MINTY [4] y expuesto en el teorema 1, el cual nos proporciona un método general para demostrar la existencia de una tal extensión cuando M y M' son espacios métricos y f satisface una condición de continuidad de Lipschitz o de Hölder. En el apartado § 3 ilustraremos cómo aplicar el teorema de MINTY en tres casos particulares (teoremas 2, 3 y 4).

2. *Funciones de Kirszbraun.* Aquí X denotará un espacio vectorial topológico y Y un conjunto, salvo indicación de lo contrario.

DEFINICIÓN 1. Una función $f: X \to \mathbb{R}$ es *semicontinua superiormente* si, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{ x: f(x) < \alpha \}$ es abierto en X. Similarmente, f es *semicontinua* *inferiormente* si, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{ x : f(x) > \alpha \}$ es abierto en X . Nótese que si f es continua, entonces f es semicontinua inferior y superiormente.

DEFINICIÓN 2 . Una función $f: X \to \mathbb{R}$ se dice *semicontinua inferior* y *finitamente* , si su restricción a un subespacio de dimensión finita de X es semicontinua inferiormente.

Recordemos que un conjunto $F \subset X$ es *convexo* si para $x_1, x_2 \in F$ y para cualquier λ , $0 \leq \lambda \leq 1$, $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in F$.

Una función $f: F \to \mathbb{R}$ es *convexa* si para $x_1, x_2 \in F$ y λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.

DEFINICIÓN 3. Una función $\phi : X \times Y \times Y \to \mathbb{R}$ se dice una *función de Kirszbraun (función K)* si

(i) Para cada $(y_1, y_2) \in Y \times Y$, fijo, ϕ es semicontinua inferior y finitamente con respecto a la variable x .

(ii) Para cada $(y_1, y_2) \in Y \times Y$, fijo, ϕ es convexa con respecto a la variable x

(iii) Para elementos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de X y $y_o, y_1, \ldots, y_m \in Y$,

$$\sum_{i,j=1}^{m} \mu_i \mu_j \, \phi\,(x_i - x_j, y_i, y_j) \geq 2 \sum_{i=1}^{m} \mu_i \, \phi\,(x_i - x, y_i, y_o) ,$$

donde $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$ y $x = \sum_{j=1}^{m} \mu_j x_j$.

Si X es un espacio de dimensión finita y ϕ satisface (i), (ii) y (iii) con $m = dim(X) + 1$, entonces ϕ se dice una *función K de dimensión finita* .

TEOREMA 1. Sean X un espacio topológico vectorial, Y un conjunto y $\phi : X \times Y \times Y \to \mathbb{R}$ una función K. Supongamos que para $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ e $y_1, y_2, \ldots, y_m \in Y$,

$$\phi(x_i - x_o, y_i, y_o) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Para su demostración necesitamos un lema y una versión del teorema de K. Fan, los cuales enunciamos a continuación :

LEMA 1. Sea $P^m = \{\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m), \mu_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1\}$. *Para cada* $i = 1, \ldots, m$ *definamos* $f_i : P^m \to \mathbb{R}$ *por*

$$f_i(\mu) = \phi(x_i - x, y_i, y_o),$$

donde $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ *y* $x = \sum_{j=1}^{m} \mu_j x_j$. *Entonces, para cada* i, f_i *es semicontinua inferiormente y convexa .*

Demostración . **f_i es semicontinua inferiormente ya que $G_\alpha = \{\mu : f_i(\mu) > \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ es abierto en P^m. En efecto, consideremos en P^m la métrica dada por $d(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^{m} |\mu_i - \nu_i|$. Es suficiente demostrar que si $\mu \in G_\alpha$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\nu \in P^m$, $d(\mu, \nu) < \delta \Rightarrow f_i(\nu) > \alpha$. Sea A un subespacio de X generado por $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Como ϕ es una función K, la restricción de ϕ a A es semicontinua inferiormente, i.e. para cada i y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{x : \phi(x, y_i, y_o) > \alpha\}$ es abierto en A. Entonces, si $z_o = x_i - \sum_{j=1}^{m} \mu_j x_j$, existe $\varepsilon > 0$, tal que para cada $z \in A$, $||z_o - z|| < \varepsilon \Rightarrow \phi(z, y_i, y_o) > \alpha$. Tomemos δ, $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{M}$, donde $M = \max_i ||x_i||$. En estas condiciones, $d(\mu, \nu) < \delta \Rightarrow ||z - z_o|| < \varepsilon$, luego $d(\mu, \nu) < \delta \Rightarrow f_i(\nu) > \alpha$.**

Demostremos ahora que f_i es convexa. Sean $\mu^1, \mu^2 \in P^m$ y λ, $0 \leq \lambda \leq 1$.

$$f_i(\lambda\mu^1 + (1-\lambda)\mu^2) = \phi(x_i - \lambda\sum_{j=1}^{m}\mu_j^1 x_j - (1-\lambda)\sum_{j=1}^{m}\mu_j^2 x_j - (1-\lambda)\sum_{j=1}^{m}\mu_j^2 x_j, \; y_i, y_o) =$$

$= \phi(\lambda(x_i - \sum_{j=1}^{m}\mu_j^1 x_j) + (1-\lambda)(x_i - \sum_{j=1}^{m}\mu_j^2 x_j), y_i, y_o)$. **Como ϕ es convexa con respecto a la variable x ,**

$$f_i(\lambda\mu^1 + (1-\lambda)\mu^2) \leq \lambda\phi(x_i - \sum_{j=1}^{m}\mu_j^1 x_j, y_i, y_o) + (1-\lambda)\phi(x_i - \sum_{j=1}^{m}\mu_j^2 x_j, y_i, y_o) =$$

$= \lambda f_i(\mu^1) + (1-\lambda) f_i(\mu^2)$.

TEOREMA 2 [2] *Sean* M *un subconjunto compacto de* $\mathbb{R}^m$ *y* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *funciones de valor real, semicontinuas inferiormente y convexas, definidas en* M. *Supongamos que para cada* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, *con* $\alpha_j \geq 0$ *y* $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, *existe un punto* ξ_α *que satisface*

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j f_j(\xi_\alpha) \leq 0 .$$

Entonces existe un punto $\xi_o \in M$, *tal que para todo* j, $1 \leq j \leq m$ $f_j(\xi_o) \leq 0$.

Demostración del teorema 1. Para $\mu \in P^m$, $\sum_{i=1}^m \mu_i f_i(\xi) = \sum_{i=1}^m \mu_i \phi(x_i - x, y_i, y_o)$, *donde* $x = \sum_{j=1}^m \xi_i x_i$. Como ϕ es una función K, tomando $\xi = \mu$, se tiene

$\sum_{i=1}^m \mu_i \phi(x_i - x, y_i, y_o) \leq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \mu_i \mu_j \phi(x_i - x_j, y_i, y_j) \leq 0$, ya que $\phi(x_i - x_j, y_i, y_j) \leq 0$, $i, j = 1, \ldots, m$.

Nótese que $P^m \subset \mathbb{R}^m$ es compacto, luego, por el teorema anterior, existe un $\mu_o \in P^m$ que cumple

$$f_i(\mu_o) \leq 0 \quad , \quad 1 \leq i \leq m .$$

Si $x_o = \sum_{i=1}^m \mu_{oj} x_j$, entonces $\phi(x_i - x_o, y_i, y_o) \leq 0$ para $i = 1, \ldots, m$.

Si X es de dimensión n, aplicamos el

Teorema de Helly. [1] *Sean* $C_1, C_2, \ldots, C_m$ $(m > n+1)$ *conjuntos convexos en* $\mathbb{R}^n$. *Si la intersección de* $n+1$ *cualesquiera de estos conjuntos no es vacía, entonces* $\bigcap_{i=1}^m C_i \neq \phi$.

Para esta situación hay dos posibilidades :

(i) $m \leq n+1$. Si $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$, $y_1, y_2, \ldots, y_m \in Y$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$, la relación

$$\sum_{i,j=1}^m \mu_i \mu_j \phi(x_i - x_j, y_i, y_j) \geq 2 \sum_{i=1}^m \mu_i \phi(x_i - x, y_i, y_o)$$

se satisface. En efecto, como ϕ es una función K de dimensión finita, se tiene ,

$$\sum_{i,j=1}^{n+1} \mu_i \mu_j \phi(x_i-x_j, y_i, y_j) \geq 2 \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i \phi(x_i-x, y_i, y_o)$$

Sean $x' \epsilon X$, $y' \epsilon Y$. Tomemos $x_i = x'$, $y_i = y'$ y $\mu_i = 0$ si $m+1 \leq i \leq n+1$; entonces la expresión anterior se reduce a la primera y, por el teorema 1, existe $x_o \epsilon X$ tal que $\phi(x_i-x_o, y_i, y_o) \leq 0$, $i=1, \ldots, m$.

(ii) $m > n+1$. Sea $A_i = \{ z : \phi(x_i-z, y_i, y_o) \leq 0 \}$; es claro que A_i es un subconjunto convexo de X . Por (i) , $\bigcap_{k=1}^{n+1} A_{ik} \neq \phi$ y por el teorema de Helly, $\bigcap_{k=1}^{m} A_{ik} \neq \phi$, luego existe un punto $x_o \epsilon X$ tal que $\phi(x_i-x_o, y_i, y_o) \leq 0$.

3. *Algunas aplicaciones.* Obtendremos ahora algunos resultados utilizando la técnica anterior .

TEOREMA 2. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_m \epsilon \mathbb{R}^m$, $y_1, y_2, \ldots, y_m \epsilon \mathbb{R}^p$ *y* $D = \{y_1, y_2, \ldots y_m\}$. *Supongamos que* $f: D \to \mathbb{R}^m$ *es tal que*

$$||f(y_i)-f(y_j)|| \leq ||y_i-y_j|| \quad \text{donde } f(y_i) = x_i \qquad (a)$$

Sea $y_o \epsilon \mathbb{R}^p$. *Entonces* f *puede extenderse a* $D \cup \{ y_o \}$ *de tal manera que satisfaga (a) .*

Demostración. Definimos $\phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ así : $\phi(x, y_1, y_2) = ||x||^2 - ||y_1-y_2||^2$. ϕ es una función K . En efecto :

(i) Para un elemento fijo $(y_1, y_2) \epsilon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, ϕ es continua con respecto a x y, por lo tanto, es semicontinua inferiormente con respecto a la misma variable .

(ii) Para $(y_1, y_2) \epsilon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$, fijo, ϕ es convexa con respecto a la variable x porque si $x_1, x_2 \epsilon \mathbb{R}^m$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, $\phi(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, y_1, y_2) = ||\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2||^2 - ||y_1-y_2||^2 = \lambda^2 ||x_1||^2 + 2\lambda(1-\lambda)(x_1, x_2) + (1-\lambda)^2 ||x_2||^2 - ||y_1-y_2||^2$.

Aquí $(\cdot,\ )$ indica el producto interno en $\mathbb{R}^m$. Entonces

$$\phi(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, y_1, y_2) = \lambda(||x_1||^2-||y_1-y_2||^2)+(1-\lambda)(||x_2||^2-||y_1-y_2||^2)$$

$$+ (\lambda^2-\lambda)\,||x_1||^2 + 2\lambda(1-\lambda)(x_1, x_2) + ((1-\lambda)^2-(1-\lambda))\,||x_2||^2 = \lambda\phi(x_1,y_1,y_2)+$$

$$+ (1-\lambda)\,\phi(x_2, y_1, y_2) - \lambda(1-\lambda)||x_1||^2 + 2\lambda(1-\lambda)(x_1, x_2) - \lambda(1-\lambda)||x_2||^2$$

$$\leq \lambda\,\phi(x_1, y_1, y_2) + (1-\lambda)\,\phi(x_2, y_1, y_2).$$

(iii) ϕ satisface la desigualdad (iii) de la definición 3 como veremos a continuación :

$$\sum_{i,j=1}^{m} \mu_i\mu_j\,\phi(x_i-x_j, y_i, y_j) = \sum_{i,j=1}^{m} \mu_i\mu_j\,(||x_i-x_j||^2 - ||y_i-y_j||^2)$$

La relación $||x_i-x_j||^2 = ||x_i-x||^2 + ||x_j-x||^2 - 2(x_i-x, x_j-x)$ nos permite obtener para $x_o = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x_i$ y $y_o \in \mathbb{R}^p$, $\sum_{i,j=1}^{m} \mu_i\mu_j(||x_i-x_j||^2-||y_i-y_j||^2) =$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \mu_i\mu_j(||x_i-x_o||^2 + ||x_j-x_o||^2 - 2(x_i-x_o, x_j-x_o) - \sum_{i,j=1}^{m} \mu_i\mu_j(||y_i-y_o||^2$$

$$+ ||y_j-y_o||^2 - 2(y_i-y_o, y_j-y_o)) = 2\sum_{i=1}^{m} \mu_i(||x_i-x_o||^2-||y_i-y_o||^2) - 2(\sum_{i=1}^{m}\mu_i(x_i-x_o),$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j(x_j-x_o)) + 2(\sum_{i=1}^{m} \mu_i(y_i-y_o), \sum_{j=1}^{m} \mu_j(y_j-y_o)).$$

Como $\sum_{i=1}^{m} \mu_i(x_i-x_o) = 0$, la expresión anterior queda reducida a

$$2\sum_{i=1}^{m} \mu_i(||x_i-x_o||^2-||y_i-y_o||^2)+2||\sum_{i=1}^{m}\mu_i(y_i-y_o)||^2$$

$$\geq 2\sum_{i=1}^{m} \mu_i(||x_o-x_i||^2-||y_i-y_o||^2) = 2\sum_{i=1}^{m} \mu_i\,\phi(x_i-x_o, y_i, y_o).$$

La condición (a) es equivalente a

$$\phi(x_i-x_j, y_i, y_j) \leq 0.$$

Por el Teorema 1, dado $y_o \epsilon \mathbb{R}^p$, existe $x_o \epsilon \mathbb{R}^m$ tal que $\phi(x_i - x_o, y_i, y_o) \leq 0$, es decir, $\|x_i - x_o\| \leq \|y_i - y_o\|$, $i = 1, \ldots, m$. Tomando entonces $f(y_o) = x_o$ se obtiene el resultado deseado.

TEOREMA 3. Sean X un espacio de Hilbert y Y un espacio métrico. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_m \epsilon X$, $y_1, y_2, \ldots, y_m \epsilon Y$ *y* $D = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$. *Si* $f: D \to X$ *es tal que*

$$\|f(y_i) - f(y_j)\| \leqq d(y_i, y_j)^{\frac{1}{2}}, \; f(y_i) = x_i \qquad (b)$$

entonces, dado $y_o \epsilon Y$, *existe* $f: D \cup \{x_o\} \to X$ *que satisface (b).*

Demostración. Definimos $\phi: X \times Y \times Y \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(x, y_1, y_2) = \|x\|^2 - d(y_1, y_2)$$

Siguiendo el mecanismo utilizado en el teorema 2, puede demostrarse que ϕ es una función K. La condición (b) puede expresarse de la manera siguiente :

$$\phi(x_i - x_o, y_i, y_o) \leq 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, m \quad ;$$

i.e., $\|x_i - x_o\| \leq d(y_i, y_o)^{\frac{1}{2}}$. Definiendo $f(y_i) = f(y_i)$, $1 \leq i \leq m$; $f(y_o) = x_o$, f es la extensión deseada .

TEOREMA 4. Sean X un espacio de Hilbert, Y un espacio vectorial provisto de un producto escalar, y $D = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ *un subconjunto de Y. Sea* $f: D \to X$ *una función que satisface* $\|f(y_i) - f(y_j)\| \leq k\|y_i - y_j\|^{\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 1$ $k > 0$ *(c). Entonces, dado* $y_o \epsilon Y$, *existe una extensión de f a* $D \cup \{y_o\}$ *que satisface la condición (c).*

Demostración. Ella es similar a las anteriores, definiendo en este caso $\phi(x, y_1, y_2) = \|x\|^2 - k^2\|y_1 - y_2\|^{2\alpha}$, y usando nuevamente el teorema 1 .

BIBLIOGRAFÍA

1. *Berge, C., and A. Chovila-Houri ; Programmes, Jeux et Reseaux de Transport.* Dunod, Paris, 1962. English Transl. Methuen, London, and New York, Wiley, 1965.

2. *Fan, K., Aplications of a Theorem Concerning Sets with Convex Sections.* Math. Annalen, 163 (1963), 189-203.

3. *Mickle, E. J., On the extension of a Transformation,* Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), 160-164.

4. *Minty, G., On the extension of Lipschitz, Lipschitz-Hölder Continuous and Monotone Functions,* Bull. Amer. Math. Soc., 76 (1970), 334-39.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, D. E., Colombia, S. A.

(Recibido en diciembre de 1973)