Revista Colombiana de Matemáticas
Vol. VIII (1974), págs. 47-95

DISTRIBUCIONES DEFINIDAS POR PROLONGACIÓN ANALÍTICA

por

Juan HORVÁTH

Dedicado al Profesor Henri Yerly con la afectuosa admiración del autor

0. *Introducción* .

Sea $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un punto del espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$, póngase $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ y sea

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

el operador de Laplace. Si $n \neq 2$, una solución elemental de Δ es la distribución E definida por la función localmente integrable

$$x \mapsto E(x) = -\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{4\pi^{n/2}} \frac{1}{|x|^{n-2}} \qquad (x \neq 0)$$

[15, Ejemplo 4.9.1, p. 394; 16, p. 155], es decir $\Delta E = \delta$, y por lo tanto una solución de la ecuación de Poisson $\Delta u = f$ está dada por el potencial newtoniano

$$u(x) = -\frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{4\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}}\, dy.$$

Consideremos ahora en vez del Laplaciano el operador de las ondas o de D'Alembert

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} .$$

Póngase $x = (t, x')$, con $t = x_1$, $x' = (x_2, \dots, x_n)$ y $s(x)^2 = t^2 - |x'|^2 = x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$. El cono futuro C^+ es el conjunto de los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ para los cuales $s(x)^2 \geq 0$ y $t \geq 0$. Para $x \in \mathbb{R}^n$ se escribirá $C_x^- = x - C^+$. Póngase además

$$\gamma_n = 2\pi^{\frac{1}{2}(n-2)} \Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right) .$$

Por computación directa se puede ver que para $n = 2$ y 3 la distribución asociada a la función E con valores

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma_n} \dfrac{1}{s(x)^{n-2}} & \text{si} \quad x \in C^+ , \\ 0 & \text{si} \quad x \notin C^+ , \end{cases}$$

es solución elemental de $\square$ y desde luego

$$u(x) = \frac{1}{\gamma_n} \int_{C_x^-} \frac{f(y)}{s(x-y)^{n-2}} dy \tag{0.1}$$

es solución de la ecuación de ondas no-homogénea $\square u = f$. Para $n \geq 4$ encontramos dificultades muy serias. En primer lugar, si n es par, γ_n no tiene sentido. Si n es impar, la función $x \mapsto s(x)^{2-n}$ no es integrable en la vecindad del mantel de C^+. En efecto, si ponemos $\rho = |x'|$, entonces $s(x)^2 = (t-\rho)(t+\rho)$ y la función $\rho \mapsto (t-\rho)^{\frac{1}{2}(2-n)}$ es integrable en la vecindad de $\rho = t$ sólo si $\frac{2-n}{2} > -1$, es decir $n < 4$.

Frente a estas dificultades, Hadamard introdujo el concepto de parte finita de una integral divergente [13, pp. 184-217]. El demostró [13, pp. 220-231] que si

n es impar y el segundo miembro de *(0.1)* se interpreta en el sentido de parte finita, entonces u es solución de la ecuación de ondas. Para n par Hadamard se sirvió del método de descenso y descubrió el principio de Huygens que hoy en día se puede expresar diciendo que el soporte de la solución elemental es el mantel de C^+ [13, pp. 287-325]. En realidad Hadamard estudió no sólo el operador de las ondas sino cualquier operador diferencial hiperbólico de segundo orden con coeficientes variables. Además él no se interesó tanto por la ecuación no-homogénea como por el problema de Cauchy para la ecuación homogénea $\square u = 0$; la teoría de las distribuciones enseña que la solución de este problema se reduce a la solución de $\square u = f$ si para f se toma una distribución adecuada [28, Cap. V, § 6, pp. 133-134].

En un esfuerzo de entender y simplificar el método bastante complicado de Hadamard, Marcel Riesz [24] introdujo el operador I^λ definido por

$$(0.2) \qquad (I^\lambda f)(x) = \frac{1}{\gamma_n(\lambda)} \int_{C_x^-} \frac{f(y)}{s(x-y)^{n-\lambda}}\, dy$$

para $\Re e\,\lambda > n-2$, donde

$$\gamma_n(\lambda) = 2^{\lambda-1} \pi^{\frac{1}{2}(n-2)} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\lambda+2-n}{2}\right).$$

Obsérvese que formalmente $I^2 f$ es la función u de *(0.1)*. Riesz demuestra que $\lambda \mapsto (I^\lambda f)(x)$ es una función holomorfa que tiene prolongación analítica a todo el plano complejo $\mathbb{C}$. Además se tiene $I^\alpha(I^\beta f) = I^{\alpha+\beta} f$ y $I^{-2k} f = \square^k f \ (k \in \mathbb{N})$, de manera que $\square(I^2 f) = I^{-2}(I^2 f) = I^0 f = f$, es decir $u = I^2 f$ es efectivamente solución de $\square u = f$. Puesto que $\gamma_n(\lambda)^{-1}$ se anula cuando $n \geq 4$ es par y $\lambda = 2$, se ve inmediatamente de *(0.2)* que $I^2 f(x)$ depende sólo de los valores que f toma en la vecindad del mantel de C_x^- : ésta es otra forma del principio de Huygens.

El descubrimiento de la teoría de distribuciones por Laurent Schwartz [28,29] en 1944 ayudó mucho a entender claramente los métodos de Hadamard y de Marcel Riesz y la conexión entre los dos. En primer lugar las distribuciones permiten la definición sencilla y elegantísima de una solución elemental del operador diferencial con coeficientes constantes $P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$: es una distribución E tal que $P(\partial) E = \delta$. Para apreciar esta definición, basta leer en los libros anteriores a la teoría de las distribuciones las dificultades que tienen para explicar el concepto de solución elemental.

Por otra parte tanto la parte finita de la integral en (0.1) como la función $I^\lambda f$ en (0.2) se pueden interpretar como convoluciones de f con ciertas distribuciones que introduciremos en lo que sigue. Para $\mathcal{R}e\,\lambda > -2$ se define la distribución s_+^λ poniendo

$$< s_+^\lambda , \varphi > = \int_{C^+} s(x)^\lambda \varphi(x)\, dx$$

cualquiera que sea $\varphi \in \mathcal{D}$ [12, Cap. IV, § 2, no. 2, p. 341]. Si se escribe $x' = \rho\theta$ con $\theta \in \mathcal{S}_{n-2}$, $\varphi_1(t, \rho, \theta) = \varphi(x)$,

$$\psi(u,v) = \int_{\mathcal{S}_{n-2}} \varphi_1(t, \rho, \theta)\, d\theta , \qquad u = t^2,\ v = \rho^2 ,$$

y

$$\Phi(u, \lambda) = \tfrac{1}{4} \int_0^1 \psi(u, wu)\, (1-w)^{\frac{1}{2}\lambda}\, w^{\frac{1}{2}(n-3)}\, dw ,$$

entonces se tiene

$$(0.3) \qquad <s_+^\lambda , \varphi > = \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}(\lambda+n)-1}\, \Phi(u, \lambda)\, du = < u_+^{\frac{1}{2}(\lambda+n)-1}, \Phi(u, \lambda) > ,$$

donde u_+^ζ es la distribución sobre $\mathbb{R}$ definida abajo en (2.2.5). Obsérvese que si $\varphi \equiv 1$, entonces $4\,\Phi(u, \lambda)$ es la integral de Euler

$$\int_0^1 (1-w)^{\frac{1}{2}\lambda}\, w^{\frac{1}{2}(n-3)}\, dw = B\left(\frac{\lambda+2}{2}, \frac{n-1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n+1}{2}\right)} .$$

Se puede ver fácilmente que la función $\lambda \mapsto s_+^\lambda$ es holomorfa en un sentido que definiremos con toda precisión en el texto. Esta función con valores en el espacio de las distribuciones templadas $\mathcal{S}$ tiene una prolongación analítica en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ con la excepción de ciertos puntos singulares que son de dos tipos : los que corresponden a las singularidades de u_+^ζ, es decir $\frac{1}{2}(\lambda+n)-1=-1,-2,$ $-3, \ldots$ o sea

$$(0.4) \qquad \lambda=-n, -n-2, -n-4, \ldots, -n-2k, \ldots \qquad (k \in \mathbb{N})$$

y aquellos que corresponden a los polos de $\Gamma(\frac{1}{2}\lambda+1)$, es decir $\frac{1}{2}\lambda+1=0,-1,$ $-2, \ldots$ o sea

$$(0.5) \qquad \lambda=-2, -4, -6, \ldots, -2j, \ldots \qquad (j \geqq 1).$$

Siguiendo la discusión en Guelfand-Shilov y utilizando conceptos y notaciones que introduciremos en el texto, distingamos ahora tres clases de puntos singulares:

Primera clase : El punto $\lambda=-2j$ pertenece a (0.5) pero no a (0.4), es decir n es impar o $0<2j<n$. La función $\lambda \mapsto s_+^\lambda$ tiene entonces un polo simple en $\lambda=-2j$ con residuo dado por

$$(0.6) \qquad \operatorname*{Res}_{\lambda=-2j} \langle s_+^\lambda, \varphi\rangle = \frac{(-1)^{j-1}}{2(j-1)!} \left\langle \operatorname*{Pf}_{\zeta=\frac{n-2j}{2}-1} u_+^\zeta, \partial_w^{j-1}\{\psi(u,wu)w^{\frac{1}{2}(n-3)}\}_{w=1} \right\rangle$$

Se nota que $\operatorname*{Res}_{\lambda=-2j} s_+^\lambda$ tiene su soporte en el mantel de C^+.

Segunda clase : El punto $\lambda=-n-2k$ pertenece a (0.4) pero no a (0.5), es decir n es impar. Uno considera primero $k=0$ cuando un cálculo fácil a partir de (0.3) muestra que $\lambda \mapsto s_+^\lambda$ tiene un polo simple en $\lambda=-n$ con residuo

$$(0.7) \qquad \operatorname*{Res}_{\lambda=-n} s_+^\lambda = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,\delta$$

Observemos que de *(0.7)* y de la fórmula evidente

$$(0.8) \qquad \Box\, s^{\lambda+2} = (\lambda+2)(\lambda+n)\, s^{\lambda}$$

ya podemos calcular la solución elemental E de $\Box$ cuando n es impar. En efecto, en este caso $\lambda \mapsto s_+^{\lambda}$ es holomorfa en la vecindad de $\lambda = -n+2$, luego $Pf\, s_+^{2-n} = s_+^{2-n}$ es sencillamente el valor en $\lambda = -n+2$ obtenido pro prolongación analítica *(2.2.1)*. De *(0.8)* resulta entonces

$$\Box\, s_+^{2-n} = \lim_{\lambda \to -n} (\lambda+2)(\lambda+n) \left[\frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \, \frac{\delta}{\lambda+n} + \cdots \right]$$

$$= (2-n)\, \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, \delta = \frac{2(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)} \pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\, \delta$$

y por lo tanto

$$E = \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{2(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)} \pi^{\frac{1}{2}n}}\, s_+^{2-n} = \frac{1}{2\pi^{\frac{1}{2}(n-2)}\Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right)}\, s_+^{2-n} .$$

Esta es la forma correcta de la solución elemental definida heurísticamente al principio y la parte finita en *(0.1)* es $u = E * f$.

Utilizando *(0.7)* y *(0.8)* y la fórmula de Green se ve luego que $\lambda \mapsto s_+^{\lambda}$ tiene polos simples en los puntos $\lambda = -n-2k$ y que los residuos en estos puntos son

$$(0.9) \qquad \operatorname*{Res}_{\lambda=-n-2k} s_+^{\lambda} = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \pi^{\frac{1}{2}n}}{2^{2k} k!\, \Gamma\left(\frac{n+2k}{2}\right)}\, \Box^{k} \delta$$

$$= \frac{(-1)^{k} \pi^{\frac{1}{2}(n-2)} \Gamma\left(\frac{2-n-2k}{2}\right)}{2^{2k} k!}\, \Box^{k} \delta .$$

Tercera clase : El punto $\lambda = -n-2k = -2j$ pertenece a ambas sucesiones *(0.4)* y *(0.5)*, es decir n es par y $j = \frac{n}{2} + k$. En este caso estos puntos serán polos de orden dos, es decir para $0<|\lambda+n+2k|<1$ tendremos desarrollos de la forma

$$(0.10)\qquad s_+^\lambda = \frac{S_2^{(2k)}}{(\lambda+n+2k)^2} + \frac{S_1^{(2k)}}{\lambda+n+2k} + S^{(2k)}(\lambda)\,.$$

Tomando primero el caso $k=0$ se obtiene fácilmente de (0.3) que

$$(0.11)\qquad S_2^{(0)} = \frac{2(-1)^{\frac{1}{2}(n-2)}\pi^{\frac{1}{2}(n-2)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta$$

Con lo que sabemos ahora, ya podemos calcular la solución elemental E de $\square$ también cuando n es par. En la vecindad de $\lambda=-n+2$ se tiene el desarrollo

$$(0.12)\qquad s_+^\lambda = \frac{T_{-1}}{\lambda+n-2} + T_0 + T_1(\lambda+n-2) + \cdots$$

donde

$$<T_{-1},\varphi> = \operatorname*{Res}_{\lambda=-n+2} <s_+^\lambda,\varphi> = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n}}{2\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\int_0^\infty \partial_w^{\frac{1}{2}(n-4)}\{\psi(u,wu)w^{\frac{1}{2}(n-3)}\}_{w=1}\,du$$

en virtud de (0.6). Reemplazando λ por $\lambda+2$ en (0.12) obtenemos de $(0\ 8)$, (0.10) y (0.11) que para λ cerca de $-n$ se tiene

$$\square s_+^{\lambda+2} = \frac{\square T_{-1}}{\lambda+n} + \square T_0 + \square T_1(\lambda+n) + \cdots$$

$$= (\lambda+2)(\lambda+n)\left[\frac{2(-1)^{\frac{1}{2}(n-2)}\pi^{\frac{1}{2}(n-2)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\delta}{(\lambda+n)^2} + \frac{S_1^{(0)}}{\lambda+n} + \cdots\right]$$

Multiplicando por $\lambda+n$ y haciendo $\lambda\to -n$ se sigue

$$\square T_{-1} = (2-n)\frac{2(-1)^{\frac{1}{2}(n-2)}\pi^{(n-2)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta\ ,$$

es decir

$$E = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n}\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{1}{2}(n-2)}}\operatorname*{Res}_{\lambda=-n+2} s_+^\lambda$$

o sea

$$< E\,,\varphi > = \frac{1}{8\,\pi^{\frac{1}{2}(n-2)}} \int_0^\infty \partial^{\frac{1}{2}(n-4)} \{ \psi\,(u,wu)\, w^{\frac{1}{2}(n-3)} \}_{w=1}\, du\,.$$

Utilizando otra vez *(0.8)* y *(0.11)* se obtiene

$$S_2^{(2k)} = \frac{2(-1)^{\frac{1}{2}(n-2)}\,\pi^{\frac{1}{2}(n-2)}}{2^{2k} k!\,\Gamma\left(\frac{n+2k}{2}\right)}\,\square^k\,\delta\,. \tag{0.13}$$

Las distribuciones $S_1^{(2k)}$ en *(0.10)* y las distribuciones en *(0.6)* son invariantes bajo el grupo de Lorentz y fueron estudiados por Méthée [21, 22, 23], Gårding-Roos [10], Tengstrand [30], Carmen Braga [7] y Eliana Rocha Henriques de Brito [14].

Las distribuciones hiperbólicas de Marcel Riesz se definen por

$$Z_\lambda = \frac{s_+^{\lambda-n}}{2^{\lambda-1}\,\pi^{\frac{1}{2}(n-2)}\,\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\lambda+2-n}{2}\right)}\,.$$

Los polos de los factores Γ compensan los polos de $s_+^{\lambda-n}$ de manera que Z_λ es una función entera de λ. De *(0.9)* y *(0.13)* resulta que $Z_{-2k} = \square^k\delta$. Se verifica que $Z_\alpha * Z_\beta = Z_{\alpha+\beta}$ y así Z_2 es solución elemental de $\square$. La función $I^\lambda f$ de *(0.2)* es $Z_\lambda * f$ y por lo tanto se tiene efectivamente $I^\alpha(I^\beta f) = Z_\alpha * (Z_\beta * f) = Z_{\alpha+\beta} * f = I^{\alpha+\beta} f$ y $I^{-2k} f = \square^k f$.

Nuestra intención al presentar con algunos detalles el ejemplo de la solución elemental del operador de las ondas fue de convencer al lector del interés que tiene el estudio de las distribuciones que se definen mediante prolongación analítica. El segundo capítulo del presente trabajo contiene un estudio detallado de las propiedades básicas de tales distribuciones y de sus partes finitas. El primer capítulo contiene con demostraciones completas todos los resultados de la teoría general de las funciones holomorfas con valores en un espacio localmente convexo que se necesitan para definir e investigar las funciones holomorfas cuyos valores son distribuciones. Este primer capítulo no pretende a ninguna originalidad; pensamos hacer sin embargo un trabajo que puede ser útil a algunos lectores (como le fue útil al autor) ya que los resultados no figuran sino en unos trabajos aislados ([11,3] y con más generalidad en [21]) ,a veces con demostraciones muy concisas, o como ejercicios en libros [18, Sec. 17, Problema D, p. 162; 25, Cap. IV, Ejerc. 39, p. 200].

Los resultados expuestos en este trabajo fueron resumidos en una conferencia dictada en 1971 en Oberwolfach [16] que contiene además las seudofunciones euclídeas y en particular las distribuciones elípticas de Marcel Riesz como ejemplos. Durante el primer semestre del año académico 1972/73 tuve el honor de dictar un curso sobre el tema en la Universidad de París VI. La participación muy activa de mis oyentes contribuyó a mejorar la presentación en varios lugares, simplificar unas demostraciones y agregar unos resultados nuevos. La deducción de la solución elemental de $\square$ hecha en esta introducción ya figura con menos detalles en una conferencia dada en el seminario de Schwartz-Goulaouic en la Escuela Politécnica de París [17].

1. *Funciones holomorfas con valores vectoriales*

1.1. *La definición de funciones holomorfas.*

(1.1.1) Sea Λ un subconjunto abierto de la recta real $\mathbb{R}$ o del plano complejo $\mathbb{C}$ y sea E un espacio localmente convexo separado sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Se dice que la función $f: \Lambda \to E$ es *diferenciable* en el punto $\lambda_0 \in \Lambda$ si el límite

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$$

existe en E. En tal caso el límite se notará $\dfrac{df}{d\lambda}(\lambda_0)$ y se llamará la *derivada* de f en λ_o.

La función $f: \Lambda \to E$ será *escalarmente diferenciable* en el punto $\lambda_o \epsilon \Lambda$ si para todo x' que pertenece al dual topológico E' de E la función con valores escalares

$$< f, x' > = x' \circ f : \lambda \mapsto < f(\lambda), x' >$$

es diferenciable en λ_o. Es evidente que si f es diferenciable en λ_o, entonces es escalarmente diferenciable en λ_o y la derivada de $<f, x'>$ en λ_o es $<\frac{df}{d\lambda}(\lambda_o), x'>$. El recíproco no es cierto, pero se tiene :

(1.1.2) LEMA [11, p. 39; 27, p. 146]. *Si* $f: \Lambda \to E$ *es escalarmente diferenciable en cada punto de* Λ, *entonces* f *es continua en* Λ.

Demostración. Sea $\lambda_o \epsilon \Lambda$. Existe un número $\rho > 0$ tal que todo $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con $|\lambda - \lambda_o| \leqq \rho$ pertenece a Λ. Notemos por B el conjunto de todos los elementos

$$z(\lambda) = \frac{f(\lambda) - f(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o}$$

de E donde $0 < |\lambda - \lambda_o| \leqq \rho$. Mostremos que B es acotado para la topología débil $\sigma(E, E')$ sobre E. Para $x' \epsilon E'$ sea $z_o = z_o(\lambda_o; x')$ el límite de $<z(\lambda), x'>$ cuando λ tiende hacia λ_o. Existe un número δ, $0 < \delta < \rho$, tal que

$$| < z(\lambda), x' > - z_o | \leqq 1 ,$$

es decir

$$|<z(\lambda), x'>| \leqq 1 + |z_o|$$

para $0 < |\lambda - \lambda_o| < \delta$. Por otra parte, para $\delta \leqq |\lambda - \lambda_o| \leqq \rho$ se tiene

$$| < z(\lambda), x' > | \leqq \frac{1}{\delta} \Big(|<f(\lambda), x'>| + |<f(\lambda_o), x'>| \Big).$$

Ahora bien, la función $\lambda \mapsto <f(\lambda), x'>$ es diferenciable por hipótesis, por consiguiente es continua y en particular es acotada para $\delta \leqq |\lambda - \lambda_o| \leqq \rho$. Queda pues demostrado que B es débilmente acotado.

De aquí resulta [15, Teor. 3.5.3, p. 209] que B es acotado para la topología original de E. Para $0 < |\lambda - \lambda_o| \leqq \rho$ se tiene

$$f(\lambda) - f(\lambda_o) \in (\lambda - \lambda_o) B .$$

Cualquiera que sea la vecindad V del origen, existe ε, $0 < \varepsilon \leqq \rho$, tal que $(\lambda - \lambda_o) B \subset V$ cada vez que $|\lambda - \lambda_o| \leqq \varepsilon$. Por lo tanto $f(\lambda) - f(\lambda_o) \in V$ si $|\lambda - \lambda_o| \leqq \varepsilon$, es decir f es continua en λ_o. ■

(1.1.3) A partir de ahora supondremos que Λ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y que el cuerpo de escalares es $\mathbb{C}$. Se dirá que la función $f: \Lambda \to E$ es *holomorfa* en Λ si es diferenciable en cada punto de Λ. Se dirá que f es *escalarmente holomorfa* si para cada $x' \in E'$ la función $\lambda \mapsto \langle f(\lambda), x' \rangle \in \mathbb{C}$ es holomorfa. Otra vez es evidente que si f es holomorfa entonces es escalarmente holomorfa en Λ. Si E es casi-completo, es decir si cada conjunto acotado y cerrado en E es completo, entonces se tiene el recíproco siguiente :

(1.1.4) TEOREMA [11, p. 37; 18, p. 162]. *Sea E un espacio localmente convexo separado y casi-completo sobre $\mathbb{C}$ y Λ un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Si la función $f: \Lambda \to E$ es escalarmente holomorfa, entonces es holomorfa.*

Demostración. Sea $\lambda_o \in \Lambda$ y sea $z_o(\lambda_o) \in E'^*$ la forma lineal sobre E' que a $x' \in E'$ le hace corresponder la derivada de la función $\langle f, x' \rangle : \lambda \mapsto \langle f(\lambda), x' \rangle$ en λ_o, es decir

$$\langle z_o(\lambda_o), x' \rangle = \frac{d}{d\lambda} \langle f, x' \rangle \Big|_{\lambda = \lambda_o} .$$

Puesto que $\langle f, x' \rangle$ es holomorfa, se tiene en virtud de la fórmula de Cauchy

$$\frac{d}{d\lambda} \langle f, x' \rangle \Big|_{\lambda = \lambda_o} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\langle f(\lambda), x' \rangle}{(\lambda - \lambda_o)^2} \, d\lambda ,$$

donde $\Gamma = \{ \lambda ; | \lambda - \lambda_o | = \rho \} \subset \Lambda$. Ahora f es contínua *(1.1.2)*, luego por la definición de la integral de una función contínua con valores vectoriales [6, Cap. III, 2ª ed., § 3, no. 1, Def. 1] se tiene

$$z_o(\lambda_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_o)^2} \, d\lambda$$

Pero se supone que E es casi-completo, luego $z_o(\lambda_o) \in E$ [6, Cap. III, 2ª ed., § 3, no. 3, Corol. 2 de la Prop. 7].

Demostraremos que $z_o(\lambda)$ es la derivada de f en λ [26; 27, p. 145]. Puesto que para todo $x' \in E'$ la función holomorfa $< f, x' >$ es infinitamente diferenciable, la función $z_o : \lambda \mapsto z_o(\lambda)$ es escalarmente diferenciable y por lo tanto contínua *(1.1.2)*. Para $\lambda, \lambda_o \in \Lambda$, $\lambda \neq \lambda_o$ y $x' \in E'$ se tiene

$$\left< \frac{f(\lambda) - f(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o}, x' \right> = \frac{1}{\lambda - \lambda_o} \int_{\lambda_o}^{\lambda} < z_o(\zeta), x' > d\zeta$$

y desde luego

$$\frac{f(\lambda) - f(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} - z_o(\lambda_o) = \frac{1}{\lambda - \lambda_o} \int_{\lambda_o}^{\lambda} \{ z_o(\zeta) - z_o(\lambda_o) \} \, d\zeta . \tag{1.1.4.1}$$

Sea V una vecindad equilibrada, convexa y cerrada del origen en E. Existe $\delta > 0$ tal que si $|\lambda - \lambda_o| \leqq \delta$ y ζ está situado sobre el segmento $[\lambda_o, \lambda]$ que une los puntos λ_o y λ, entonces $z_o(\zeta) - z_o(\lambda_o) \in V$. El segundo miembro de *(1.1.4.1)* está contenido en la envolvente equilibrada, convexa, cerrada de

$$\{ z_o(\zeta) - z_o(\lambda_o) \; ; \; \zeta \in [\lambda_o, \lambda] \}$$

[6, Cap. III, 2ª ed., § 3, no, 2, Corol. de la Prop. 4] y con más razón en V. Luego

$$\frac{f(\lambda) - f(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} - z_o(\lambda_o) \in V$$

para $0 < |\lambda - \lambda_o| \leq \delta$ ■

Otra demostración de este teorema resultará de *(1.2.1)*.

(1.1.5) COROLARIO. Sean E y F dos espacios localmente convexos, separados y supongamos que F sea casi-completo. Sea $u: E \to F$ una aplicación lineal continua y $f: \Lambda \to E$ una función holomorfa. Entonces $u \circ f: \Lambda \to F$ es holomorfa.

Demostración. Para todo $y' \in F'$ la función con valores escalares $\lambda \to \langle u(f(\lambda)), y' \rangle = \langle f(\lambda), {}^t u(y') \rangle$ es holomorfa. ■

(1.1.6) PROPOSICION. Sea E un espacio localmente convexo separado y E' su dual provisto con la topología fuerte $\beta(E', E)$. Sea Λ un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Si las funciones $f: \Lambda \to E$ y $g': \Lambda \to E'$ son holomorfas, entonces la función escalar $\lambda \to \langle f(\lambda), g'(\lambda) \rangle$ es holomorfa y se tiene

$$\frac{d}{d\lambda} \langle f, g' \rangle = \langle \frac{df}{d\lambda}, g' \rangle + \langle f, \frac{dg'}{d\lambda} \rangle .$$

Demostración. Poniendo $\alpha(\lambda) = \langle f(\lambda), g'(\lambda) \rangle$ se tiene

$$\frac{\alpha(\lambda) - \alpha(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} - \langle \frac{df}{d\lambda}(\lambda_o), g'(\lambda_o) \rangle - \langle f(\lambda_o), \frac{dg'}{d\lambda}(\lambda_o) \rangle$$

$$= \langle \frac{f(\lambda) - f(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o}, g'(\lambda) - g'(\lambda_o) \rangle$$

$$+ \langle \frac{f(\lambda) - f(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} - \frac{df}{d\lambda}(\lambda_o), g'(\lambda_o) \rangle$$

$$+ \langle f(\lambda_o), \frac{g'(\lambda) - g'(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} - \frac{dg'}{d\lambda}(\lambda_o) \rangle$$

Se vió en la demostración de *(1.1.2)* que el conjunto

$$\left\{ \frac{f(\lambda) - f(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} \; ; \; 0 < |\lambda - \lambda_o| \leq \rho \right\}$$

es acotado en E. Puesto que g' es continua en Λ *(1.1.2)*, el primer término en el segundo miembro converge hacia cero por hipótesis. ■

Para un resultado más general véase [11, § 2, Remarque 4, p. 40].

1.2. Propiedades de las funciones holomorfas.

(1.2.1) LEMA [11, p. 39; 27, p. 146]. *Sea E un espacio localmente convexo separado, casi-completo sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y sea Λ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ o de $\mathbb{C}$. Supóngase que la función $f: \Lambda \to E$ es escalarmente m veces diferenciable. Entonces f tiene derivada contínua de orden $m-1$.*

Demostración. Para $m=1$ esto es precisamente *(1.1.2)*. Consideremos primero el caso $m=2$. Sea $\lambda_o \in \Lambda$ y notemos por $z_o(\lambda_o) \in E'^*$ la forma lineal sobre E' que a $x' \in E'$ le hace corresponder la derivada de la función $\langle f, x'\rangle : \lambda \mapsto \langle f(\lambda), x'\rangle$ en el punto λ_o, es decir

$$\langle z_o(\lambda_o), x'\rangle = \frac{d}{d\lambda} \langle f, x'\rangle_{\lambda=\lambda_o} .$$

Para cada $x' \in E'$ se tiene

$$\langle z_o(\lambda_o), x'\rangle = \lim_{\lambda \to \lambda_o} \langle z(\lambda ; \lambda_o), x'\rangle \quad ,$$

donde

$$z(\lambda ; \lambda_o) = \frac{f(\lambda) - f(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} .$$

Sea $\rho > 0$ tal que los $\lambda \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con $|\lambda - \lambda_o| \leqq \rho$ pertenecen a Λ. Según lo que se vió en la demostración de *(1.1.2)*, el conjunto

$$B = \{ z(\lambda ; \lambda_o) \quad ; \quad 0 < |\lambda - \lambda_o| \leqq \rho \}$$

es acotado en E y por lo tanto $z_o(\lambda_o)$ es adherente en E'^* para la topología $\sigma(E'^*, E')$ a un conjunto acotado de E. Pero el bidual E'' de E es el conjunto de todos los puntos de E'^* que son adherentes para la topología $\sigma(E'^*, E')$ a subconjuntos acotados de E [15, Prop. 3.5.1, p. 204], luego $z_o(\lambda_o) \in E''$.

En virtud de nuestra hipótesis, para cada $x' \in E'$ la función $\langle z_o, x'\rangle$:

$\lambda \mapsto \langle z_o(\lambda), x' \rangle$ es diferenciable en cada punto de Λ. Para $\lambda_o \in \Lambda$ escríbase

$$w(\lambda;\lambda_o) = \frac{z_o(\lambda) - z_o(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o}$$

si $0 < |\lambda - \lambda_o| \leqq \rho$. Otra vez se sigue de la demostración de *(1.1.2)* que el conjunto

$$C = \{ w(\lambda;\lambda_o) \ ; \ 0 < |\lambda - \lambda_o| \leqq \rho \}$$

es acotado en E'' para la topología $\sigma(E'', E')$. Por lo tanto C está contenido en el polar $\overset{\circ}{T}$ de un $\beta(E', E)$-tonel T de E' [15, Prop. 3.5.7, p. 208] . Por otra parte la envolvente equilibrada, convexa, $\sigma(E', E)$-cerrada de un subconjunto equicontinuo A de E' es $\sigma(E', E)$-compacta [15, Teor. 3.4.1, p. 201] y por lo tanto $\beta(E', E)$-completa ya que los conjuntos $\sigma(E', E)$-cerrados $\overset{\circ}{M}$ donde M recorre los conjuntos acotados de E, forman un sistema fundamental de vecindades de 0 en E' para la topología $\beta(E', E)$ [4, Cap. III, 3ª ed., § 3, no. 5, Corol. 1 de la Prop. 9] . Existe $\lambda > 0$ tal que $A \subset \lambda T$ [15, Teor. 3.5.2, p. 208] y por consiguiente $C \subset \overset{\circ}{T} \subset \lambda \overset{\circ}{A}$, de manera que C es también acotada para la topología $\varepsilon(E'', E')$ de la convergencia uniforme sobre subconjuntos equicontinuos de E' [cf. 5, Cap. III , § 3, no. 4, Teor. 1] .

De aquí resulta que la aplicación $\lambda \mapsto z_o(\lambda)$ es continua para la topología $\varepsilon(E'', E')$ sobre E''. En efecto, sea V una $\varepsilon(E'', E')$-vecindad de 0 en E''. Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mu C \subset V$ para $|\mu| \leqq \varepsilon$. Puesto que $z_o(\lambda) - z_o(\lambda_o) \in (\lambda - \lambda_o)C$, se tiene $z_o(\lambda_o) - z_o(\lambda_o) \in V$ provisto que $|\lambda - \lambda_o| \leqq \varepsilon$.

Ahora demostraremos que $z_o(\lambda_o)$ es el límite de $z(\lambda;\lambda_o)$, cuando λ tiende hacia λ_o, para la topología $\varepsilon(E'', E')$ [26; 27, p. 145] . Dada una vecindad equilibrada, convexa, $\sigma(E'', E')$-cerrada V de 0 en E'' para $\varepsilon(E'', E')$, existe $\delta > 0$ tal que $|\lambda - \lambda_o| \leqq \delta$ implica $z_o(\lambda) - z_o(\lambda_o) \in V$. También se tiene

$$(1.2.1.1) \qquad z(\lambda;\lambda_o) - z_o(\lambda_o) = \frac{1}{\lambda - \lambda_o} \int_{\lambda_o}^{\lambda} \{ z_o(\zeta) - z_o(\lambda_o) \} \, d\zeta$$

(1.1.4.1), donde la integral se toma en el sentido de la topología $\sigma(E'',E')$. Ahora bien

$$D = \{ z_o(\zeta) - z_o(\lambda_o) \;\; ; \;\; |\zeta - \lambda_o| \leqq \delta \}$$

está contenido en V, luego el segundo miembro de *(1.2.1.1)*, el cual está contenido en la envolvente equilibrada, convexa, $\sigma(E'', E')$-cerrada de D, está con mayor razón contenido en V, es decir $z(\lambda\,;\lambda_o) - z_o(\lambda_o) \in V$, provisto que $|\lambda - \lambda_o| \leqq \delta$.

Finalmente mostraremos que $z_o(\lambda_o)$ pertenece a E y que $z(\lambda\,;\lambda_o)$ converge hacia $z_o(\lambda_o)$, cuando λ tiende a λ_o, para la topología original de E. Puesto que $\varepsilon(E'', E')$ induce sobre E su topología original [15, Prop. 3.4.7, p. 201], los conjuntos

$$\{ z(\lambda\,;\lambda_o) \;\; ; \;\; 0 < |\lambda - \lambda_o| \leqq \frac{1}{n} \} \; ,$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ forman la base de un filtro de Cauchy acotado $\mathcal{F}$ sobre E. Puesto que E es casi-completo, $\mathcal{F}$ es convergente y converge necesariamente hacia $z_o(\lambda_o)$.

Sea ahora m un número entero $\geqq 3$. Supongamos que el lema sea cierto para todos los números enteros positivos $< m$. Si $f : \Lambda \to E$ es escalarmente m veces diferenciable, entonces por la hipótesis de inducción tiene derivadas contínuas de todos los órdenes $\leqq m-2$. Poniendo $g = \dfrac{d^{m-2} f}{d\lambda^{m-2}}$, la función g es dos veces escalarmente diferenciable. Por lo que acabamos de ver, g tiene derivada continua. Puesto que $\dfrac{dg}{d\lambda} = \dfrac{d^{m-1} f}{d\lambda^{m-1}}$, queda el lema completamente demostrado. ∎

A partir de ahora supondremos que Λ es un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y que E es un espacio localmente convexo separado y casi completo sobre $\mathbb{C}$.

(1.2.2) PROPOSICIÓN. *Una función holomorfa tiene derivadas continuas de todos los órdenes.*

Esto resulta de *(1.2.1)* y de una propiedad clásica de las funciones holomorfas con valores escalares.

(1.2.3) Se ve de la demostración de *(1.2.1)* que si $f: \Lambda \to E$ es holomorfa, entonces

$$(1.2.3.1) \qquad < \frac{d^n f}{d\lambda^n}(\lambda_o), x' > = \frac{d^n}{d\lambda^n} < f, x' > \Big|_{\lambda=\lambda_o}$$

para $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_o \in \Lambda$ y $x' \in E'$.

(1.2.4) PROPOSICIÓN [11, p. 37]. *Una función* $f: \Lambda \to E$ *es holomorfa si y sólo si es débilmente continua y*

$$(1.2.4.1) \qquad \int_\gamma f(\lambda)\, d\lambda = 0$$

para todo camino simple, cerrado, rectificable γ *en* Λ *cuyo interior está contenido en* Λ.

Demostración. Si f es holomorfa, entonces es continua y con mayor razón débilmente continua. Además para todo $x' \in E'$ se tiene

$$(1.2.4.2) \qquad < \int_\gamma f(\lambda)\, d\lambda, x' > = \int_\gamma < f(\lambda), x' > d\lambda = 0 \, .$$

Conversamente, si f es débilmente continua y se cumple *(1.2.4.1)*, entonces resulta de *(1.2.4.2)* y del teorema de Morera [8, Cap. II, § 2, No. 7. Teor. 4] que para todo $x' \in E'$ la función $<f, x'>$ es holomorfa. Por lo tanto f es holomorfa *(1.1.4)*. ■

(1.2.5) COROLARIO [11, p. 39]. *Sea* M *un subconjunto total de* E' *y* $f: \Lambda \to E$ *una función débilmente continua tal que para todo* $x' \in M$ *la función* $<f, x'>$ *es holomorfa. Entonces* f *es holomorfa.*

Demostración. Si $x' \in M$ y γ es un camino simple, cerrado, rectifiable en Λ cuyo interior está en Λ, entonces se cumple *(1.2.4.2)*. Por otro lado $\int_\gamma f(\lambda)\, d\lambda$ pertenece a E puesto que E es casi-completo [6, Cap. III, 2ª ed., § 3, no. 3, Corol. 2 de la Prop. 7]. Ahora bien cada elemento de E es una forma lineal sobre E' continua para $\sigma(E', E)$, de manera que *(1.2.4.2)* es válido para todo $x' \in E'$. Se sigue entonces que se tiene *(1.2.4.1)*, es decir f es holomorfa. ■

(1.2.6) COROLARIO [11, p. 39]. *Sea F un espacio localmente convexo separado (no necesariamente casi-completo) y E un subespacio lineal de F provisto de una topología localmente convexa separada, casi-completa tal que la inyección canónica $j: E \hookrightarrow F$ sea continua. Sea $f: \Lambda \to E$ una función débilmente continua tal que $j \circ f$ sea holomorfa. Entonces f es holomorfa.*

Demostración. Para todo $y' \in F'$ la función

$$\lambda \mapsto \langle j(f(\lambda)), y' \rangle = \langle f(\lambda), {}^t j(y') \rangle$$

es holomorfa. Puesto que j es inyectiva, ${}^t j(F')$ es denso en E' [15, Corol. 2 de la Prop. 3. 12.2, p. 256] y el enunciado resulta de *(1.2.5)*. ■

(1.2.7). PROPOSICION [11, p. 37]. *Si la función $f: \Lambda \to E$ es holomorfa y γ es un camino simple, cerrado, rectificable en Λ cuyo interior está contenido en Λ, entonces*

$$\text{(1.2.7.1)} \qquad \frac{d^n f}{d\lambda^n}(\lambda_o) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_o)^{n+1}}\,d\lambda$$

para $n \in \mathbb{N}$ y todo λ_o en el interior de γ.

Demostración. Para todo $x' \in E'$ se tiene en virtud de *(1.2.3.1)*

$$\left\langle \frac{d^n f}{d\lambda^n}(\lambda_o), x' \right\rangle = \frac{d^n}{d\lambda^n}\langle f, x' \rangle \Big|_{\lambda=\lambda_o}$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\langle f(\lambda), x' \rangle}{(\lambda-\lambda_o)^{n+1}}\,d\lambda = \left\langle \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\lambda)}{(\lambda-\lambda_o)^{n+1}}\,d\lambda\,,\; x' \right\rangle$$

[1, Cap. III, 2.3, (23)]. ■

(1.2.8) TEOREMA [11, p. 38]. *(a) Sea $f:\Lambda\to E$ una función holomorfa. Supóngase que el disco $\{\lambda\,;\,|\lambda-\lambda_o|<\rho\}$ esté contenido en Λ y escójase σ tal que $0<\sigma<\rho$. Entonces la familia*

$$\left(\frac{1}{n!}\,\frac{d^n f}{d\lambda^n}(\lambda_o)\cdot(\lambda-\lambda_o)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

es sumable [4, Cap. III, 3ª ed., § 5, no. 1, Def. 1; 15, Def. 2.8.2, p. 127] *hacia el valor $f(\lambda)$, uniformemente en $\{\lambda\,;\,|\lambda-\lambda_o|\leqq\sigma\}$.*

(b) Conversamente, si $f:\Lambda\to E$ es tal que para cada $\lambda_o\in\Lambda$ existe una serie [4, Cap. III, 3ª ed., § 5, no. 6] *con término general $a_n(\lambda-\lambda_o)^n$, $a_n\in E$, $n\in\mathbb{N}$, que converge débilmente hacia $f(\lambda)$ en una vecindad de λ_o, entonces f es holomorfa.*

Demostración. (a) Escójase $\sigma<r<\rho$. Si γ es el círculo con centro λ_o y radio r, entonces se tiene

$$a_n=\frac{1}{n!}\,\frac{d^n f}{d\lambda^n}(\lambda_o)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\lambda_o)^{n+1}}\,d\zeta$$

(1.2.7). Ahora

$$\frac{r^{n+1}}{2\pi r}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\lambda_o)^{n+1}}\,d\zeta$$

está contenido en la envolvente equilibrada, convexa, cerrada K del conjunto compacto $f(\gamma)$. El conjunto K es compacto [15, p. 235] y

$$a_n\in\frac{2\pi r}{r^{n+1}}\,\frac{1}{2\pi}\,K=\frac{1}{r^n}\,K\,.$$

Se sigue que para $|\lambda-\lambda_o|\leqq\sigma$ se tiene

$$(1.2.8.1)\qquad \sum_{n\in H}a_n(\lambda-\lambda_o)^n\in\sum_{n>p}\left(\frac{\sigma}{r}\right)^n K\subset\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{p+1}\frac{r}{r-\sigma}\,K\,,$$

cada vez que H es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ que no encuentra el intervalo $[0, p]$. Puesto que K es compacto y $\sigma/r < 1$, para cualquier vecindad cerrada V de 0 existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$(1.2.8.2) \qquad \sum_{n \in H} a_n (\lambda - \lambda_o)^n \in V$$

cada vez que $H \cap [0,p] = \phi$, es decir la familia $(a_n(\lambda-\lambda_o)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisface a la condición de Cauchy [4, Cap. III, 3ª ed., § 5, no. 2, Teor. 1; 15, Ejerc. 2.9.6, p. 140]. Ahora bien los conjuntos

$$A_I = \{ \sum_{n \in J} a_n (\lambda - \lambda_o)^n \; ; \; J \supset I \} ,$$

donde I es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, engendran un filtro $\mathcal{F}$, el cual tiene una base enumerable formada por los conjuntos $A_{[0,p]}$. Se sigue que $\mathcal{F}$ es acotado [15, p. 135] y puesto que E es casi-completo, la familia $(a_n(\lambda-\lambda_o)^n)$ es en efecto sumable.

Por *(1.2.3.1)* y la teoría de las funciones holomorfas con valores escalares se tiene

$$< f(\lambda), x' > = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{d^n f}{d\lambda^n} (\lambda_o), x' > (\lambda - \lambda_o)^n$$

$$= < \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{d\lambda^n} (\lambda_o)(\lambda - \lambda_o)^n, x' >$$

para $x' \in E'$ y $|\lambda - \lambda_o| \leq \sigma$. Con otras palabras, la serie con término general $a_n(\lambda - \lambda_o)^n$ converge débilmente y tiene suma $f(\lambda)$, por lo tanto la suma de la serie para la topología original debe también ser $f(\lambda)$. Finalmente tenemos por *(1.2.8.2)* que para p suficientemente grande

$$f(\lambda) - \sum_{n \in J} a_n (\lambda - \lambda_o)^n = \sum_{n \in \complement J} a_n (\lambda - \lambda_o)^n \in V$$

cada vez que $|\lambda-\lambda_o| \leqq \sigma$ y $J \supset [0, p]$.

(b) Para todo $x' \epsilon E'$ se tiene

$$< f(\lambda), x' > = \sum_{n=o}^{\infty} < a_n, x' > (\lambda-\lambda_o)^n$$

si λ pertenece a un cierto disco $|\lambda-\lambda_o| \leqq \sigma$. Resulta de la teoría clásica [8, Cap. II, § 2, no. 6] que $<f, x'>$ es holomorfa en Λ y por consiguiente *(1.1.4)* f es holomorfa. ∎

(1.2.9) PROPOSICIÓN [11, p. 40]. *La función* $f: \Lambda \to E$ *es holomorfa si y sólo si para cada punto* $\lambda_1 \epsilon \Lambda$ *existe una vecindad abierta* U *de* λ_1 *y un subconjunto acotado, equilibrado, convexo y cerrado* B *de* E *tal que* $f: U \to E_B$ [15, Cap. 3, § 5, p. 207] *sea holomorfa.*

Demostración. La inyección $E_B \hookrightarrow E$ es continua, luego *(1.1.5)* muestra que la condición es suficiente .

Supóngase ahora que $f: \Lambda \to E$ sea holomorfa. Sea Δ un disco cerrado con centro λ_1 contenido en Λ . Mostraremos que tomando para U el interior de Δ y para B la envolvente equilibrada, convexa, cerrada del conjunto compacto $f(\Delta)$, se cumple la condición. Sea $\lambda_o \epsilon U$ y escójase $0 < \sigma < r < \rho$ tal que $\{\lambda ; |\lambda-\lambda_o| < \rho\}$ esté contenido en U. Con la notación de la demostración de *(1.2.8)* se tiene $K \subset B$. Si q_B nota el calibrador de B , resulta de *(1.2.8.1)* que

$$q_B\left(\sum_{n \epsilon H} a_n(\lambda-\lambda_o)^n\right) \leqq \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{p+1} \frac{r}{r-\sigma}$$

cada vez que $|\lambda-\lambda_o| \leqq \sigma$ y $H \cap [0,p] = \phi$. Puesto que E es casi-completo , E_B es un espacio de Banach [15, Prop. 3.5.6, p. 207] y por lo tanto la familia $(a_n(\lambda-\lambda_o)^n)$ es sumable en E_B. Pero $E_B \hookrightarrow E$ es continua y por *(1.2.8)* en E la familia $(a_n(\lambda-\lambda_o)^n)$ es sumable hacia $f(\lambda)$, luego en E_B también la suma de la familia debe ser $f(\lambda)$. Resulta entonces de la parte (b) de *(1.2.8)* que $f: U \to E_B$ es holomorfa. ■

(1.2.10) COROLARIO. Sean $\mathfrak{T}_1$ *y* $\mathfrak{T}_2$ *dos topologías localmente convexas, separadas, casi-completas sobre el espacio vectorial* E *para las cuales los conjuntos acotados son los mismos. Entonces las funciones holomorfas* $f: \Lambda \to E$ *son las mismas para* $\mathfrak{T}_1$ *y para* $\mathfrak{T}_2$ *.*

(1.2.11) COROLARIO [11,p.40] . *Sea* F *un espacio localmente convexo, separado, tonelado y* $E = F'$ *su dual. Si la función* $f: \Lambda \to E$ *es tal que para todo* $y \in F$ *la función con valores escalares* $< f, y > : \lambda \mapsto < f(\lambda), y >$ *es holomorfa, entonces* f *es holomorfa cuando* E *se provee con la topología fuerte* $\beta(E, F)$ *.*

Demostración. Puesto que F es tonelado, E es casi-completo para la topología débil $\sigma(E, F)$ [15, Teor. 3.6.1, p. 218] y así f es holomorfa si E se provee con esta topología *(1.1.4)*. Además los subconjuntos de E que son acotados para $\sigma(E, F)$ son los mismos que aquellos que son acotados para $\beta(E,F)$ [15, Corol. de la Prop. 3.6.2, p. 212] , luego la conclusión resulta de *(1.2.10)*. ■

1.3. Prolongación analítica .

(1.3.1) TEOREMA [12,Cap.I, ap. 2, no. 3, p. 171]. *Sea* F *un espacio localmente convexo, separado, tonelado y* $E = F'$ *su dual provisto de la topología fuerte* $\beta(E,F)$. *Sea* Λ_1 *un subconjunto abierto, conexo de* $\mathbb{C}$, Λ_o *un subconjunto abierto de* Λ_1 *y* $f: \Lambda_o \to E$ *una función holomorfa. Supongamos que para todo* $y \in F$ *la función holomorfa con valores escalares*

$$g(\cdot\,; y) : \lambda \mapsto g(\lambda\,; y) = < f(\lambda)\,, y >$$

tiene una prolongación analítica a todo Λ_1. *Entonces existe una función holomorfa* $f_1 : \Lambda_1 \to E$ *tal que* $f_1(\lambda) = f(\lambda)$ *para* $\lambda \in \Lambda_o$ *y*

$$< f_1(\lambda),\ y > = g(\lambda\,;\,y\,)$$

para $\lambda \in \Lambda_1$, $y \in F$.

Demostración. **Sea $\mathfrak{L}$ la colección de todos los subconjuntos abiertos Λ de Λ_1 para los cuales existe una función holomorfa $f_\Lambda : \Lambda \to E$ tal que $< f_\Lambda(\lambda), y > = g(\lambda\,;y)$ para $y \in F$ y $\lambda \in \Lambda$. Observemos que de esta última relación ya se sigue que $f_\Lambda(\lambda) = f(\lambda)$ para $\lambda \in \Lambda \cap \Lambda_o$. También está claro que si Λ y Λ' pertenecen a $\mathfrak{L}$, entonces f_Λ y $f_{\Lambda'}$ coinciden sobre $\Lambda \cap \Lambda'$. Por lo tanto , se puede definir una función holomorfa $\tilde{f}$ sobre el conjunto abierto $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{\Lambda \in \mathfrak{L}} \Lambda$ poniendo $\tilde{f}(\lambda) = f_\Lambda(\lambda)$ si $\lambda \in \Lambda$, y esta función satisface a $< \tilde{f}(\lambda), y > = g(\lambda, y)$ para $y \in F$ y $\lambda \in \tilde{\Lambda}$.**

Supongamos que $\tilde{\Lambda} \neq \Lambda_1$. Puesto que Λ_1 es conexo, existe en Λ_1 un punto λ_1 adherente a $\tilde{\Lambda}$ que no pertenece a $\tilde{\Lambda}$. Sea $\rho > 0$ tal que el disco abierto con centro λ_1 y radio 2ρ pertenece a Λ_1 . Escojamos $\lambda_o \in \tilde{\Lambda}$ tal que $|\lambda_o - \lambda_1| < \rho$ y sea Δ el disco abierto con centro λ_o y radio ρ . El punto λ_1 pertenece a Δ y $\Delta \subset \Lambda_1$. Para $y \in F$ y $\lambda \in \Delta$ se tiene [8, Cap. II, § 2, no.6, Teor. 3]

$$g(\lambda\,;y) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n g(\lambda_o\,;y)}{d\lambda^n} (\lambda - \lambda_o)^n$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} < \frac{1}{n!} \frac{d^n \tilde{f}}{d\lambda^n} (\lambda_o) \cdot (\lambda - \lambda_o)^n, y >$$

(1.2.3.1). **Con otras palabras, si la sucesión $(s_m(\lambda))_{m \in \mathbb{N}}$ de elementos de F' se define por**

$$s_m(\lambda) = \sum_{n=o}^{m} \frac{1}{n!} \frac{d^n \tilde{f}}{d\lambda^n} (\lambda_o) \cdot (\lambda - \lambda_o)^n,$$

entonces $<s_m(\lambda), y>$ converge hacia el número $g(\lambda; y)$ para todo $y \in F$. Por el teorema de Banach-Steinhaus [15, Corol. de la Prop. 3.6.5, p. 216] existe una forma lineal continua $f_\Delta(\lambda) \in F' = E$ tal que $<f_\Delta(\lambda), y> = g(\lambda ; y)$ para $y \in F$. Por hipótesis, la función

$$< f_\Delta, y> \; : \lambda \mapsto <f_\Delta(\lambda), y>$$

es holomorfa en Δ, cualquiera que sea $y \in F$, luego en virtud de *(1.2.11)* la función $f_\Delta : \lambda \mapsto f_\Delta(\lambda)$ es holomorfa en Δ. Se sigue que Δ pertenece a $\mathfrak{L}$, lo que contradice a la definición de $\tilde{\Lambda}$. Esta contradicción muestra que $\tilde{\Lambda} = \Lambda_1$. ∎

(1.3.2) Las condiciones sobre E en *(1.3.1)* se cumplen en particular si E es un espacio localmente convexo, separado, reflexivo. En efecto, en este caso E es el dual de $E' = F$ provisto de la topología $\beta(E,F)$. Este caso especial de *(1.3.1)* se deduce también del resultado un poco más profundo que sigue .

(1.3.3). TEOREMA. Sea E un espacio localmente convexo, separado, casi-completo. Sea Λ_1 un subconjunto abierto, conexo de $\mathbf{C}$, *Λ_o un subconjunto abierto de Λ_1 y $f : \Lambda_o \to E$ una función holomorfa. Supóngase que para todo $x' \in E'$ la función holomorfa con valores escalares*

$$g(\cdot \; ; x) : \lambda \mapsto g(\lambda ; x') = < f(\lambda), x'>$$

tiene una prolongación analítica a todo Λ_1. Entonces existe una función holomorfa $f_1 : \Lambda_1 \to E$ tal que $f_1(\lambda) = f(\lambda)$ para $y \in \Lambda_o$ y $<f_1(\lambda), x'> = g(\lambda ; x')$ para $\lambda \in \Lambda_1$ y $x' \in E'$.

Demostración. De manera semejante a la demostración de *(1.3.1)*, sea $\mathfrak{L}$ la colección de todos los subconjuntos abiertos Λ de Λ_1 para los cuales existe una función holomorfa $f_\Lambda : \Lambda \to E$ que verifica $<f_\Lambda(\lambda), x'> = g(\lambda ; x')$ cualesquiera que sean $\lambda \in \Lambda$, $x' \in E'$. La función $\tilde{f}$ se define sobre $\tilde{\Lambda} = \bigcup_{\Lambda \in \mathfrak{L}} \Lambda$

por $\tilde{f}(\lambda) = f_\Lambda(\lambda)$ si $\lambda \in \Lambda$ y basta demostrar que $\tilde{\Lambda} = \Lambda_1$.

Supóngase que $\tilde{\Lambda} \neq \Lambda_1$ y sea $\lambda_1 \in \Lambda_1$ adherente a $\tilde{\Lambda}$ pero $\lambda_1 \notin \tilde{\Lambda}$. Sea $\rho > 0$ tal que el disco abierto con centro λ_1 y radio 2ρ pertenezca a Λ_1, escojamos $\lambda_o \in \tilde{\Lambda}$ tal que $|\lambda_o - \lambda_1| < \rho$ y sea Δ el disco abierto con centro λ_o y radio ρ. El punto λ_1 pertenece a Δ y Δ está contenido en Λ_1. Además escójase ρ_o con $0 < \rho_o < \rho$ tal que el disco con centro λ_o y radio ρ_o sea un subconjunto de $\tilde{\Lambda}$.

En virtud de *(1.2.8)* se tiene

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{n=o}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_o)^n \tag{1.3.3.1}$$

para $|\lambda - \lambda_o| < \rho_o$, donde

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n \tilde{f}}{d\lambda^n}(\lambda_o)$$

Además, puesto que para todo $x' \in E'$ la función $g(\cdot\, ; x')$ es holomorfa en Λ_1, se tiene un desarrollo

$$g(\lambda\, ; x') = \sum_{n=o}^{\infty} \beta_n (\lambda - \lambda_o)^n$$

válido para $|\lambda - \lambda_o| < \rho$. Ahora bien x' es una forma lineal continua sobre E, luego de *(1.3.3.1)* se sigue que

$$< \tilde{f}(\lambda)\, , x' > = g(\lambda\, ; x') = \sum_{n=o}^{\infty} < a_n, x' > (\lambda - \lambda_o)^n \tag{1.3.3.2}$$

para $|\lambda - \lambda_o| < \rho_o$. Por la unicidad del desarrollo de Taylor de las funciones holomorfas con valores numéricos se tiene $\beta_n = < a_n, x' >$ para $n \in \mathbb{N}$, es decir la serie *(1.3.3.2)* converge para $|\lambda - \lambda_o| < \rho$. En particular, si $0 < r < \rho$, la sucesión $(r^n \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es débilmente acotada y por lo tanto [15, Teor. 3.5.3, p. 209] acotada. Existe pues un conjunto acotado, equilibrado, convexo B tal que

$a_n(\lambda-\lambda_o)^n \in B$ para $n \in \mathbb{N}$ y $|\lambda-\lambda_o| \leqq r$. Sea σ tal que $0 < \sigma < r$, entonces

$$a_n(\lambda-\lambda_o)^n \in \left(\frac{\sigma}{r}\right)^n B$$

para $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda-\lambda_o| \leqq \sigma$ y por lo tanto

$$\sum_{n=p}^{q} a_n(\lambda-\lambda_o)^n \in \sum_{n=p}^{q}\left(\frac{\sigma}{r}\right)^n B \subset \left(\frac{\sigma}{r}\right)^p \frac{r}{r-\sigma} B$$

para $|\lambda-\lambda_o| \leqq \sigma$, $p,q \in \mathbb{N}$, $p \leqq q$.

Puesto que B es acotado, cualquiera que sea la vecindad V de 0, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=p}^{q} a_n(\lambda-\lambda_o)^n \in V$$

cada vez que $|\lambda_m-\lambda_o| \leqq \sigma$ y $q \geqq p \geqq N$. Como E es casi-completo y como todas las sumas $\sum_{n=o} a_n(\lambda-\lambda_o)^n$ están contenidas en el conjunto acotado

$$\frac{r}{r-\sigma} B ,$$

resulta que la serie $\sum_{n=o}^{\infty} a_n(\lambda-\lambda_o)^n$ converge para $|\lambda-\lambda_o| \leqq \sigma$. Pero $\sigma < \rho$ se puede tomar arbitrariamente cerca a ρ , luego la serie converge para $|\lambda-\lambda_o|<\rho$ y define en virtud de *(1.2.8)* una función holomorfa $f_\Delta : \Delta \to E$. De *(1.3.3.2)* resulta que $<f_\Delta(\lambda), x'> = g(\lambda ; x')$ para $\lambda \in \Delta$, $x' \in E'$, es decir $\Delta \in \mathfrak{L}$, lo que contradice a la definición de $\tilde{\Lambda}$. Esta contradicción muestra que $\tilde{\Lambda} = \Lambda_1$. ■

En [3] Bogdanowicz demuestra un teorema general que contiene *(1.3.1)* y *(1.3.3)* como casos particulares. Ligocka y Siciak [20] generalizan *(1.3.3)* a funciones holomorfas definidas en subconjuntos abiertos de un espacio vectorial topológico separado .

(1.3.4) Sea E un espacio localmente convexo, separado, casi completo y F un subespacio lineal de E provisto con una topología localmente convexa, se-

parada tal que la inyección canónica $j: F \hookrightarrow E$ sea continua. Sea Λ_1 un subconjunto abierto, conexo de $\mathbb{C}$, Λ un subconjunto abierto de Λ_1 y $f: \Lambda \to F$ una función holomorfa. Entonces $g = j \circ f: \Lambda \to E$ es también holomorfa *(1.1.5)*. Un fenómeno que se presentará a menudo es que g tiene prolongación analítica en una función holomorfa $\Lambda_1 \to E$ pero f no se puede extender en una función analítica $\Lambda_1 \to F$. Queremos dar aquí un ejemplo sencillo de este fenómeno.

Para $\lambda \in \mathbb{C}$ denótese por x^λ la función $x \mapsto x^\lambda$ definida sobre el intervalo $0 < x \leqq 1$ de la recta real.

(1.3.5) PROPOSICIÓN. Sea $1 \leqq p < \infty$. La función $\lambda \mapsto \mathrm{x}^\lambda$ con valores en $L^p(0,1)$ es holomorfa en el semi-plano $\Re e\, \lambda > -\frac{1}{p}$ y en ninguna región más grande.

Puesto que para $1 < q < p$ se tiene

$$L^p(0,1) \subset L^q(0,1) \subset L^1(0,1),$$

donde las inclusiones son estrictas y las inyecciones canónicas continuas, la proposición da los ejemplos requeridos. Obsérvese que $\lambda \mapsto \mathrm{x}^\lambda$, considerado como función con valores en el espacio mucho más largo $\mathcal{D}'(0,1)$ de las distribuciones sobre $]\,0,1\,[$, es holomorfa en todo el plano complejo con la excepción de una sucesión discreta de puntos.

Demostración. (a) Sea p' el exponente conjugado a p, es decir $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, y sea $\mu = \Re e\lambda$. Para cualquier $\varphi \in L^{p'}(0,1)$ se tiene

$$\int_0^1 |x^\lambda \varphi(x)|\, dx \leqq \left(\int_0^1 x^{p\mu} dx\right)^{1/p} \left(\int_0^1 |\varphi(x)|^{p'} dx\right)^{1/p'}$$

$$= \left(\frac{1}{p\mu+1}\right)^{1/p} \|\varphi\|_{p'}$$

provisto que $p\mu+1>0$, es decir $\mu>-1/p$. Por consiguiente [9, (13.8.6)] la función $\lambda\mapsto\int_0^1 x^\lambda\varphi(x)\,dx$ es holomorfa para $\mu>-1/p$.

(b) Para todo $\tau\in\mathbb{R}$ y $\varepsilon>0$ la función

$$\varphi: x\mapsto x^{-1/p'+\varepsilon-i\tau}$$

pertenece a $L^{p'}(0,1)$ ya que

$$\int_0^1 |\varphi(x)|^{p'}dx=\int_0^1 x^{-1+\varepsilon p'}dx=\frac{1}{\varepsilon p'}x^{\varepsilon p'}\Big|_0^1=\frac{1}{\varepsilon p'}\,.$$

Por otra parte

$$\int_0^1 x^\lambda x^{-1/p'+\varepsilon-i\tau}dx=\frac{1}{\lambda+1/p+\varepsilon-i\tau}\,,$$

es decir la función $\lambda\mapsto\langle x^\lambda,\varphi\rangle$ tiene una singularidad en el punto $\lambda=-\frac{1}{p}-\varepsilon+i\tau$. (Para $p=1$ se puede tomar $\varphi(x)=x^{-i\tau}$.) ■

1.4. *Puntos singulares*

(1.4.1) PROPOSICIÓN. *Sea F un espacio localmente convexo, separado, tonelado y $E=F'$ su dual provisto con la topología fuerte $\beta(E,F)$. Sea Λ un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$ y λ_o un punto de Λ. Supóngase que la función $\lambda\mapsto f(\lambda)$ con valores en E es holomorfa en $\Lambda-\{\lambda_o\}$ y que $\lim_{\lambda\to\lambda_o}(\lambda-\lambda_o)f(\lambda)=0$. Entonces la definición de f se puede extender a todo el conjunto Λ de manera que la función extendida sea holomorfa.*

Demostración. Si para $y\in F$ ponemos $g(\lambda;y)=\langle f(\lambda),y\rangle$, se tiene $\lim_{\lambda\to\lambda_o}(\lambda-\lambda_o)g(\lambda;y)=0$ y por lo tanto [1, Cap. III, Sec. 3.1, Teor. 7, p. 100] la función $\lambda\mapsto g(\lambda;y)$ tiene una extensión holomorfa a todo Λ. Puesto que

$g(\lambda_o ; y) = \lim_{\lambda \to \lambda_o} g(\lambda ; y) = \lim_{\lambda \to \lambda_o} \langle f(\lambda), y \rangle$ para cada $y \in F$, por el teorema de Banach-Steinhaus [15, Corol. de la Prop. 3.6.5, p. 216] existe una forma lineal $f(\lambda_o) \in F' = E$ tal que $g(\lambda_o ; y) = \langle f(\lambda_o), y \rangle$ para todo $y \in F$. La función $\lambda \mapsto \langle f(\lambda), y \rangle$ es ahora holomorfa en Λ cualquiera que sea $y \in F$, luego de *(1.2.11)* resulta que $\lambda \mapsto f(\lambda)$ es holomorfa en Λ. ■

(1.4.2) Sea E el dual fuerte de un espacio localmente convexo, separado, tonelado, como en *(1.4.1)* y sea $\lambda \mapsto f(\lambda)$ una función con valores en E que es holomorfa en $\Lambda - \{\lambda_o\}$. Supongamos que existe un número entero $m \geqq 0$ tal que $\lim_{\lambda \to \lambda_o} (\lambda - \lambda_o)^{m+1} f(\lambda) = 0$. Entonces $\lambda \mapsto (\lambda - \lambda_o)^m f(\lambda)$ se puede extender en una función holomorfa en todo el conjunto Λ *(1.4.1)* y tiene el desarrollo

$$(\lambda - \lambda_o)^m f(\lambda) = b_m + b_{m-1}(\lambda - \lambda_o) + \cdots + b_1 (\lambda - \lambda_o)^{m-1} + h(\lambda)(\lambda - \lambda_o)^m ,$$

donde h es holomorfa en algún disco $|\lambda - \lambda_o| < \rho$. Así obtenemos

$$f(\lambda) = \frac{b_m}{(\lambda - \lambda_o)^m} + \frac{b_{m-1}}{(\lambda - \lambda_o)^{m-1}} + \cdots + \frac{b_1}{\lambda - \lambda_o} + h(\lambda)$$

para $\lambda \neq \lambda_o$. Si $b_j \neq 0$ para algún $j \geqq 1$, se dice que f tiene *polo* en λ_o y el número entero más grande j para el cual $b_j \neq 0$ se llama el *orden* del polo. Un polo de orden 1 también se llama polo *simple*. La expresión

(1.4.2.1)
$$\sum_{j=1}^{m} \frac{b_1}{(\lambda - \lambda_o)^j}$$

y la función holomorfa h están determinadas de manera única por f. Llamamos *(1.4.2.1)* la *parte singular* y h la *parte regular* de f en λ_o. El coeficiente b_1 E se llama el *residuo* de f en λ_o. A veces será cómodo de considerar un punto en el cual f es holomorfa como un polo de orden cero; en tal punto f coincide con su parte regular y su parte singular es cero. Se dice que una función es *meromorfa* en una región $\Lambda \subset \mathbb{C}$ si es holomorfa en Λ con la excepción de un conjunto discreto de puntos en los cuales tiene polos.

2. *Funciones holomorfas con valores distribuciones*

2.1. *Prolongación analítica de las operaciones fundamentales.*

(2.1.1) Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, Λ una región en $\mathbb{C}$ y sea $\lambda \mapsto T(\lambda)$ una función holomorfa definida en Λ y tomando sus valores en el espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ de las distribuciones sobre Ω. Si Λ_1 es una región en $\mathbb{C}$ que contiene Λ, y si para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ la función holomorfa con valores numéricos $\lambda \mapsto \langle T(\lambda), \varphi \rangle$ tiene una prolongación analítica en Λ_1, entonces $\lambda \mapsto T(\lambda)$ se puede extender en una función holomorfa con valores en $\mathcal{D}'(\Omega)$ definida en todo el conjunto Λ_1 *(1.3.1)*. Lo mismo es cierto si se consideran funciones con valores en el espacio $\mathcal{S}'$ de las funciones templadas [15, p. 411], o en el espacio $\mathcal{E}'(\Omega)$ de las distribuciones con soporte compacto [15, Prop. 4.2.3, p. 320], o en el espacio $\mathcal{O}'_C$ de las distribuciones rápidamente decrecientes [15, pp. 419-420], ya que todos estos espacios son reflexivos *(1.3.2)*. La afirmación análoga será todavía verdadera si consideramos funciones holomorfas $\lambda \mapsto T(\lambda)$ con valores en el espacio $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ de las distribuciones de orden $\leq m$ [15, Def. 4.4.1, p. 338], o en el espacio $\mathcal{E}'^m(\Omega)$ de las distribuciones de orden $\leq m$ con soporte compacto [15, Prop. 4.4.3, p. 340], o en el espacio $\mathcal{S}'_k$ [Prop. 4. 11.6, p. 419], ya que los espacios $\mathcal{D}^m(\Omega)$, $\mathcal{E}^m(\Omega)$ y $\mathcal{S}_k$ son tonelados.

(2.1.2) PROPOSICION. *Sea $\lambda \mapsto T(\lambda)$ una función holomorfa definida en Λ con valores en $\mathcal{D}'(\Omega)$ y supóngase que para todo $\lambda \in \Lambda$ el soporte de $T(\lambda)$ está contenido en el subconjunto cerrado A de Ω. Si $\lambda \mapsto T(\lambda)$ tiene una prolongación analítica a una región $\Lambda_1 \supset \Lambda$, entonces $Supp\, T(\lambda) \subset A$ para $\lambda \in \Lambda_1$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $Supp\, \varphi \cap A = \phi$. La función holomorfa $\lambda \mapsto < T(\lambda), \varphi >$ definida en Λ_1 se anula para $\lambda \in \Lambda$, luego también para $\lambda \in \Lambda_1$. ■

La proposición muestra que al prolongar analíticamente una función con valores distribuciones, el soporte no aumenta. Veremos más tarde *(2.2.7)* que en puntos aislados el soporte puede disminuir considerablemente.

(2.1.3) Sea $\lambda \mapsto T(\lambda)$ una función holomorfa definida en Λ con valores en $\mathcal{E}'(\Omega)$. Supongamos que considerado como función con valores en $\mathcal{D}'(\Omega)$ (1.1.5) la función tiene una prolongación analítica a una región $\Lambda_1 \supset \Lambda$. Entonces $T(\lambda) \in \mathcal{E}'(\Omega)$ para todo $\lambda \in \Lambda_1$ y por consiguiente (1.2.6) la función $\lambda \mapsto T(\lambda)$ con valores en $\mathcal{E}'(\Omega)$ es holomorfa en Λ_1.

Demostración. Sea Λ_o un subconjunto abierto de Λ tal que $\overline{\Lambda}_o$ sea compacto y contenido en Λ. Puesto que la función $\lambda \mapsto T(\lambda)$ es continua, el conjunto

$$T(\overline{\Lambda}_o) = \{ T(\lambda) \ ; \ \lambda \in \overline{\Lambda}_o \}$$

es compacto y por lo tanto acotado en $\mathcal{E}'(\Omega)$. Con más razón $T(\Lambda_o) = \{ T(\lambda) \ ; \ \lambda \in \Lambda_o \}$ es acotado. Existe pues [15, Teor. 4.2.1, p.321] un subconjunto compacto K de Ω tal que $Supp\, T(\lambda) \subset K$ para todo $\lambda \in \Lambda_o$. Pero entonces *(2.1.2)* muestra que $Supp\, T(\lambda) \subset K$ para todo $\lambda \in \Lambda_1$. ■

(2.1.4) PROPOSICIÓN. Sea Ω un subconjunto abierto y $0 \leqq m \leqq \infty$. Supóngase que $\lambda \mapsto T(\lambda)$ es una función holomorfa definida en Λ con valores en $\mathcal{D}'^m(\Omega)$. Sea $p \in \mathbb{N}^n$ un multi-índice fijo.

(i) La función $\lambda \mapsto \partial^p T(\lambda) = S(\lambda)$ con valores en $\mathcal{D}'^{\,m+|p|}(\Omega)$ [15, p. 341] *es holomorfa.*

(ii) Si $\lambda \mapsto T(\lambda)$ tiene prolongación analítica a $\Lambda_1 \supset \Lambda$, entonces $\lambda \mapsto S(\lambda)$ la tiene también y $S(\lambda) = \partial^p T(\lambda)$ para $\lambda \in \Lambda_1$.

Demostración. (i) Para $\varphi \in \mathcal{D}^{m+|p|}(\Omega)$ y $\lambda \in \Lambda$ se tiene

$$(2.1.4.1) \qquad < S(\lambda), \varphi > = (-1)^{|p|} < T(\lambda), \partial^p \varphi > .$$

Para todo $\psi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ y en particular para $\psi = \partial^p \varphi$ la función $\lambda \mapsto < T(\lambda), \psi >$ es holomorfa en Λ. Luego la función $\lambda \mapsto < S(\lambda), \varphi >$ es holomorfa en Λ para todo $\varphi \in \mathcal{D}^{m+|p|}(\Omega)$, es decir la función $\lambda \mapsto S(\lambda)$ es holomorfa *(1.2.11)*.

De *(1.1.5)* se puede deducir otra demostración si se observa que la aplicación $T \mapsto \partial^p T$ de $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ en $\mathcal{D}'^{m+|p|}(\Omega)$ es continua [15, p. 341].

(ii) Si $\lambda \mapsto T(\lambda)$ tiene prolongación analítica a Λ_1, entonces para todo $\varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ la función con valores numéricos $\lambda \mapsto < T(\lambda), \varphi >$ se puede extender en una función holomorfa definida en Λ_1. De *(2.1.4.1)* resulta que para todo $\varphi \in \mathcal{D}^{m+|p|}(\Omega)$ la función $\lambda \mapsto < S(\lambda), \varphi >$ tiene prolongación analítica a Λ_1 luego por *(1.3.1)* la función $\lambda \mapsto S(\lambda)$ se puede extender a Λ_1. Otra vez resulta de *(2.1.4.1)* que $S(\lambda) = \partial^p T(\lambda)$ para $\lambda \in \Lambda_1$. ∎

(2.1.5) PROPOSICIÓN [12, Cap. II, § 2, no. 3, p. 195, nota]. *Sea* $\lambda \mapsto T(\lambda)$ *una función holomorfa definida en* Λ *con valores en* $\mathcal{S}'$. *Para cada* $\lambda \in \Lambda$ *sea* $S(\lambda)$ *la transformada de Fourier de* $T(\lambda)$.

(i) La función $\lambda \mapsto S(\lambda)$ *definida en* Λ *con valores en* $\mathcal{S}'$ *es holomorfa.*

(ii) Si $\lambda \mapsto T(\lambda)$ *tiene prolongación analítica a* $\Lambda_1 \supset \Lambda$, *entonces* $\lambda \mapsto S(\lambda)$ *también tiene una y* $S(\lambda) = \mathcal{F}(T(\lambda))$ *para todo* $\lambda \in \Lambda_1$.

Demostración. (i) Para $\varphi \in \mathcal{S}$ y $\lambda \in \Lambda$ se tiene

$$(2.1.5.1) \qquad < S(\lambda), \varphi > = < T(\lambda), \mathcal{F}\varphi >$$

[15, Def. 4.11.2, p. 411] . Esto demuestra que $\lambda \mapsto S(\lambda)$ es holomorfa *(1.1.4)*.

Se podría también servirse de *(1.1.5)* ya que la aplicación $T \mapsto \mathcal{F}(T)$ de $\mathcal{S}'$ en $\mathcal{S}'$ es continua [15, Teor. 4.11.1, p. 416] .

(ii) Si $\lambda \mapsto T(\lambda)$ tiene prolongación analítica a Λ_1, entonces resulta de *(2.1.5.1)* que para todo $\varphi \in \mathcal{S}$ la función holomorfa con valores numéricos $\lambda \mapsto \langle S(\lambda), \varphi \rangle$ se puede extender a Λ_1 y por lo tanto $\lambda \mapsto S(\lambda)$ se puede extender en una función holomorfa en Λ_1 *(1.3.1)*. Puesto que *(2.1.5.1)* es válido para $\varphi \in \mathcal{S}$ y $\lambda \in \Lambda$, es también válido para $\lambda \in \Lambda_1$, es decir $S(\lambda) = \mathcal{F}(T(\lambda))$ si $\lambda \in \Lambda_1$. ■

(2.1.6) PROPOSICIÓN. Sea m un número entero positivo o el símbolo ∞. Sea $\lambda \mapsto T(\lambda)$ una función holomorfa definida en Λ con valores en $\mathcal{D}'^m(\Omega)$. Además sea $\lambda \mapsto \alpha_\lambda$ una función holomorfa en Λ con valores en $\mathcal{E}^m(\Omega)$.

(i) La función $\lambda \mapsto S(\lambda) = \alpha_\lambda T(\lambda)$ con valores en $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ [15, p. 348] *es holomorfa en Λ.*

(ii) Si $\lambda \mapsto \alpha_\lambda$ y $\lambda \mapsto T(\lambda)$ tienen ambos prolongación analítica a $\Lambda_1 \supset \Lambda$, entonces $\lambda \mapsto S(\lambda)$ también tiene y para $\lambda \in \Lambda_1$ es cierto que $S(\lambda) = \alpha_\lambda T(\lambda)$.

Demostración. (i) Cualquiera que sea $\varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$, la aplicación lineal $\alpha \mapsto \alpha \cdot \varphi$ de $\mathcal{E}^m(\Omega)$ en $\mathcal{D}^m(\Omega)$ es continua [15, Prop. 4.7.4, p. 360], luego la aplicación $\lambda \mapsto \alpha_\lambda \cdot \varphi$ de Λ en $\mathcal{D}^m(\Omega)$ es holomorfa *(1.1.5)*. Para todo $\varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ la función con valores numéricos

$$\lambda \mapsto \langle S(\lambda), \varphi \rangle = \langle T(\lambda), \alpha_\lambda \cdot \varphi \rangle \tag{2.1.6.1}$$

es holomorfa *(1.1.6)* y por lo tanto la función $\lambda \mapsto S(\lambda)$ es holomorfa *(1.2.11)*.

(ii) Si $\lambda \mapsto \alpha_\lambda$ tiene prolongación analítica a Λ_1, entonces para todo $\varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$ la función $\lambda \mapsto \alpha_\lambda \cdot \varphi$ con valores en $\mathcal{D}^m(\Omega)$ tiene prolongación analítica a Λ_1 *(1.1.5)*. Si además $\lambda \mapsto T(\lambda)$ tiene prolongación analítica a Λ_1, entonces $\lambda \mapsto \langle T(\lambda), \alpha_\lambda \cdot \varphi \rangle$ tiene extensión holomorfa en el conjunto Λ_1 *(1.1.6)*. De *(2.1.6.1)* resulta que en este caso $\lambda \mapsto S(\lambda)$ tiene prolongación analítica a Λ_1 *(1.3.1)* y que $S(\lambda) = \alpha_\lambda \cdot T(\lambda)$ para $\lambda \in \Lambda_1$. ■

(2.1.7) El resultado en *(2.1.6)* es válido si reemplazamos $\mathcal{D}'^{m}(\Omega)$ por $\mathcal{S}'$ y $\mathcal{E}^{m}(\Omega)$ por $\mathcal{O}_M$. Se debe utilizar el hecho de que, para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}$, la aplicación lineal $\alpha \mapsto \alpha \cdot \varphi$ de $\mathcal{O}_M$ en $\mathcal{S}$ es continua [15, Ejerc. 4. 11.4, p. 424], los otros detalles de la demostración no cambian.

(2.1.8) Sea Ξ un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^k$ y H un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^l$. Los puntos de Ξ se denotarán por x y los puntos de H por y, de manera que los puntos de $\Xi \times \mathrm{H} \subset \mathbb{R}^{k+l}$ serán denotados por (x,y). Las letras s y t notarán o bien un número entero positivo o bien el símbolo ∞. Si $S \in \mathcal{D}'^{s}(\Xi)$ y $\chi \in \mathcal{D}^{s+t}(\Xi \times \mathrm{H})$, entonces para todo $y \in \mathrm{H}$ la función $\chi(\cdot\,, y) : x \mapsto \chi(x, y)$ pertenece a $\mathcal{D}^{s}(\Xi)$ y en vez de $< S, \chi(\cdot\,, y) >$ escribiremos también $\int_{\Xi} S(x)\, \chi(x, y)\, dx$; la función

$$(2.1.8.1) \qquad\qquad y \mapsto \int_{\Xi} S(x)\, \chi(x, y)\, dx$$

se denota por $\int_{\Xi} S(x)\, \chi(x, \cdot)\, dx$. Sea K un subconjunto compacto de Ξ y L un subconjunto compacto de H . Sabemos [15, Lemma 4.8.2, p. 370] que si $\chi \in \mathcal{D}^{s+t}(K \times L)$ y $S \in \mathcal{D}'^{s}(\Xi)$, entonces *(2.1.8.1)* pertenece a $\mathcal{D}^{t}(L)$.

(2.1.8.2) LEMA . Si $\chi \in \mathcal{D}^{s+t}(K \times L)$, *entonces la aplicación lineal*

$$S \mapsto \int_{\Xi} S(x)\, \chi(x, \cdot)\, dx$$

de $\mathcal{D}'^{s}(\Xi)$ *en* $\mathcal{D}^{t}(L)$ *es continua .*

Demostración. Sea

$$V = \{\, \psi \,;\, |\, \partial^{q} \psi(y) \,| \leqq \varepsilon,\ |q| \leqq b \,\}$$

una vecindad de 0 en $\mathcal{D}^{t}(L)$, donde $\varepsilon \geqq 0$, $b \in \mathbb{N}$ y en el caso de que t sea finito tomemos $b = t$. El conjunto B de funciones

$$(\partial_y^q \chi)(\cdot, y) : x \mapsto (\partial_y^q \chi)(x, y),$$

donde y recorre H y $q \in \mathbb{N}^n$ recorre $|q| \leq b$, es obviamente acotado en $\mathfrak{D}^{s}(\Xi)$ y por lo tanto $U = \varepsilon B^\circ$ es una vecindad de 0 en $\mathfrak{D}'^{s}(\Xi)$. Se tiene

$$\partial_y^q \int_\Xi S(x)\, \chi(x, \cdot)\, dx = \int_\Xi S(x)\, (\partial_y^q \chi)(x, \cdot)\, dx$$

[15, Cap. 4, § 8, fórmula (4), p. 371], luego $S \in U$ implica

$$\left| \partial_y^q \int_\Xi S(x)\, \chi(x, y)\, dx \right| \leq \varepsilon$$

para $y \in$ H y $|q| \leq b$, es decir $\int_\Xi S(x)\, \chi(x, \cdot)\, dx \in V$. ■

(2.1.9) PROPOSICIÓN. Sea $\lambda \mapsto S(\lambda)$ una función holomorfa definida en Λ con valores en $\mathfrak{D}'^{s}(\Xi)$ y $\lambda \mapsto T(\lambda)$ una función holomorfa definida en Λ con valores en $\mathfrak{D}'^{t}(\mathrm{H})$.

(i) La función $\lambda \mapsto R(\lambda) = S(\lambda) \otimes T(\lambda)$ es holomorfa en Λ con valores en $\mathfrak{D}'^{s+t}(\Xi \times \mathrm{H})$.

(ii) Si $\lambda \mapsto S(\lambda)$ y $\lambda \mapsto T(\lambda)$ tienen prolongación analítica a $\Lambda_1 \supset \Lambda$, entonces también $\lambda \mapsto R(\lambda)$ se puede extender en una función holomorfa definida en Λ_1 y se tiene $R(\lambda) = S(\lambda) \otimes T(\lambda)$ para $\lambda \in \Lambda_1$.

Demostración. (i) Sea $\chi \in \mathfrak{D}^{s+t}(\Xi \times \mathrm{H})$ y escribamos ψ_λ en vez de $\int_\Xi S(\lambda)(x)\, \chi(x, \cdot)\, dx$. Puesto que $\lambda \mapsto S(\lambda)$ es holomorfa por hipótesis, resulta de *(1.1.5)* y de *(2.1.8.2)* que la aplicación $\lambda \mapsto \psi_\lambda$ de Λ en $\mathfrak{D}^{t}(\mathrm{H})$ es holomorfa. Pero entonces $\lambda \mapsto \langle T(\lambda), \psi_\lambda \rangle$ es holomorfa *(1.1.6)* y puesto que

$$(2.1.9.1) \qquad < T(\lambda)\ ,\ \psi_\lambda > = < S(\lambda) \otimes T(\lambda)\ ,\ \chi >$$

[15, Prop. 4.8.2, p. 373], la función $\lambda \mapsto S(\lambda) \otimes T(\lambda)$ es holomorfa *(1.2.11).*

(ii) Si $\lambda \mapsto S(\lambda)$ tiene prolongación analítica a Λ_1, entonces para todo $\chi \in \mathfrak{D}^{s+t}(\Xi \times H)$ la función $\lambda \mapsto \psi_\lambda$ se puede extender en una función holomorfa $\Lambda_1 \mapsto \mathfrak{D}^t(H)$ en virtud de *(1.1.5)* y *(2.1.8.2).* Si además $\lambda \mapsto T(\lambda)$ tiene prolongación analítica a Λ_1, entonces $\lambda \mapsto < T(\lambda), \psi_\lambda >$ tiene extensión holomorfa a Λ_1 *(1.1.6)*. De *(2.1.9.1)* se sigue que $\lambda \mapsto R(\lambda)$ tiene prolongación analítica a Λ_1 *(1.3.1)* y que $R(\lambda) = S(\lambda) \otimes T(\lambda)$ para $\lambda \in \Lambda_1$. ■

(2.1.10) PROPOSICIÓN. Sean s y t números enteros positivos o el símbolo ∞. *Sea* $\lambda \mapsto S(\lambda)$ *una función holomorfa definida en* Λ *con valores en* $\mathfrak{D}'^s$ *y* $\lambda \mapsto T(\lambda)$ *una función holomorfa definida en con valores en* $\mathfrak{D}'^t$. *Supongamos que para todo* $\lambda \in \Lambda$ *se tiene* $Supp\, S(\lambda) \subset A$, $Supp\, T(\lambda) \subset B$, *donde A y B son dos subconjuntos cerrados de* $\mathbb{R}^n$ *que satisfacen a la condición :*

(Σ *) Cualquiera que sea el subconjunto compacto K de* $\mathbb{R}^n$, *el conjunto* $A \cap (K - B)$ *es compacto en* $\mathbb{R}^n$ [15, p. 383]

(i) La función $\lambda \mapsto R(\lambda) = S(\lambda) * T(\lambda)$ *es holomorfa en* Λ *con valores en* $\mathfrak{D}'^{s+t}$.

(ii) Si $\lambda \mapsto S(\lambda)$ *y* $\lambda \mapsto T(\lambda)$ *tienen prolongación analítica a* $\Lambda_1 \supset \Lambda$, *entonces* $\lambda \mapsto R(\lambda)$ *también se puede extender en una función holomorfa con dominio de definición* Λ_1 *y para todo* $\lambda \in \Lambda_1$ *se tiene* $R(\lambda) = S(\lambda) * T(\lambda)$.

Demostración. (i) Sea $\varphi \in \mathfrak{D}^{s+t}$, $K = Supp\ \varphi$ y $K^\Delta = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^{2n} ; x+y \in K \}$ [15, p. 383]. En virtud de la condición (Σ) el subconjunto $K_o = (A \times B) \cap K^\Delta$ de $\mathbb{R}^{2n}$ es compacto. Escójase una función $\alpha \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{2n})$ tal que $\alpha(x,y) = 1$ en una vecindad de K_o. Si φ^Δ nota la función $(x,y) \mapsto \varphi(x+y)$, entonces se tiene

$$(2.1.10.1) \qquad < S(\lambda) * T(\lambda) , \varphi > = < S(\lambda) \otimes T(\lambda) , \alpha \varphi^{\Delta} >$$

[15, Prop. 4.9.4, p. 386] para $\lambda \in \Lambda$, luego por *(2.1.9)* la función $\lambda \mapsto < R(\lambda), \varphi>$ es holomorfa. Se sigue que $\lambda \mapsto R(\lambda)$ es holomorfa *(1.2.11)*.

(ii) Si $\lambda \mapsto S(\lambda)$ y $\lambda \mapsto T(\lambda)$ tienen prolongación analítica a Λ_1, entonces $Supp\, S(\lambda) \subset A$ y $Supp\, T(\lambda) \subset B$ para $\lambda \in \Lambda_1$ *(2.1.2)*, y por lo tanto $S(\lambda) * T(\lambda)$ existe para $\lambda \in \Lambda_1$. En virtud de *(2.1.9)* y de *(2.1.10.1)*, para todo $\varphi \in \mathcal{D}^{s+t}$ la función $\lambda \mapsto < R(\lambda) , \varphi >$ tiene prolongación analítica a Λ_1. Se sigue *(1.3.1)* que $\lambda \mapsto R(\lambda)$ tiene prolongación analítica a Λ_1 y utilizando *(2.1.10.1)* otra vez se ve que $R(\lambda) = S(\lambda) * T(\lambda)$ para $\lambda \in \Lambda_1$. ■

(2.1.11) PROPOSICIÓN. Sea $\lambda \mapsto S(\lambda)$ *una función holomorfa definida en* Λ *con valores en* $\mathcal{E}'^{s}$ *y* $\lambda \mapsto T(\lambda)$ *una función holomorfa definida en* Λ *con valores en* $\mathcal{D}'^{t}$.

(i) La función $\lambda \mapsto R(\lambda) = S(\lambda) * T(\lambda)$ *es holomorfa en* Λ *con valores en* $\mathcal{D}'^{s+t}$.

(ii) Si $\lambda \mapsto S(\lambda)$ *y* $\lambda \mapsto T(\lambda)$ *tienen prolongación analítica a* $\Lambda_1 \supset \Lambda$, *entonces* $\lambda \mapsto R(\lambda)$ *también tiene prolongación analítica a* Λ_1 *y* $R(\lambda) = S(\lambda) * T(\lambda)$ *para* $\lambda \in \Lambda_1$.

Demostración. Se ve como en la demostración de *(2.1.3)* que existe un subconjunto compacto A de $\mathbb{R}^n$ tal que $Supp\, S(\lambda) \subset A$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Entonces A y $B = \mathbb{R}^n$ satisfacen a la condición (Σ) y la proposición resulta de *(2.1.10)*.■

(2.1.12) El resultado *(2.1.11)* queda cierto si reemplazamos $\mathcal{E}'^{s}$ por $\mathcal{O}'_C$ y los espacios $\mathcal{D}'^{t}$ y $\mathcal{D}'^{t+s}$ por $\mathcal{S}'$. Esto se sigue inmediatamente de *(2.1.5)* y *(2.1.7)* [15, Teor. 4.11.3, p. 424].

2.2. Partes finitas y seudofunciones.

(2.2.1) Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, Λ una región en $\mathbb{C}$ y Λ_o un subconjunto discreto de Λ. Sea $T: \lambda \mapsto T(\lambda)$ una función holomorfa definida en $\Lambda \cap \complement \Lambda_o$ con valores en $\mathcal{D}'(\Omega)$ tal que T tiene polo en cada punto de Λ_o *(1.4.2)*. Para cada $\lambda_o \in \Lambda$ llamamos *parte finita* de T en λ_o, y denotamos por $\underset{\lambda=\lambda_o}{Pf}\, T(\lambda)$ o $Pf\, T(\lambda_o)$, el valor en λ_o de la parte regular de T en λ_o *(1.4.2)*.

Si T es holomorfa en $\lambda_o \in \Lambda$, entonces $Pf\ T(\lambda_o) = T(\lambda_o)$. Si T tiene polo de orden k en λ_o, entonces existe $\rho > 0$ tal que para $0 < |\lambda - \lambda_o| < \rho$ se tiene

$$(2.2.1.1) \qquad T(\lambda) = \frac{S_k}{(\lambda-\lambda_o)^k} + \frac{S_{k-1}}{(\lambda-\lambda_o)^{k-1}} + \cdots + \frac{S_1}{\lambda-\lambda_o} + S(\lambda),$$

donde $S_j \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $1 \leqq j \leqq k$, la función $\lambda \mapsto S(\lambda)$ es holomorfa para $|\lambda-\lambda_o| < \rho$ y luego

$$Pf\, T(\lambda_o) = S(\lambda_o) = \lim_{\lambda \to \lambda_o} \left(T(\lambda) - \sum_{j=1}^{k} \frac{S_j}{(\lambda-\lambda_o)^j} \right).$$

(2.2.2) Sean Λ_1 una región en $\mathbb{C}$, Λ un subconjunto abierto de Λ_1 y $T: \Lambda_1 \to \mathcal{D}'(\Omega)$ una función holomorfa. Supóngase que para todo $\lambda \in \Lambda$ existe una función localmente integrable f_λ que define $T(\lambda)$, es decir tal que

$$(2.2.2.1) \qquad \langle T(\lambda), \varphi \rangle = \int_\Omega f_\lambda(x)\, \varphi(x)\, dx$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Entonces se dice que T es una *seudofunción* [28, Cap. II, § 2, Ejemplo 2, p. 38] y con frecuencia se escribe f_λ en vez de $T(\lambda)$ aun cuando λ no pertenece a Λ.

(2.2.3) Claro está que en las consideraciones anteriores el espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ se puede reemplazar por cualquiera de los espacios $\mathcal{D}'^m(\Omega)$ $(0 \leqq m < \infty)$ $\mathcal{S}'^m$, $\mathcal{E}'^m(\Omega)$ $(0 \leqq m \leqq \infty)$ o $\mathcal{O}'_C$.

(2.2.4) El concepto que ocurre clásicamente es el de *parte finita de una integral divergente* y no de una función holomorfa con valores distribuciones. La relación entre los dos conceptos fue ilustrada con el ejemplo dado en la introducción y se puede explicar ahora precisamente. Sea $T : \lambda \mapsto T(\lambda)$ una seudofunción meromorfa definida en la región $\Lambda_1 \subset \mathbb{C}$ y supóngase que para $\lambda \in \Lambda \subset \Lambda_1$ la distribución $T(\lambda)$ esté definida por la función localmente integrable f_λ mediante *(2.2.2.1)*. Entonces para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\lambda \in \Lambda_1$ la parte finita de la integral $\int_\Omega f_\lambda(x)\ \varphi(x)\ dx$ es por definición el valor $< Pf\ T(\lambda)\ ,\ \varphi >$; esta definición se encuentra en el libro de Dieudonné [9, Cap. 17, Sec. 9, p. 261]. En particular, en cada punto λ en el cual T es holomorfa, la parte finita de la integral se obtiene por prolongación analítica a partir de la función $\lambda \mapsto \int_\Omega f_\lambda(x)\ \varphi(x)\ dx$, holomorfa en Λ.

Cuando $T(\lambda)$ tiene propiedades de regularidad más fuertes [p. ej. pertenece a $\mathcal{D}'^m(\Omega)$] entonces $Pf \int_\Omega f_\lambda(x)\ \varphi(x)\ dx$ tiene sentido para funciones φ más generales [p. ej. $\varphi \in \mathcal{D}^m(\Omega)$].

(2.2.5) Ejemplo. Para $\mu = \mathcal{R}e\ \lambda > -1$ la distribución x_+^λ [12, Cap. I, § 3, no. 2, p. 66], denotada también por $Pf.(x^\lambda)_{x>0}$ [28, Cap. II, § 2, p. 41], se define mediante la fórmula

$$(2.2.5.1) \qquad < x_+^\lambda\ , \varphi > \; = \int_0^\infty x^\lambda\ \varphi(x)\ dx$$

cualquiera que sea $\varphi \in \mathcal{S}^0(\mathbb{R})$. La derivada de *(2.2.5.1)* con respecto a λ es

$$\int_0^\infty x^\lambda \log x\ \varphi(x)\ dx$$

Ahora bien, para todo $k \geqq 0$ existe $C_k > 0$ tal que $(1+x^2)^k |\varphi(x)| \leqq C_k$ cualquiera que sea $-\infty < x < \infty$, luego

$$\int_0^\infty |x^\lambda \log x\, \varphi(x)|\,dx \leqq C_k \int_0^\infty \frac{x^\mu |\log x|}{(1+x^2)^k}\,dx \tag{2.2.5.2}$$

y esta última integral converge para $-1 < \mu < k$. Puesto que k es arbitrario, se ve que la función $\lambda \mapsto x_+^\lambda$ con valores en $\mathcal{S}'^{o}$ es holomorfa en el semiplano $\mathcal{R}e\,\lambda > -1$.

Sea ahora m un número entero positivo o el símbolo ∞. La función $\lambda \mapsto x_+^\lambda$ con valores en $\mathcal{S}'^{m} \supset \mathcal{S}'^{o}$ tiene prolongación analítica al semiplano $\mathcal{R}e\,\lambda > -m-1$ con la excepción de los puntos $\lambda = -n$ $(n \in \mathbb{N}\,,\ 1 \leqq n < m+1)$ que son polos simples de la función. En efecto sea $n = m$ si m es finito y un entero positivo arbitrario si $m = \infty$. Por la fórmula de Taylor para cada $\varphi \in \mathcal{S}^m$ se tiene

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\frac{x}{1!} + \cdots + \varphi^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \psi_n(x)\cdot x^n$$

para $0 \leqq x \leqq 1$, donde ψ_n es una función continua. Luego

$$\int_0^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^{\lambda+n}\psi_n(x)\,dx + \int_1^\infty x^\lambda \varphi(x)\,dx + \sum_{j=o}^{n-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}\,\frac{1}{\lambda+j+1}\,. \tag{2.2.5.3}$$

Se ve con la ayuda de una desigualdad semejante a (2.2.5.2) que la primera integral en el segundo miembro es función holomorfa de λ para $\mathcal{R}e\,\lambda > -n-1$; la segunda integral es función holomorfa de λ en todo $\mathbb{C}$, mientras que la suma es función holomorfa de λ en $\mathbb{C}$ con la excepción de polos simples en los puntos

$\lambda = -1, -2, \ldots, -n.$

Puesto que $\varphi^{(j)}(0) = (-1)^j < \partial^j \delta , \varphi >$ **, se ve de** *(2.2.5.3)* **que el residuo de** $\lambda \mapsto x_+^\lambda$ **en el punto** $\lambda = -n$ **es**

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \partial^{n-1} \delta \tag{2.2.5.4}$$

Podemos dar expresiones explícitas de $Pf\, x_+^\lambda$ **. En primer lugar sea** $-n-1 < \Re e\, \lambda \leqq -n$ **y** $\lambda \neq -n$ **. Podemos escribir** *(2.2.5.3)* **en la forma**

$$< Pf\, x_+^\lambda , \varphi > =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to o} \left(\int_\varepsilon^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx - \sum_{j=o}^{n-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} \frac{x^{\lambda+j+1}}{\lambda+j+1} \Bigg|_\varepsilon^1 \right) + \sum_{j=o}^{n-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} \frac{1}{\lambda+j+1} .$$

Ahora la suma correspondiente a $x = 1$ **en el paréntesis se anula con la última suma, y así se obtiene**

$$< Pf\, x_+^\lambda , \varphi > = \lim_{\varepsilon \to o} \left(\int_\varepsilon^\infty x^\lambda \varphi(x)\, dx + \sum_{j=o}^{n-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} \frac{\varepsilon^{\lambda+j+1}}{\lambda+j+1} \right). \tag{2.2.5.5}$$

Si por otra parte $\lambda = -n,$ **de** *(2.2.5.3)* **se obtiene**

$$< Pf\, x_+^{-n} , \varphi > = \lim_{\lambda \to -n} \left< Pf\, x_+^\lambda - \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\delta^{(n-1)}}{\lambda+n} , \varphi \right>$$

$$= \lim_{\varepsilon \to o} \left(\int_\varepsilon^\infty x^{-n} \varphi(x)\, dx - \sum_{j=o}^{n-2} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} \frac{x^{-n+j+1}}{-n+j+1} \Bigg|_\varepsilon^1 - \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)} \log x \Bigg|_\varepsilon^1 \right)$$

$$+ \sum_{j=o}^{n-2} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} \frac{1}{-n+j+1} .$$

La suma correspondiente a $x = 1$ **en el paréntesis se cancela con la última suma**

mientras que el término logarítmico correspondiente a $x=1$ desaparece debido a la relación milagrosa $log\ 1 = 0$. Así queda

$$< Pf\ x_+^{-n},\ \varphi >$$

$$(2.2.5.6)\qquad = \lim_{\varepsilon\to o}\left(\int_\varepsilon^\infty x^{-n}\varphi(x)\,dx + \sum_{j=o}^{n-2}\frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}\ \frac{\varepsilon^{-n+j+1}}{-n+j+1} + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)}\ log\ \varepsilon\right).$$

Schwartz [28, fórmula (II, 2 ; 26), p. 42] y Lavoine [19, Cap. I, § II, pp. 15-21] definen $Pf\ x_+^\lambda$ mediante las fórmulas *(2.2.5.5)* y *(2.2.5.6)*. La distribución $Pf\ x_+^\lambda$ coincide también con la "regularización canónica" de x_+^λ de Guelfand y Shilov [12, Cap. I, § 3, no. 7, p. 96].

(2.2.6) PROPOSICIÓN. Sea $T:\lambda\to T(\lambda)$ *una función holomorfa definida en* $\Lambda-\{\lambda_o\}$ *con valores en* $\mathfrak{D}'(\Omega)$ *y sea* λ_o *un polo de* T*. Supongamos que existe un subconjunto cerrado* A *de* Ω *tal que* $Supp\ T(\lambda)\subset A$ *para* $\lambda\in\Lambda-\{\lambda_o\}$ *. Entonces* $Supp\ Pf\ T(\lambda_o)\subset A$ *.*

Demostración. Sea $\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$ tal que $Supp\ \varphi\cap A=\phi$. Existe $\rho>0$ tal que para $0<|\lambda-\lambda_o|<\rho$ se tiene la representación *(2.2.1.1)* y por lo tanto

$$(\lambda-\lambda_o)^k< T(\lambda),\ \varphi> = P = < S_k,\varphi> + (\lambda-\lambda_o)< S_{k-1},\varphi> + \cdots + (\lambda-\lambda_o)^{k-1}< S_1,\varphi> +$$
$$+(\lambda-\lambda_o)^k< S(\lambda),\ \varphi> .$$

Dejando λ converger hacia λ_o se ve que $< S_k,\varphi> = 0$. Ahora se tiene

$$(\lambda-\lambda_o)^{k-1}< T(\lambda),\varphi> = 0 = < S_{k-1},\varphi> + (\lambda-\lambda_o)< S_{k-2},\varphi> + \cdots$$
$$+ (\lambda-\lambda_o)^{k-2}< S_1,\varphi> + (\lambda-\lambda_o)^{k-1}< S(\lambda),\ \varphi>$$

Dejando otra vez $\lambda\to\lambda_o$ se ve que $< S_{k-1},\varphi> = 0$. Siguiendo en tal manera vemos que $< S_j,\varphi> = 0$ para $1\leq j\leq k$. Finalmente $< S(\lambda),\ \varphi> = < T(\lambda),\ \varphi> = 0$

para $0 < |\lambda - \lambda_o| < \rho$ y por lo tanto

$$< Pf\ T(\lambda_o) \,.\, \varphi > = < S(\lambda_o), \varphi > = \lim_{\lambda \to \lambda_o} < S(\lambda) \,,\, \varphi > = 0 \,. \qquad \blacksquare$$

(2.2.7) La situación siguiente se presenta a menudo en aplicaciones. Sea $T : \lambda \mapsto T(\lambda) \subset \mathfrak{D}'(\Omega)$ una función holomorfa en $\Lambda - \{\lambda_o\}$ con polo en λ_o. Supóngase que existe un subconjunto cerrado A de Ω tal que cualquiera que sea la vecindad cerrada B de A se tiene una descomposición $T = T_1 + T_2$ en dos funciones holomorfas en $\Lambda - \{\lambda_o\}$, donde $Supp\ T_1(\lambda) \subset B$ para $\lambda \in \Lambda - \{\lambda_o\}$ y T_2 es holomorfa aún en λ_o. Bajo estas condiciones los soportes de las distribuciones S_j $(1 \leqq j \leqq k)$ que figuran en *(2.2.1.1)* están contenidos en A. En efecto, sea $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ tal que $Supp\ \varphi \cap A = \phi$. Puesto que $Supp\ \varphi$ es compacto, existe una vecindad cerrada B de A tal que $Supp\ \varphi \cap B = \phi$. Ahora bien si $Supp\ T_1(\lambda) \subset B$, entonces $< T_1(\lambda), \varphi > = 0$ para $\lambda \in \Lambda - \{\lambda_o\}$ y la demostración de *(2.2.6)* muestra que $< S_j, \varphi > = 0$, es decir $Supp\ S_j \subset A$ para $1 \leqq j \leqq k$.

Ejemplos. (2.2.7.1) En el caso de la seudofunción $\lambda \mapsto x_+^\lambda$ *(2.2.5)* se puede tomar $A = \{0\}$ y los residuos *(2.2.5.4)* tienen A como soporte.

(2.2.7.2) Si $T(\lambda)$ es la seudofunción euclídea K_λ definida para $\Re e\ \lambda > -n$ por

$$< K_\lambda \,,\, \varphi > = \int_{\mathbb{R}^n} k(x)\ |x|^\lambda\ \varphi(x)\ dx$$

[16, (3.2), p. 152], entonces $A = \{0\}$ y los soportes de los residuos de K_λ en los polos $\lambda = -n-j$ [16, (3.3), p. 152] están contenidos en A.

(2.2.7.3) Para la seudofunción s_+^λ discutida en la introducción se puede tomar como A el mantel $\{x \,;\, s(x) = 0 \,,\, x_1 \geqq 0\}$ del cono futuro C^+. De las consideraciones anteriores resulta que los coeficientes de las partes singulares de

s_+^λ en los puntos $\lambda = -2j \ (j \geqq 1)$ y $\lambda = -n-2k \ (k \geqq 0)$ tienen soporte en A.

En particular, si n es par, el residuo de s_+^λ en $\lambda = -n+2$ y por lo tanto la solución elemental del operador de las ondas $\square$ tiene su soporte en A, como lo hemos visto en la introducción.

(2.2.8) Conservando las hipótesis de *(2.2.7)* sea f una función con valores en $\mathbb{C}$, holomorfa en $\Lambda - \{\lambda_o\}$, que tiene en λ_o un polo del mismo orden que T, entonces la distribución

$$T^f(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda)} T(\lambda)$$

es función holomorfa de λ en Λ. Si se tiene

$$f(\lambda) = \frac{a_k}{(\lambda - \lambda_o)^k} + \cdots + \frac{a_1}{\lambda - \lambda_o} + g(\lambda)$$

para $0 < |\lambda - \lambda_o| < \rho$ con $a_k \neq 0$ y g holomorfa en λ_o, y si S_k tiene el mismo significado que en *(2.2.1.1)*, entonces

$$T^f(\lambda_o) = \frac{1}{a_k} S_k$$

y esta distribución tiene su soporte en A.

Ejemplos. (2.2.8.1) Para la distribución de Riemann-Liouville $Y_\lambda = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} x_+^{\lambda-1}$ se tiene $Y_{-k} = \partial^k \delta \ (k \in \mathbb{N})$ [28, (II.2; 31), p. 43; 12, Cap. I, § 3, no. 5, fórmula (1), p. 86].

(2.2.8.2) Para la distribución elíptica de Marcel Riesz

$$R_\lambda = \frac{\Gamma\left(\frac{n-\lambda}{2}\right)}{2^\lambda \pi^{n/2} \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} |x|^{\lambda - n}$$

se tiene $R_{-2k} = (-\Delta)^k \delta$ [16, p. 155].

(2.2.8.3) La distribución hiperbólica de Marcel Riesz Z_λ tiene para $\lambda = n-2j$ $(j \geqq 1)$ y $\lambda = -2k$ $(k \geqq 0)$ su soporte contenido en el mantel de C^+. En realidad $Z_{-2k} = \square^k \delta$. La distribución Z_{2k} es solución elemental de $\square^k$; cuando n es par y $2k < n$ entonces su soporte es el mantel de C^+.

(2.2.9) PROPOSICIÓN [19, (I,II.10), p. 21]. *Si T es holomorfa en $\Lambda - \{\lambda_o\}$ y tiene polo en λ_o, entonces $Pf\, \partial^p T(\lambda_o) = \partial^p Pf\, T(\lambda_o)$ para todo $p \in \mathbb{N}^n$.*

Demostración. De *(2.2.1.1)* obtenemos la representación

$$\partial^p T(\lambda) = \frac{\partial^p S_k}{(\lambda-\lambda_o)^k} + \frac{\partial^p S_{k-1}}{(\lambda-\lambda_o)^{k-1}} + \cdots + \frac{\partial^p S_1}{\lambda-\lambda_o} + \partial^p S(\lambda)$$

en $0 < |\lambda - \lambda_o| < \rho$ y $\lambda \mapsto \partial^p S(\lambda)$ es holomorfa en λ_o *(2.1.4)*. Por lo tanto $Pf\, \partial^p T(\lambda_o) = \partial^p S(\lambda_o) = \partial^p Pf\, T(\lambda_o)$. ■

(2.2.10). Ejemplo. La derivada $\partial Pf\, x_+^\lambda$ de la seudofunción $Pf\, x_+^\lambda$ *(2.2.5)* es $Pf\, \lambda x_+^{\lambda-1}$. En efecto para $\mathcal{R}e\, \lambda > 0$ y $\varphi \in \mathcal{D}$ se tiene

$$< \partial x_+^\lambda, \varphi > = - < x_+^\lambda, \partial \varphi > = - \int_0^\infty x^\lambda \partial \varphi(x)\, dx$$

$$= [-x^\lambda \varphi(x)]_0^\infty + \lambda \int_0^\infty x^{\lambda-1} \varphi(x)\, dx = < \lambda x_+^{\lambda-1}, \varphi >$$

y desde luego la afirmación se sigue de *(2.1.4)* y de *(2.2.9)*.

Para $\lambda = 0$ la seudofunción x_+^0 es igual a la función de Heaviside Y [15, Ejemplo 4.3.1, p. 324]. Por otro lado, la función $\lambda \mapsto \lambda x_+^{\lambda-1}$ es holomorfa en el punto $\lambda = 0$ y su valor es δ. En efecto para $\varphi \in \mathcal{D}$ se tiene

$$< \lambda x_+^{\lambda-1}, \varphi > = \lambda \int_0^1 x^{\lambda-1} \{ \varphi(x) - \varphi(0) \} dx + \lambda \int_1^\infty x^{\lambda-1} \varphi(x)\, dx + < \delta, \varphi >$$

y los dos primeros términos en el segundo miembro son funciones holomorfas de λ para $\Re e\,\lambda > -1$ que se anulan para $\lambda = 0$. Así nuestro resultado está en acuerdo con la fórmula conocidísima $\partial Y = \delta$.

Calculemos también $\underset{\lambda=-n}{Pf}\ \lambda x_+^{\lambda-1}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. En virtud de *(2.2.5.4)* se tiene

$$x_+^{\lambda-1} = \frac{(-1)^n}{n!}\ \frac{\partial^n \delta}{\lambda+n} + S(\lambda)$$

donde $\lambda \mapsto S(\lambda)$ es holomorfa en $|\lambda + n| < 1$ y $S(-n) = Pf\ x_+^{-n-1}$. Multiplicando por λ obtenemos

$$\lambda x_+^{\lambda-1} = \lambda \frac{(-1)^n}{n!}\ \frac{\partial^n\delta}{\lambda+n} + \lambda\, S(\lambda)$$

$$= (\lambda+n)\frac{(-1)^n}{n!}\ \frac{\partial^n\delta}{\lambda+n} - n\frac{(-1)^n}{n!}\ \frac{\partial^n\delta}{\lambda+n} + \lambda\, S(\lambda)$$

$$= -n\ \frac{(-1)^n}{n!}\ \frac{\partial^n\delta}{\lambda+n} + \frac{(-1)^n}{n!}\ \partial^n\delta + \lambda\, S(\lambda)$$

y por lo tanto

$$\text{(2.2.10.1)} \qquad \underset{\lambda=-n}{Pf}\ \lambda x_+^{\lambda-1} = -n \underset{\lambda=-n}{Pf}\ x_+^{\lambda-1} + \frac{(-1)^n}{n!}\ \partial^n\delta\ .$$

Esta es precisamente la fórmula (II, 2; 28) de Schwartz [28, p. 42] si se interpreta correctamente : la contradicción aparente entre los resultados presentados aquí y la fórmula de Schwartz proviene del hecho de que él escribe $Pf(-\ell x^{\ell-1})_{x>0}$ cuando en realidad debería escribir $-\ell\, Pf(x^{\ell-1})_{x>0}$; la fórmula *(2.2.10.1)* muestra que las dos expresiones no son iguales. Véase también [12, Cap. I, §3, no.2 , fórmula (10), p. 71].

(2.2.11) PROPOSICIÓN. Supongamos que T es holomorfa en $\Lambda - \{\lambda_o\}$ con

valores en $\mathcal{S}'$ *y que tiene un polo en* λ_o. *Entonces* $Pf\,\mathfrak{F}\,(T)\,(\lambda_o) = \mathfrak{F}\,(Pf\;T(\lambda_o))$.

Demostración. **De** *(2.2.1.1)* **obtenemos la representación**

$$\mathfrak{F}\,T(\lambda) = \frac{\mathfrak{F}\,S_k}{(\lambda-\lambda_o)^k} + \frac{\mathfrak{F}\,S_{k-1}}{(\lambda-\lambda_o)^{k-1}} + \cdots + \frac{\mathfrak{F}\,S_1}{\lambda-\lambda_o} + \mathfrak{F}\,S(\lambda)$$

en $0 < |\lambda-\lambda_o| < \rho$ **y** $\lambda \mapsto \mathfrak{F}\,S(\lambda)$ **es holomorfa en** λ_o *(2.1.5).* **Por consiguiente** $Pf\,\mathfrak{F}\,T(\lambda_o) = \mathfrak{F}\,S(\lambda_o) = \mathfrak{F}Pf\,T(\lambda_o)$. ∎

REFERENCIAS

1. *Ahlfors, L. V., Complex analysis.* McGraw-Hill, New York - Toronto-London, 1953.
2. *Bochnak, J. ; Siciak, J., Analytic functions in topological vector spaces.* Studia Math. 39 (1971), 77-112.
3. *Bogdanowicz, W. M., Analytic continuation of holomorphic functions with values in a locally convex space.* Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1969), 660-666.
4. *Bourbaki, N., Topologie générale.* Hermann, Paris, 1953 - 1961.
5. *Bourbaki, N., Espaces vectoriels topologiques.* Hermann, Paris,, 1955- 1966 .
6. *Bourbaki, N., Intégration.* Hermann, Paris, 1959 - 1969 .
7. *Braga, Carmen Lys Ribeiro, Transformation de Fourier de distributions invariantes.* Depto. de Física da Facultade de Filosofía, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, 1960.
8. *Cartan, H., Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes.* Hermann, Paris, 1961.
9. *Dieudonné, J., Eléments d'analyse.* Gauthier-Villars, Paris, 1968-1971.
10. *Gårding, L. ; Lions, J. L., Functional analysis.* Nuovo Cimento (10) 14 (1959), Supplemento, 9-66 .
11. *Grothendieck, A., Sur certains espaces de fonctions holomorphes. I* . J. Reine Angew. Math. 192 (1953), 35 - 64.
12. *Guelfand, I. M. ; Shilov, G. E., Funciones generalizadas, I. Funciones generalizadas y las operaciones con ellas.* Gos. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscú, 1958.

13. *Hadamard, J., Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* Hermann, Paris, 1932.

14. *Henriques de Brito, Eliana R., Separação de espaço e tempo nas distribuções invariantes da solução de equação das ondas.* Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil, Rio de Janeiro, 1964.

15. *Horváth, J., Topological vector spaces and distributions. I.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

16. *Horváth, J., Finite parts of distributions. Linear Operators and Approximation,* Proceedings of the Conference in Oberwolfach, August 14-22, 1971, ISNM vol. 20, Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 1972.

17. *Horváth, J., Transformations de Marcel Riesz.* Séminaire Goulaouic-Schwartz, Exposé N° 12, Centre de Mathématiques, Ecole Polytéchnique, Paris, 1972-1973.

18. *Kelley, J. L.; Namioka, I., Linear topological spaces.* D. van Nostrand, New York-London-Toronto, 1963.

19. *Lavoine, J., Calcul symbolique : distributions et pseudofonctions.* Monographies du Centre d'Etudes Mathématiques en vue des Applications : *B.-Méthodes de Calcul, II,* Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1959.

20. *Ligocka, E., Siciak, J, Weak analytic continuations.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 20 (1972), 461-466.

21. *Méthée, P. D., Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz.* Comment. Math. Helv. 28 (1954), 225-269.

22. *Méthée, P. D., Transformées de Fourier de distributions invariantes liées à la resolution de l'équation des ondes. La théorie des équations aux dérivées partielles,* Nancy, 9-15 avril 1956, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, LXXI, Paris, 1956.

23. *Méthée, P. D., L'équation des ondes avec second membre invariant,* Comment. Math. Helv. 32 (1957), 153-164.

24. *Riesz, M., L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy.* Acta Math. 81 (1949), 1-223.

25. *Schaefer, H.H., Topological vector spaces.* Macmillan, New York, 1966.

26. *Schwartz, L., Un lemme sur la dérivation des fonctions vectorielles d'une variable réelle.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 2(1950), 17-18.

27. *Schwartz, L. Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles.* J. Anal. Math. 4 (1954/55), 88-148.

28. *Schwartz, L., Théorie des distributions. I.* 2ª edición, Actualités Scientifiques et Industrielles 1091, Hermann, Paris, 1957.

29. *Schwartz, L., Théorie des distributions. II.* Actualités Scientifiques et Industrielles 1122, Hermann, Paris, 1951.

30. *Tengstrand, A., Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature,* Math. Scand. 8 (1960), 201-218.

Universidad de Maryland
College Park, Maryland 20742

(Recibido en enero de 1974)