Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VIII (1974), págs. 111-138

SOBRE CIERTOS ESPACIOS DE FUNCIONES HOLOMORFAS Y SUS APLICACIONES, I*

por

Jairo A. CHARRIS

Dedicado a H. Yerly con motivo de su septuagésimo segundo aniversario

RESUMEN

Se introducen ciertos espacios de funciones holomorfas en polidiscos, cuyo comportamiento es parecido al de los espacios de Sobolev sobre conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Las propiedades de estos espacios se utilizan luego para estudiar el espacio de soluciones holomorfas de $P(z,\partial/\partial z)\ f = 0$, donde $P(z, \partial/\partial z)$ pertenece a una cierta clase de operadores diferenciales.

Introducción. Introduciremos en este artículo ciertos espacios de funciones analíticas complejas definidas en polidiscos $D_r(a)$, $r > 0$, $a \in \mathbb{C}^n$, donde

$$D_r(a) = \{ z \in C^n ; | z_i - a_i | < r, \ i = 1, 2, \ldots, n \}.$$

En muchos aspectos estos espacios se comportan de manera similar a los espacios de Sobolev sobre conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ y es nuestro propósito ilustrar algunas de estas semejanzas. Estos espacios fueron introducidos por el autor con el propó-

* Muchas de las ideas contenidas en este artículo fueron concebidas por el autor cuando era estudiante en la Universidad de Chicago. El autor desea agradecer a la Fundación Ford y a la Universidad Nacional de Colombia por el apoyo prestado por estas instituciones durante su permanencia en la Universidad de Chicago..

sito de determinar si el espacio de soluciones holomorfas, en un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, de la ecuación homogénea

$$P(z, \partial/\partial z)\, f = 0 ,$$

es de dimensión finita, para un tipo especial de operadores diferenciales $P(z,\partial/\partial z)$, entre los cuales se cuentan los operadores sobre $\mathbb{C}^n$ dados por

$$P(z, \partial/\partial z) = \sum_{k=1}^{n} z_k^{2m} \frac{\partial^{2m}}{\partial z_k^{2m}} + \sum_{|a|<2m} a_a(z) \frac{\partial^a}{\partial z^a}, \; a_a \in H(\mathbb{C}^n),$$

para los cuales el resultado puede verificarse de diversas maneras. Este problema lo consideraremos en el Capítulo III. Otros problemas semejantes se estudiarán en artículos posteriores.

Notaciones : Las siguientes notaciones se usarán consistentemente en lo que sigue ; otras serán introducidas a lo largo del artículo.

0) $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ serán respectivamente los conjuntos de los números complejos, reales, naturales, enteros y racionales.

1) Si z es un número complejo, $|z|$ denotará su valor absoluto.

2) Si $z \in \mathbb{C}^n$, z_i denotará su i-ésima componente, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Se tiene $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

3) $D_r(a)$ denotará el polidisco de $\mathbb{C}^n$ de radio $r > 0$ y centro en $a \in \mathbb{C}^n$:

$$D_r(a) = \{ z \;; |z_i - a_i| < r, \; i = 1, 2, \ldots, n \} .$$

$\bar{D}_r(a)$ denotará el polidisco cerrado de $\mathbb{C}^n$:

$$\bar{D}_r(a) = \{ z \;; |z_i - a_i| \leq r, \; i = 1, 2, \ldots, n \} .$$

4) D_r denotará el polidisco $D_r(0)$;

5) Si Ω es un abierto de $\mathbb{C}^n$, $H(\Omega)$ será el $\mathbb{C}$-espacio de las funciones $\mathbb{C}$-analíticas u holomorfas en Ω.

6) T será el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$; $T^n = [0, 2\pi]^n$.

7) Si $\theta \epsilon [0, 2\pi]^n$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ con $\theta_i \epsilon [0, 2\pi]$. Entonces

$$e^{i\theta} = (e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}),\ d\theta = d\theta_1\, d\theta_2, \ldots, d\theta_n .$$

8) Si $a \epsilon \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \epsilon \mathbb{N}$ y

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n .$$

9) Si $x, y \epsilon \mathbb{C}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$,

$$< x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n .$$

10) Si $z = (z_1, \ldots, z_n) = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ donde x_k es la parte real de z_k, y_k la parte imaginaria de z_k, escribimos

$$\partial/\partial z_k = (1/2)(\partial/\partial x - i\ \partial/\partial y_k)$$

donde i es la unidad imaginaria .

11) Si $\alpha \epsilon \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}\, \partial z_2^{\alpha_2} \ldots \partial z_n^{\alpha_n}}$$

12) Si X es un subconjunto localmente cerrado de $\mathbb{R}^n$, $L^2(X)$ denotará el $\mathbb{C}$-espacio de las funciones definidas en X, con valores complejos, medibles en el sentido de Lebesgue, y tales que

$$\int |f(x)|^2\, dx < +\infty .$$

En tal caso,

$$|f|_o = \left\{ \int_X |f(x)|^2\, dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

es la 2-norma de f.

13) Si $f \in H(\Omega)$, escribiremos

$$f^{(\alpha)} = \frac{\partial^{\alpha} f}{\partial z^{\alpha}}$$

para $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

CAPÍTULO I

LOS ESPACIOS $H_m(D_r(a))$

1. Los Espacios $H^2(D)$. Al estudiar los espacios $H^2(D_r(a))$ nos restringiremos al caso $r = 1$, $a = 0$. Los argumentos son idénticamente iguales en el caso general, pero éste introduce complicaciones en la notación. En lugar de $D_1(0)$ escribiremos simplemente D, y diremos que D es el polidisco unidad de $\mathbb{C}^n$. Por $H^2(D)$ entenderemos el espacio de Hardy de las funciones holomorfas en D tales que

$$\|f\|^2 = \sup_{0<r<1} (1/2\pi)^n \int_{T^n} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta < +\infty .$$

La aplicación $f \to \|f\|$ de $H^2(D)$ en $\mathbb{R}$ define una norma sobre $H^2(D)$ para la cual este espacio es un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$. Los límites radiales

$$f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} f(re^{i\theta})$$

existen para casi todo θ en T^n, y $f^* \in L^2(T^n)$. Además,

$$\|f\|^2 = (1/2\pi)^n \int_{T^n} |f^*(e^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

Se tiene también la fórmula de representación de Cauchy

$$f(z) = (1/2\pi)^n \int_{T^n} c(z, e^{i\theta}) \, f^*(e^{i\theta}) \, d\theta \, , \quad z \in D \, ,$$

donde

$$c(z, e^{i\theta}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{i\theta_k}}{e^{i\theta_k} - z_k}$$

Aquí hemos supuesto $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Puesto que la medida de Lebesgue sobre T^n es finita, hacemos notar que $L^2(T^n) \subseteq L^1(T^n)$. De la fórmula de Cauchy síguese que para todo compacto $K \subseteq D$ es posible encontrar una constante $c_k > 0$ tal que

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq c_k \, ||f|| . \tag{1}$$

Por lo tanto, toda sucesión de Cauchy de $H^2(D)$ para la norma $|| \ ||$ es una sucesión de Cauchy de $H(D)$ cuando se da a este último espacio la estructura uniforme de la convergencia compacta .

Todos los resultados contenidos en esta sección pueden encontrarse detallados en [4] .

2. Los espacios $H_m(D)$.

DEFINICIÓN 1. Sea $m \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $H_m(D)$ el $\mathbb{C}$-espacio de las funciones holomorfas en D tales que $f^{(\alpha)} \in H^2(D)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| \leq m$. Claramente $H_m(D) \subseteq H_n(D)$ si $n \leq m$. En particular, $H_m(D) \subseteq H^2(D)$ para todo m. Además $H_o(D) = H^2(D)$. Sobre $H_m(D)$ consideraremos la topología definida por la norma

$$||f||_m = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} ||f^{(\alpha)}||^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{2}$$

Se tiene entonces

$$||f||_{m'} \leq ||f||_m \tag{3}$$

si $m' \leq m$, lo cual significa que las aplicaciones de inclusión $H_m(D) \to H_{m'}(D)$, $m' \leq m$, son uniformemente continuas. En particular, las aplicaciones de inclusión

$H_m(D) \to H_o(D)$ son uniformemente continuas para todo $m \geq 0$.

TEOREMA 1. Para todo $m \geq 0$, $H_m(D)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{f_k\}$ una sucesión de Cauchy en $H_m(D)$. $\{f_k\}$ es también una sucesión de Cauchy en $H^2(D)$ y, por lo tanto, también una sucesión de Cauchy en $H(D)$. Puesto que $H(D)$ es un espacio completo, existe $f \in H(D)$ tal que $f_k \to f$ uniformemente en compactos de D. Por medio de la fórmula de Cauchy en varias variables (véase [2])es posible demostrar que entonces $f_k^{(\alpha)} \to f^{(\alpha)}$, uniformemente en compactos, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Por otra parte, puesto que $H^2(D)$ es un espacio de Banach (véase [4]) y $f_k^{(\alpha)} \in H^2(D)$ para todo $|\alpha| \leq m$, $k \in \mathbb{N}$, existen funciones g_α en $H^2(D)$ tales que $f_k^{(\alpha)} \to g_\alpha$ en $H^2(D)$. Pero convergencia en $H^2(D)$ implica convergencia en $H(D)$. Por lo tanto, $g_\alpha = f^{(\alpha)}$, $f \in H_m(D)$, y $f_k \to f$ en $H_m(D)$. Esto demuestra el teorema.

Nota. El espacio $H^2(D)$ (véase [4]) es un espacio de Hilbert (sobre $\mathbb{C}$) para el producto escalar

$$< f, g > = (1/2\pi)^n \int_{T^n} f^*(e^{i\theta})\, g^*(e^{i\theta})\, d\theta .$$

Como se comprueba inmediatamente,

$$< f, g >_m = \sum_{|\alpha| \leq m} < f^{(\alpha)}, g^{(\alpha)} >$$

también hace de $H_m(D)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$.

El siguiente teorema es una versión, para el caso de los espacios $H_m(D)$, del famoso lema de Rellich en los espacios de Sobolev. Para su demostración necesitaremos antes del siguiente lema :

LEMA 1. Existe $c > 0$ tal que para todo α, $|\alpha| \leq m$, todos $0 < r < r' \leq 1$, *y toda* $f \in H_m(D)$,

$$\left(\int_{T^m} \left| f^{(\alpha)}(r' e^{i\theta}) - f^{(\alpha)}(r e^{i\theta}) \right|^2 d\theta \right)^{\frac{1}{2}} \leq c\,(r'-r)\, \|f\|_m .$$

Demostración. Si $|\alpha| \leq m$,

$$\int_r^{r'} dt \int_{T^n} \left| f^{(\alpha)}(t e^{i\theta}) \right| d\theta \leq (2\pi)^n (r'-r)\, \|f\|_m .$$

Por lo tanto, $f^{(\alpha)}(t e^{i\theta}) \in L^1([r, r'])$. De esto, para $|\alpha| \leq m$,

$$f^{(\alpha)}(r' e^{i\theta}) - f^{(\alpha)}(r e^{i\theta}) = \int_i^{r'} \sum_{\alpha=1}^{n} f^{(\alpha^j)}(t e^{i\theta})\, dt ,$$

donde $\alpha^j = (\alpha_1, \ldots, \alpha_j + 1, \ldots, \alpha_n)$. Dedúcese que

$$\int_{T^n} \left| f^{(\alpha)}(r' e^{i\theta}) - f^{(\alpha)} r e^{i\theta}) \right|^2 d\theta \leq c^1 \{ (2\pi)^n (r', r) \|f\|_m \}^2$$

donde $c^1 > 0$, y esto demuestra el lema.

TEOREMA 2. Para todo $m \geq 1$ *las aplicaciones de inclusión*

$$i : H_m(D) \to H_{m-1}(D)$$

son completamente continuas (es decir, compactas).

Demostración. Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones continuas en $H_m(D)$ tal que $\|f_k\|_m \leq 1$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$. Demostraremos que existe $f \in H_{m-1}(D)$ y una subsucesión $\{f_{k_j}\}$ de $\{f_k\}$ tal que $f_{k_j} \to f$ en $H_{m-1}(D)$. Para este propósito, sea K un subconjunto compacto de D. Para algún $c_k > 0$,

$$\sup_K |f_k| \leq c_k \|f_k\|_m \leq c_k$$

Esta es la desigualdad (1). Se sigue que $\{f_k\}$ es acotada uniformemente en subconjuntos compactos de D. El téorema de Montel [2] asegura entonces la existencia de $f \in H(D)$ y de uns subsucesión $\{f_{k_j}\}$ de $\{f_k\}$ la cual converge a f uniformemente en compactos de D. En virtud de este hecho

$$\int_{T^n} |f_{k_j}^{(\alpha)}(te^{i\theta})|^2 \, d\theta \to \int_{T^n} |f^{(\alpha)}(te^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

para todo α y todo $0 < t < 1$. Dedúcese que, para $|\alpha| \leq m$,

$$(1/2\pi)^n \int_{T^n} |f^{(\alpha)}(te^{i\theta})|^2 \, d\theta \leq 1 .$$

Pasando al límite cuando $t \to 1$, obtenemos

$$||f^{(\alpha)}||^2 \leq 1 \, , \quad |\alpha| \leq m .$$

Por esto, $f \in H_m(D) \subseteq H_{m-1}(D)$. Sólo falta demostrar que $f_{k_j} \to f$ en $H_{m-1}(D)$. Pero, para $|\alpha| < m$ y $0 < r < 1$,

$$||f_{k_j}^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}||_2^2 \leq (1/2\pi)^n \left(\int_{T^n} |f^{(\alpha)}(e^{i\theta}) - f^{(\alpha)}(re^{i\theta})|^2 \, d\theta + \int_{T^n} |f^{(\alpha)}(re^{i\theta}) - f_{k_j}^{(\alpha)}(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \right.$$

$$\left. + \int_{T^n} |f_{k_j}^{(\alpha)}(e^{i\theta}) - f_{k_j}^{(\alpha)}(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \right).$$

(Aquí hemos escrito $f^{(\alpha)}(e^{i\theta})$ en lugar de $(f^{(\alpha)})^*(e^{i\theta})$ para simplificar la notación).

Por el lema 1,

$$||f_{k_j}^{(\alpha)} - f^{(\alpha)}||^2 \leq c(1-r)^2 ||f||_m^2 + c(1-r)^2 + (1/2\pi)^n \int_{T^n} |f^{(\alpha)}(re^{i\theta}) - f_{k_j}^{(\alpha)}(re^{i\theta})|^2 \, d\theta .$$

Como $f_{k_j}^{(\alpha)} \to f^{(\alpha)}$ en subconjuntos compactos de D, y $r < 1$, la última integral tiende a 0 cuando $j \to \infty$, de tal manera que

$$\lim_{j \to \infty} \| f_{k_j}^{(\alpha)} - f^{(\alpha)} \|^2 = 0 \quad , \; |\alpha| < m .$$

Esto demuestra el teorema.

Nota 1. El argumento usado arriba puede extenderse fácilmente a la siguiente situación : Sea $0 \leq k \leq m$, y $P(z, \partial/\partial z) : H_m(D) \to H_{m-k-1}(D)$ un operador diferencial

$$P(z, \partial/\partial z) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(z)\, \partial^\alpha / \partial z^\alpha, \; a_\alpha \in H(D) ,$$

tal que $a_\alpha^*(e^{i\theta}) \in L^\infty(T^n)$ para todo $|\alpha| \leq k$. Entonces P es un operador compacto de $H_m(D)$ en $H_{m-k-1}(D)$. En particular, si $k = m-1$, P es un operador compacto de $H_m(D)$ en $H_o(D)$. En un artículo subsecuente daremos aplicaciones de este hecho. Para nuestros propósitos actuales el enunciado del Teorema 2 es suficiente .

CAPÍTULO II

ESTIMATIVAS A PRIORI EN LOS ESPACIOS $H_m(D)$.

En este capítulo estudiaremos algunas estimativas *a priori*, del tipo H^2, las cuales son semejantes a las estimativas del tipo L^2 en los espacios de Sobolev. Recordamos aquí que si Ω es un abierto de $\mathbb{R}^n$, *el espacio general de Sobolev* $\mathfrak{J}_m(\Omega)$, $m \geq 0$ un entero, es el espacio de las funciones f medibles, localmente integrables en Ω, tales que las derivadas $\partial^\alpha f / \partial x^\alpha$ (en el sentido de las distribuciones) existen para todo α, $|\alpha| \leq m$, y que son además tales que $\partial^\alpha f / \partial x^\alpha \in L^2(\Omega)$, donde $L^2(\Omega)$ es el espacio de Lebesgue de las funciones de cuadrado integrable sobre Ω con la norma

$$|f|_o = \{ \int |f(x)|^2 dx \}^{\frac{1}{2}}.$$

Claramente $C_o^\infty(\Omega) \subseteq \mathfrak{I}_m(\Omega)$, donde $C_o^\infty(\Omega)$ es el espacio de las funciones indefinidamente diferenciables, con soporte compacto contenido en Ω. Claramente $\mathfrak{I}_o(\Omega) = L^2(\Omega)$ y la clausura de $C_o^\infty(\Omega)$ para la norma $|\ |_o$ es todo $L^2(\Omega)$. El espacio $\mathfrak{I}_m(\Omega)$ está provisto de una estructura de espacio Banach para la norma

$$|f|_m = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \left| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} \right|_o^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

La clausura en $\mathfrak{I}_m(\Omega)$ para la norma $|\ |_m$ se denota por $L_m(\Omega)$ y se denomina el *espacio especial de Sobolev de orden m* sobre Ω. En general $L_m(\Omega) \neq \mathfrak{I}_m(\Omega)$, aunque la igualdad es válida en ciertos casos especiales (por ejemplo, $\Omega = \mathbb{R}^n$).
Por esta razón necesitaremos de la siguiente observación :

Nota 2. Sea $\Omega = (0, 1)^n$ (o más generalmente, $\Omega = (a,b)^n$, $a, b, \in \mathbb{R}$, $a < b$) y sea $f \in C^\infty(\Omega)$. Supóngase que f, junto con sus derivadas $\partial^\alpha f / \partial x^\alpha$, para $|\alpha| \leq m$, están uniformemente acotadas en Ω por una constante $C > 0$. Sea

$$K_n = [1/n, n/n+1]^n$$

y sea f_n definida en Ω por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin K_n \\ f(x) & \text{si } x \in K_n \end{cases}.$$

Claramente f es medible y sus derivadas están dadas por

$$\frac{\partial^\alpha f_n}{\partial x^\alpha}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin K_n \\ \dfrac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x) & \text{en casi todas partes si } x \in K_n. \end{cases}$$

Además, $f_n \in L_m(\Omega)$, ya que

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(f_n * \varphi_k) = \frac{\partial^\alpha f_n}{\partial x^\alpha} * \varphi_k \to \frac{\partial^\alpha f_n}{\partial x_\alpha} \quad \text{cuando} \quad k \to \infty,$$

en $L^2(\Omega)$, para $|\alpha| \leq m$. Aquí las φ_k son las funciones definidas de la siguiente manera :

$$\psi(x) = \begin{cases} exp\{-[1/(1-|x|^2)]\} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1, \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^n, |x| \geq 1, \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{\int \psi(e)dx}, \text{ y } \quad \varphi_k(x) = (1/k^n)\,\varphi(kx), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0.$$

Ahora bien, para cualquier α, $|\alpha| \leq m$,

$$\int |\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f|^2 dx = \int_{K'_n} |\partial^\alpha f|^2 dx \leq C^2 \int_{K'_n} dx$$

donde $K'_n = \Omega - K_n$, y entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int |\partial^\alpha f_n - \partial^\alpha f|^2 dx \leq \lim_{n\to\infty} C^2 \int_{K'_n} dx = 0,$$

lo cual demuestra que también $f \in L_m(\Omega)$.

1. *Estimativas en el espacio* $H_2(D)$, $D \subseteq \mathbb{C}$. Demostraremos ahora un resultado, el cual es bien conocido en la teoría de funciones de varias variables reales. Como el argumento en la demostración es más fácil en el caso de una variable, y eso es todo lo que necesitaremos, incluiremos la demostración para el caso de una

variable.

LEMA 1. Sea $\Omega = (a,b)$, $a < b$, un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante $C > 0$ (dependiente sólo de ε) tal que

$$\left|\frac{df}{dx}\right|_o^2 \leq C \cdot |f|_o^2 + \varepsilon \left|\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_o^2$$

para todo $f \in \mathfrak{F}_2(\Omega)$.

Demostración. Podemos suponer desde un principio que $\varepsilon < 1$. Sea $L = (b-a)$ y supóngase primero que $L \leq \varepsilon/2$. Sean $c, d \in \Omega$, $c < d$, tales que

$$c - a = d - c = b - d = L/3 \quad .$$

Tómese ahora $x \in (a,c)$, $y \in (d,b)$, $f \in \mathfrak{F}_2(\Omega)$. Podemos suponer, sin limitaciones sustanciales de la generalidad, que f toma solamente valores reales. De resultados elementales del análisis matemático síguese que f y $f' = df/dx$ son continuas. Sea $z = z(x,y) \in \Omega$ tal que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z)$$

Ahora, para $t \in \Omega$

$$f'(t) = f'(z) + \int_z^t f''(u)\, du \quad , \quad f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} \, .$$

Por lo tanto,

$$|f'(t)| \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} + \int_a |f''(u)|\, du \quad ,$$

de lo cual

$$|f'(t)| \leq 3/L\,(|f(y)| + |f(x)|) + L^{\frac{1}{2}} |f''|_o \quad ,$$

como se deduce del hecho de que $|y-x| > L/3$ y de la desigualdad de Schwarz. Si ahora integramos ambos lados de la anterior desigualdad, primero con respecto a x en (a,c) y luego con respecto a y en (d,b), se obtiene

$$(L/3)^2 \, | f'(t) | \leq (3/L) \{ (L/3) \int_a^b | f(y) | \, dy + (L/3) \int_a^c | f(x) | \, dx \} + \frac{L^{5/2}}{9} \, | f'' |_o$$

Esto se reduce a

$$| f(t) | \leq (3/L)^2 \int_a^b | f(s) | \, ds + L^{\frac{1}{2}} | f'' |_o \quad .$$

Finalmente, elevando ambos miembros al cuadrado e integrando con respecto a t, se obtiene

$$|f'|_o^2 \leq (9/L^{3/2})^2 \, L \, | f |_o^2 + L^2 | f'' |_o^2 + 2.9 \, | f | \cdot | f'' |_o \leq 2 . (9/L)^2 |f|_o^2 + 2L^2 |f''|_o^2 ,$$

lo cual es

$$| f' |_o^2 \leq \frac{18^2}{L^2} | f |_o^2 + (2L)^2 |f''|_o^2 \leq \frac{18}{L^2} |f|_o^2 + \epsilon \, |f''|_o^2 \quad , \quad (2)$$

y la afirmación resulta, finalmente, bajo la hipótesis $L \leq \varepsilon/2$. Supóngase ahora $L > \varepsilon/2$ y sea

$$a = a_o < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$$

una sucesión finita de puntos de (a,b) tal que $|a_k - b_k| = \varepsilon/2$ para $k = 1, \dots, n-1$, y $\varepsilon/2 \geq |a_n - a_{n-1}| \geq \varepsilon/4$. Sea f_k definida por

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) \quad , \quad x \in (a_{k-1} \, , \, a_k) \\ 0 \quad , \quad x \notin (a_{k-1} \, , \, a_k) \end{cases} \qquad k = 1, 2, \dots, n$$

Si $L_k = (a_k - a_{k-1})$, se sigue de (2) que

$$|f_n'|_o^2 < \frac{18}{L_k^2} |f_k|_o^2 + \varepsilon |f^n|_o^2$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$, o, en otras palabras,

$$|f_k'|_o^2 \leq (72/\epsilon)^2 |f_k|_o^2 + \varepsilon |f_k''|_o^2$$

Como claramente para casi todo $x \in (a,b)$ se tiene

$$\left|\sum_{k=1}^{b} f_k^{(i)}(x)\right|^2 = \sum_{k=1}^{b} |f_k^{(i)}(x)| \qquad i = 0, 1, 2 ,$$

se deduce inmediatamente que

$$|f'|_o^2 \leq C|f|_o^2 + \varepsilon |f''|_o^2 \tag{3}$$

con $C = (72/\varepsilon)^2$. Esto demuestra la afirmación.

Nota. La desigualdad (3) es claramente equivalente a la desigualdad

$$|f'|_o \leq C' |f|_o + \varepsilon |f''|_o , \tag{4}$$

con $C' > 0$ dependiente sólo de ε (en tanto que $f \in \mathfrak{F}_2(\Omega)$).

El siguiente lema es la versión, para el caso de $H_2(D)$, del anterior.

Lema 2. Para todo $\varepsilon > 0$ *existe una constante* $C > 0$, *dependiente solo de* ε *, tal que*

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial z}\right\|_o^2 \leq C \|f\|_o^2 + \varepsilon \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right\|_o^2 \tag{5}$$

para toda $f \in H_2(D)$, $D = \{ z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| < 1 \}$.

Demostración. Sea $f_t : (0,2\pi) \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$\tilde{f}_t(\theta) = f_t(e^{i\theta}) = f(te^{i\theta}) .$$

Se tiene

$$\frac{d\tilde{f}_t}{d\theta}(\theta) = i\,t\,e^{i\theta} f_t'(e^{i\theta}), \tag{6}$$

$$\frac{d^2\tilde{f}_t}{dt^2}(\theta) = i^2 t^2 e^{2i\theta} f_t''(e^{i\theta}) + i^2 t\,e^{i\theta} f_t'(e^{i\theta}) ,$$

donde $f_t^{(k)}(e^{i\theta}) = f^{(k)}(t\,e^{i\theta})$ **para** $k = 0, 1, 2$. **Se sigue que**

$$\frac{d^2\tilde{f}_t}{d\theta^2} \in L^2((0, 2\pi)) .$$

Ahora, sea $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon' < 1/2$. **Existe** $C_{\epsilon'} > 0$, **dependiente solo de** ε', **tal que**

$$\left|\frac{d\tilde{f}_t}{d\theta^2}\right|_o \leq C_{\varepsilon'} \, |\tilde{f}_t|_o^2 + \varepsilon' \left|\frac{d^2\tilde{f}_t}{d\theta^2}\right|_o^2$$

Esta es la desigualdad (1). Ahora de (6),

$$t^2 \int_0^{2\pi} |f_t'(e^{i\theta})|^2 d\theta \leq C_{\varepsilon'} \int_0^{2\pi} |f_t(e^{i\theta})|^2 d\theta + 2\varepsilon' t^4 \int_0^{2\pi} |f_t''(e^{i\theta})|^2 d\theta + 2\varepsilon' t^2 \int_0^{2\pi} |f_t'(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

Luego $$\int_0^{2\pi} |f'(te^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{C_{\varepsilon'}}{t^2 - 2\varepsilon' t^2} \int_0^{2\pi} |f(te^{i\theta})|^2 d\theta + \frac{2\varepsilon' t^4}{t^2 - 2\varepsilon' t^2} \int_0^{2\pi} |f''(te^{i\theta})|^2 d\theta .$$

Pasando al límite cuando $t \to 1$,

$$|||f|||_o^2 \leq \frac{C_{\varepsilon'}}{1-2\varepsilon'} \, ||f||_o^2 + \frac{2\varepsilon'}{1-2\varepsilon'} ||f''||_o^2 .$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$ **arbitrario. Si escogemos** $\varepsilon' > 0$ **tal que**

$$0 < \frac{2\varepsilon'}{1-2\varepsilon} < \varepsilon$$

la afirmación resulta con $C = C_{\varepsilon'} (1-2\varepsilon')^{-1}$.

Nota 3. **La estimativa (5) es equivalente a la siguiente**

$$||f'||_o \leq C' \, ||f||_o + \varepsilon \, ||f''||_o , \tag{7}$$

donde C depende sólo de ε. Nótese también que ella implica automáticamente las siguientes estimativas en $H_2(D)$

$$||f||_1^2 \leq C'' \, ||f||_o^2 + \varepsilon \, ||f||_2^2 ,$$

$$||f||_1 < C''' \, ||f||_o + \varepsilon \, ||f||_2 \tag{8}$$

con C'', $C''' > 0$ dependientes sólo de ε.

2. La Estimativa Fundamental en $H_m(D)$. **Estamos listos ahora para el resultado fundamental de este capítulo.**

TEOREMA 1. Sea D el polidisco unidad de $\mathbb{C}^n$ y sea $m > 1$ un entero. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe una constante $C' > 0$, dependiente sólo de ϵ, m, n, tal que

$$||f||_{m-1} \leq C \, ||f||_o + \varepsilon \, ||f||_m \tag{9}$$

para toda $f \in H_m(D)$.

Demostración. Consideraremos primero el caso $n = 1$. La demostración se hará por inducción sobre m. Si $m = 1$, la afirmación es trivial. La desigualdad (8) muestra también que la afirmación es cierta para $m = 2$. Sea $m > 0$ y supóngase que la afirmación es cierta para todo k, $0 < k < m$. Si $\varepsilon' > 0$ está dado, existe $C_{k,\varepsilon'}$ tal que

$$||f||_{k-1} \leq C_{k,\varepsilon'} \, ||f||_o + \varepsilon' \, ||f||_k , \tag{10}$$

para todo $f \in H_m(D) \subseteq H_k(D)$. Por otra parte,

$$f^{(k+1)} \in H_2(D) ,$$

de tal manera que para $\varepsilon > 0$ dado existe $C_{2,\varepsilon} > 0$ tal que si $k < m$,

$$||f^{(k)}||_o \leq C_{2\varepsilon}||f^{(k-1)}||_o + (\varepsilon/4)||f^{(k+1)}||_o \,, \tag{11}$$

para toda $f \epsilon H_m(D)$. En particular

$$||f^{(m-1)}||_o \leq C_{2\varepsilon}||f^{(m-2)}||_o + (\varepsilon/4)||f^{(m)}||_o \,.$$

Pero, de (9), con $k = m-1$,

$$||f^{(m-2)}||_o \leq ||f||_{m-2} \leq C_{m-1,\varepsilon'}||f||_o + \varepsilon'||f||_{m-1} \,.$$

Por lo tanto,

$$||f^{(m-1)}||_o \leq C_{2,\varepsilon}C_{m-1,\varepsilon'}||f||_o + \varepsilon' C_{2,\varepsilon}||f||_{m-1} + (\varepsilon/4)||f^{(m)}||_o \,,$$

Ahora, si escogemos $\varepsilon' > 0$ de tal manera que

$$\varepsilon' C_{2\varepsilon} < \varepsilon/4 \,,$$

obtenemos

$$||f^{(m-1)}||_o \leq C_{2\varepsilon}C_{m-1\,\varepsilon'}||f||_o + (\varepsilon/2)||f||_m \,,$$

puesto que

$$||f||_{m-1} + ||f^{(m)}||_o \leq 2\,||f||_m \,.$$

Finalmente, de (10), con $\varepsilon'' = \varepsilon/2$, $k = m-1$, $C' > \text{máx}\,(C_{2\varepsilon}C_{m-1,\varepsilon'}, C_{m-1,\varepsilon''})$, se obtiene

$$||f||_{m-2} + ||f^{(m-1)}||_o \leq C'||f||_o + \varepsilon||f||_m$$

Dado que

$$||f||_{m-1} \leq ||f||_{m-2} + ||f^{(m-1)}||_o \,,$$

la afirmación resulta con $C = C'$. Esto completa la demostración en el caso $n = 1$.

Consideraremos ahora el caso con $n > 1$. El argumento se hará esencialmente por inducción sobre n. Nótese primero que si $f \in H^2(D)$, donde D es el polidisco unidad de $\mathbb{C}^n$, también

$$f_{r,\theta_n}(z_1,\ldots,z_n) = f(z_1,\ldots,z_n, re^{i\theta_n}),\ \theta_n \in [0,2\pi],\ r>0$$

está en $H^2(D')$, donde D' es el polidisco unidad de $\mathbb{C}^{n-1}$. En efecto, se deduce fácilmente de la fórmula de Cauchy que

$$||f_{r,\theta_n}||^2_{0,(n-1)} \leq \frac{1}{2\pi(1-r)^2}\,||f||^2_{0,(n)}, \tag{11}$$

donde $||\,||_{0,(k)}$ es la norma H^2 en el polidisco unidad de $\mathbb{C}^k$. Esto implica que la red creciente de funciones de θ_n

$$\int |f(te^{i\theta_1},\ldots,te^{i\theta_{n-1}}, re^{i\theta_n})|^2\, d\theta_1\ldots d\theta_{n-1},\quad 0<t<1,$$

está acotada por una función integrable en $[0,2\pi]$, y, por lo tanto, según el teorema de convergencia dominada de Lebesgue y teniendo en cuenta que

$$\lim_{t\to 1}\int |f(te^{i\theta_1},\ldots,te^{i\theta_n} re^{i\theta_n})|^2 d\theta_1\ldots d\theta_{n-1} = ||f_{r,\theta_n}||_{0,(n-1)},$$

se tiene

$$\begin{aligned}\int ||f_{r,\theta_n}||^2_{0,(n-1)}\, d\theta_r &= \lim_{t\to 1}\int\left(\int |f(te^{i\theta_1},\ldots,te^{i\theta_{n-1}} re^{i\theta_n})|^2 d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}\right) d\theta_r\\ &\leq \lim_{t\to 1}\int\left(\int |f(te^{i\theta_1},\ldots,te^{i\theta_{n-1}} te^{i\theta_n})|^2 d\theta_n\right) d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}\\ &= ||f||^2_{0,(n)}.\end{aligned}$$

Ahora, por la hipótesis de inducción, existe, para $\varepsilon'>0$, una constante $C(\varepsilon', m, n-1)>0$ tal que para cualquier $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ con $\alpha_n = 0$, $|\alpha| \leq m-1$, y $\theta_n \in [0,2\pi]$,

$$f^{(\alpha)}_{r,\theta_n}(te^{i\theta_1},\ldots,te^{i\theta_{n-1}}) = f^{(\alpha)}(te^{i\theta_1},\ldots,te^{i\theta_{n-1}} re^{i\theta_n})$$

y

$$\left\|f^{(\alpha)}_{r,\theta_n}\right\|^2_{0,(n-1)} \leq C(\varepsilon',m,n-1)\left\|f_{r,\theta_n}\right\|_{0,(n-1)} + \varepsilon' \sum_{\substack{|\beta|\leq m\\ \beta_n=0}} \left\|f^{(\beta)}_{r,\theta_n}\right\|_{0,(n-1)}$$

De esto se sigue inmediatamente que

$$\int |f^{(\alpha)}(re^{i\theta_1},\dots,re^{i\theta_n})|^2\, d\theta_1\dots d\theta_{n-1}$$

$$\leq C(\epsilon',m,n-1)\left(\lim_{t\to 1}\int |f(te^{i\theta_1},\dots,te^{i\theta_n},re^{i\theta_n})|^2\, d\theta_1\dots d\theta_{n-1}\right)$$

$$+\,\epsilon'\left(\sum_{\substack{|\beta|\leq m\\ \beta_n=0}} \lim_{t\to 1}\int |f^{(\beta)}(te^{i\theta_1},\dots,te^{i\theta_n})|^2\, d\theta_1\dots d\theta_{n-1}\right).$$

Integrando con respecto a θ_n, obtenemos

$$\int |f^{(\alpha)}(re^{i\theta_1},\dots,re^{i\theta_n})|^2\, d\theta_1\dots d\theta_n \leq C(\varepsilon,m,n-1)\|f\|^2_{0,(n)} + \varepsilon' \sum_{\substack{|\beta|\leq m\\ \beta_n=0}} \|f^{(\beta)}\|^2_{0,(n)} \tag{12}$$

y, por lo tanto,

$$\|f^{(\alpha)}\|^2_{0,(n)} \leq C(\varepsilon',m,n-1)\|f\|^2_{0,(n)} + \varepsilon'\|f\|^2_{m,(n)}. \tag{13}$$

Por otra parte, un argumento por inducción, basado en la desigualdad (11), muestra que

$$\|f_{r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1}}\|^2_{0,(1)} \leq \frac{1}{(2\pi)^{n-1}(1-r)^{2(n-1)}}\|f\|^2_{0,(n)}, \tag{14}$$

donde

$$f_{r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1}}(z_n) = f(re^{i\theta_1},\dots,re^{i\theta_{n-1}},z_n).$$

De la desigualdad (14) se sigue también que

$$A = \lim_{t\to 1}\int |f(re^{i\theta_1},\dots,re^{i\theta_{n-1}},te^{i\theta_n})|^2\, d\theta_n$$

existe y define una función integrable de $\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$. De hecho,

$$A = \| f_{r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}} \|^2_{0,(1)} .$$

Además, según el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue,

$$\int \| f_{r,\theta_1,\ldots,\theta_n} \|^2 d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1} \leq \| f \|^2_{0,(n)} . \tag{15}$$

Ahora bien, si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \leq m-1$, entonces

$$f^{(\alpha)}(re^{i\theta_1}, re^{i\theta_2}, \ldots, re^{i\theta_{n-1}}, te^{i\theta_n}) =$$

$$= f^{(\alpha')(\alpha_n)}(re^{i\theta_1}, \ldots, re^{i\theta_{n-1}}, te^{i\theta_n}) = [f^{(\alpha')}]^{(\alpha_n)}_{r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}}(te^{i\theta_n})$$

donde $\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$. En virtud de la desigualdad (5), dado $\varepsilon'' > 0$ existe una constante $C''(\varepsilon'', m, 1) > 0$ tal que

$$\| [f^{(\alpha')}]^{(\alpha_n)}_{r,\theta_1,\ldots\theta_{n-1}} \|^2_{0,(1)} \leq C''(\varepsilon'', m, 1) \| f^{(\alpha')}_{r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-1}} \|^2_{0,(1)} +$$

$$+ \varepsilon'' \| f^{(\alpha')}_{r,\theta_1,\ldots,\theta_n} \|^2_{m-|\alpha'|,(1)} .$$

De esto, conjuntamente con (13), síguese que

$$\int | f^{(\alpha)}(re^{i\theta_1}, \ldots, re^{i\theta_n}) |^2 d\theta_1, \ldots, d\theta_n \leq C''(\varepsilon'', m, 1) \| f^{(\alpha')} \|^2_{0,(n)}$$

$$+ \varepsilon'' \lim_{t\to 1} \left(\sum_{\beta \leq m-|\alpha'|} \int | f^{(\alpha',\beta)}(te^{i\theta_1}, \ldots, te^{i\theta_n}) |^2 d\theta_1 \ldots d\theta_n \right) \leq C''(\varepsilon', m, 1) \| f^{(\alpha')} \|^2_{0,(n)}$$

$$+ \varepsilon'' \| f \|^2_{m,(n)} . \tag{17}$$

Sean entonces $\varepsilon', \varepsilon'' > 0$. De (17), con $\varepsilon'' > 0$, se tiene

$$||f^{(\alpha)}||^2_{0,(n)} \leq C''(\varepsilon'',m,n)||f^{(\alpha')}||^2_{0,(n)} + (\varepsilon''/2)||f||^2_{m,(n)} ,$$

y de (13), con $\varepsilon' > 0$,

$$||f^{(\alpha')}||^2_{0,(n)} \leq C'(\varepsilon',m,n)||f||^2_{0,(n)} + \varepsilon' ||f||^2_{m,(n)}$$

Por lo tanto, con $\varepsilon', \varepsilon'' > 0$,

$$||f^{(\alpha)}||^2_{0,(n)} \leq C'(\varepsilon',m,n)\, C''(\varepsilon'',m,n)||f||^2_{0,(n)} + \varepsilon'\, C''(\varepsilon'',m,n)||f||^2_{m,(n)} +$$

$$+ \varepsilon''/2\, ||f||^2_{m,(n)} .$$

Escójase ahora, para $\varepsilon'' > 0$, otro $\varepsilon' > 0$ tal que

$$C''(\varepsilon'',m,n)\,\varepsilon' \leq \varepsilon''/2 .$$

Entonces, para una constante $C'''(\varepsilon'',m,n) > 0$,

$$||f^{(\alpha)}||^2_{0,(n)} \leq C'''(\varepsilon'',m,n)||f||^2_{0,(n)} + \varepsilon'' ||f||^2_{m,(n)} .$$

Finalmente, si dado $\varepsilon > 0$ se escoge $\varepsilon'' > 0$ tal que

$$\varepsilon'' \leq \varepsilon^2/N(n) ,$$

donde $N(n)$ es el número de $\alpha \in \mathbb{N}^{(n)}$ tales que $|\alpha| \leq m-1$, se tiene, con $C(\varepsilon,m,n) > 0$, e independientemente de f, la estimativa a priori

$$||f||^2_{m-1,(n)} \leq C(\varepsilon,m,n)||f||^2_{0,(n)} + \varepsilon^2 ||f||^2_{m,(n)} .$$

Esto completa la demostración del teorema .

La siguiente proposición se utilizará en el próximo capítulo .

PROPOSICION 1. Sea $f \in H_m(D)$. Entonces $\tilde{f} \in L_m((0,2\pi)^n)$, donde

$$\tilde{f}(\theta) = f^*(e^{i\theta}),$$

y existen constantes $C_1, C_2 > 0$, dependientes sólo de m y n, que cumplen la relación

$$C_1 |\tilde{f}|_m \leq ||f||_m \leq C_2 |\tilde{f}|_m \tag{18}$$

Demostración. Si $\tilde{f}_t(\theta) = f(te^{i\theta})$, $0 < t \leq 1$, **entonces, para** $|\alpha| \leq m$,

$$\frac{\partial^\alpha f_t}{\partial \theta^\alpha} \to \frac{\partial^\alpha f}{\partial \theta^\alpha} \quad \text{en } L^2 \text{ si } t \to 1$$

Aquí, $\dfrac{\partial^\alpha \tilde{f}}{\partial \theta^\alpha}$ **tiene, por el momento, un significado simbólico. Por otra parte,**

$$\frac{\partial^\alpha \tilde{f}_t}{\partial \theta^\alpha}(\theta) = i^{|\alpha|} t^{|\alpha|} \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}\right)(te^{i\theta}) + \sum_{|\beta|<|\alpha|} Q_{\alpha,\beta}^{(te^{i\theta})} \left(\frac{\partial^\beta f}{\partial z^\beta}\right)(te^{i\theta})$$

donde las funciones $Q_{\alpha,\beta}$ son continuas en $[0,2\pi]^n$ e independientes de f. Por lo tanto, en el sentido de las distribuciones,

$$\frac{\partial^\alpha \tilde{f}}{\partial \theta^\alpha}(\theta) = i^{|\alpha|} \left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}\right)^*(e^{i\theta}) + \sum_{|\beta|<|\alpha|} Q_{\alpha,\beta}(e^{i\theta}) \left(\frac{\partial^\beta f}{\partial z}\right)^*(e^{i\theta}). \tag{19}$$

Ahora, $\tilde{f}_t \in L_m((0,2\pi)^n)$. Por lo tanto, también $\tilde{f} \in L_m((0,2\pi)^n)$. Además, existen constantes $C, C' > 0$ independientes de α, tales que

$$\left|\frac{\partial^\alpha \tilde{f}}{\partial \theta^\alpha}\right|_o^2 \leq C \int \left|\left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial z^\alpha}\right)^*(e^{i\theta})\right|^2 d\theta + C' \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \int \left|\left(\frac{\partial^\beta f}{\partial z^\beta}\right)^*(e^{i\theta})\right|^2 d\theta, \tag{20}$$

y, por lo tanto, una constante $C'' > 0$, dependiente sólo de m,n, que cumple

$$|\tilde{f}|_m \leq C^n ||f||_m .$$

Si tomamos $C_2 = 1/C''$, se tiene $C_1 |\tilde{f}|_m \leq ||f||_m$, lo cual demuestra la prime-

ra desigualdad. En cuanto a la segunda, se sigue de (19) que

$$\left(\frac{\partial^{\alpha} f}{\partial z^{\alpha}}\right)^{*}(e^{i\theta}) = i^{|\alpha|} e^{-i<\alpha,\theta>}\left(\frac{\partial^{\alpha} f}{\partial \theta^{\alpha}}\right)(\theta) - \sum_{|\beta|<|\alpha|} Q_{\alpha,\beta}(\theta)\left(\frac{\partial^{\beta} f}{\partial z^{\beta}}\right)^{*}(e^{i\theta}) ,$$

donde

$$\tilde{Q}_{\alpha,\beta}(\theta) = i^{-|\alpha|} e^{-i<\alpha,\theta>} Q_{\alpha,\beta}(\theta) .$$

Un raciocinio idéntico al de la primera parte muestra entonces que para ciertas constantes $C_3, C_4 > 0$, dependientes sólo de $m,n,$ se cumple la relación

$$||f^{(\alpha)}||_o^2 \leq C_3 \left|\frac{\partial^{\alpha} f}{\partial \theta_{\alpha}}\right|_o^2 + C_4 ||f||_{m-1}^2 \tag{21}$$

Por otra parte, $||f||_o = |\tilde{f}|_o$. Además, $f \in H_s(D)$ para todo $1 \leq s < m$, cuando $f \in H_m(D)$. Por inducción podemos suponer entonces que

$$||f||_s \leq C(s,n)\,|\tilde{f}|_s , \quad C(s,n) > 0 .$$

Se tiene entonces, de (21), y para $|\alpha| = s$,

$$||f^{(\alpha)}||_o^2 \leq C_3 \left|\frac{\partial^{\alpha} \tilde{f}}{\partial \theta^{\alpha}}\right|_o^2 + C_4\, C(s,n)^2\, |\tilde{f}|_{s-1}^2 ,$$

y cuando $s = m$,

$$||f^{(\alpha)}||_o^2 \leq C_3 \left|\frac{\partial^{\alpha} \tilde{f}}{\partial \theta^{\alpha}}\right|_o^2 + C_4\, C(m-1,n)^2\, |\tilde{f}|_{m-1}^2 .$$

Para una cierta constante $C' > 0$ se tiene entonces

$$||f^{(\alpha)}||_o^2 \leq C\, |\tilde{f}|_m^2 .$$

Como

$$||f||_{m-1}^2 \leq C(m-1,n)^2\, |\tilde{f}|_{m-1}^2 \leq C(m-1,n)^2\, |\tilde{f}|_m^2 ,$$

para otra constante $C_2 > 0$, independiente de f ,

$$||f||_m^2 \leq C_2^2 \, |\tilde{f}|_m^2 \quad .$$

Esto demuestra la proposición .

CAPÍTULO III

UNA APLICACIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES COMPLEJAS

En este capítulo nos limitaremos a dar una única aplicación de los espacios $H_m(D)$ a cierto tipo de operadores diferenciales,

$$P(z, \partial/\partial z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(z)\, \partial^\alpha / \partial z^\alpha \; : \; H(\Omega) \to H(\Omega) , \tag{1}$$

$a_\alpha \in H(\Omega)$, donde Ω es un abierto conexo de $\mathbb{C}^n$. Otras aplicaciones serán dadas en un artículo posterior.

TEOREMA 1. Sea $P(z, \partial/\partial z)$ como en (1) y supóngase que existen $a \in \Omega$, $r > 0$, tales que $D_r(a) \subseteq \Omega$, y que el operador diferencial

$$Q(\theta, \partial/\partial\theta) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(re^{i\theta} + a)\, e^{-i<\alpha, \theta>} \partial^\alpha / \partial\theta^\alpha$$

definido en $U = (0, 2\pi)^n$ sea uniformemente elíptico. Entonces

$$Ker\, P = \{ f \in H(\Omega);\; P(z, \partial/\partial z) f = 0 \}$$

es de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$.

Demostración . Por una translación seguida de una contracción podemos suponer que $a = 0$, $r = 1$. Ahora, si $f \in H_m(D)$, y si

$$P_m(z, \partial/\partial z) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(z)\, \partial^\alpha / \partial z^\alpha \quad ,$$

escribiendo $\tilde{f}(\theta) = f^*(e^{i\theta})$, tenemos

$$[Q(\theta, \partial/\partial\theta)\tilde{f}](\theta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(e^{i\theta}) e^{-i<\alpha,\theta)} \partial^\alpha \tilde{f}/\partial\theta^\alpha(\theta)$$

$$= i^m \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(e^{i\theta})(\partial^\alpha f/\partial z^\alpha)^*(e^{i\theta}) + \sum_{|\alpha|<m} b_\alpha(e^{i\theta})(\partial^\alpha f/\partial z^\alpha)^*(e^{i\theta})$$

donde $b_\alpha \epsilon H(\Omega)$. De esto se deduce inmediatamente que existe una constante $C > 0$, dependiente sólo de P, tal que

$$|Q\tilde{f}|_0 \leq C_0 \,||P_m f||_0 \quad .$$

Por otra parte, como Q es uniformemente elíptico en U, existe $C' > 0$, dependiente sólo de Q, tal que (desigualdad de Gardin : véase [1], Cap. X).

$$|\tilde{f}|_m \leq C' \{ |Q\tilde{f}|_0 + |\tilde{f}|_0 \} ,$$

de lo cual, usando las desigualdades (18) del capítulo II, No. 2, para alguna $C'' > 0$, dependiente sólo de P, obtenemos

$$||f||_m \leq C'' \{ ||P_m f||_0 + ||f||_0 \} .$$

De otro lado, es claro que, para una constante $C''' > 0$, dependiente sólo de P,

$$||P'f||_0 \leq C''' \,|||f|||_{m-1}$$

donde
$$P'(z, \partial/\partial z) = \sum_{|\alpha|<m} a_\alpha(z)\, \partial^\alpha/\partial z^\alpha \quad .$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe entonces $C_\varepsilon > 0$ que cumple

$$||P'f||_0 \leq C''' \{ C_\varepsilon \,||f||_0 + \varepsilon \,||f||_m \} .$$

Escójase $\varepsilon > 0$ tal que $C'' C''' \varepsilon < 1/2$. Se tiene entonces, de $P_m = P - P'$,

$$\|f\|_m \leq C'''\{\|Pf\|_0 + \|P'f\|_0 + \|f\|_0\} \leq C'''\{\|Pf\|_0 + (1 + C_\varepsilon)\|f\|_0\} + 1/2\,\|f\|_m ,$$

y, por lo tanto,

$$\|f\|_m \leq 2C'''\{\|Pf\|_0 + (1 + C_\varepsilon)\|f\|_0\},$$

de lo cual, para una cierta constante $C > 0$, independiente de f, se tiene

$$\|f\|_m \leq C\{\|Pf\|_0 + \|f\|_0\}.$$

La afirmación resultará entonces de los tres lemas siguientes :

LEMA 1. Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert, T_1, T_2 aplicaciones lineales continuas de H_1 en H_2. Supóngase que T_1 es inyectiva y que $T_1(H_1)$ es cerrada en H_2. Supóngase además que T_2 es completamente continua. Entonces $Ker(T_1 + T_2)$ es de dimensión finita y $(T_1 + T_2)(H_1)$ es cerrado en H_2.

Para una demostración del anterior lema véase por ejemplo [3], pág. 230, proposición 3.9.7.

LEMA 2. Sea $P(z, \partial/\partial z) : H_m(D) \to H_o(D)$ como en el teorema, $i: H_m(D) \to H_{m-1}(D)$ la inclusión. Sea $H_1 = H_m(D)$, $H_2 = H_0(D) \oplus H_{m-1}(D)$. Sea $T_1 : H_1 \to H_2$ definida por $T_1 = P \oplus i$, $T_2 = 0 \oplus (-i)$. Entonces T_1 es una inyección y $T_1(H_1)$ es cerrado. Además, T_2 es compacto.

Demostración. La topología de H_2 está definida por la norma

$$\|f + g\|_{H_2} = \|f\|_0 + \|g\|_{m-1}.$$

Sea $f \in H_1$. Entonces, $T_1(f) = Pf + f$. Por lo tanto,

$$\|T_1(f)\|_{H_2} = \|Pf\|_0 + \|f\|_{m-1} \geq \|Pf\|_0 + \|f\|_0$$

Por la desigualdad (2), existe $C > 0$ (independiente de f) que cumple

$$||T_1(f)||_{H_2} \geq C\,||f||_m .$$

De esto se concluye inmediatamente que $T_1(H_1)$ es cerrado. Como las demás afirmaciones son triviales (usando el Teorema 2 del capítulo II), el lema 2 queda demostrado.

LEMA 3. Sean Ω *y* $P(z, \partial/\partial z)$ *como en el Teorema 1. Si* $P: H_m(D) \to H_0(D)$ *, entonces* P *tiene un núcleo de dimensión finita y* $P(H_m(D))$ *es cerrado en* $H_0(D)$.

Demostración. Claramente $P = T_1 + T_2$. Por lo tanto, $Ker\,P = Ker(T_1 + T_2)$ es, en virtud del lema 1, de dimensión finita. Además, también por el lema 1, $P(H_1) = P(H_m(D)) \subseteq H_0(D)$ es un cerrado de $H_0(D)$. Esto demuestra el lema 3 .

Para terminar la demostración del Teorema 1, sea $Ker\,P = \{f \in H(\Omega);\ Pf = 0\}$. Sea $M = \{f \in H_m(D);\ Pf = 0\}$, y supóngase que $k = dim_{\mathbb{C}} M$. Sean $f_1, \ldots, f_k$, $f_{k+1} \in Ker\,P$. Si $f'_i = f_i \mid D$, es claro que $f'_i \in M$. Por lo tanto, para algún j, $1 \leq j \leq k+1$, y $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$, $i \neq j$,

$$f'_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} \lambda_i f'_i ,$$

de lo cual

$$f_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k+1} \lambda_i f_i ,$$

concluyéndose que $dim_{\mathbb{C}}\,Ker\,P \leq k$. La demostración del teorema 1 queda así completa.

BIBLIOGRAFÍA

1. *L. Hörmander: Linear Partial Differential Operators.* Springer Verlag, Berlin, New York, 1963 .

2. R. *Narasimham : Several Complex Variables.* The University of Chicago Lecture Notes, Chicago and London, 1971.

3. ________________ : *Analysis on Real and Complex Manifolds*. North Holland, Amsterdan, 1965.

4. W. *Rudin : Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1966.

5. ________ : *Function Theory on Polydiscs.* Benjamin, New York, 1967.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia, S. A.

(Recibido en noviembre de 1973)