Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VIII (1974), págs. 149 - 153

ESPACIOS VECTORIALES Y SEUDOTOPOLOGÍAS COMPATIBLES

por

José M. MUÑOZ Q.

Dedicado al profesor Henri Yerly

Introducción. Al tratar de extender el concepto de diferenciabilidad a los espacios vectoriales topológicos no normados, se ha comprobado que no existen en general topologías convenientes sobre los espacios de funciones involucrados. A. Bastiani [1] y H. H. Keller [3] han logrado obviar este problema, demostrando la existencia de seudotopologías que poseen las propiedades deseadas. Es de importancia en esta teoría un teorema que caracterice las seudotopologías compatibles con la estructura de espacio vectorial preexistente; en este trabajo se da una demostración elemental de un teorema propuesto por Frolicher [2] en este sentido.

Antes de enunciar y demostrar el teorema, se dan algunas definiciones y resultados que facilitan su lectura y comprensión.

Un conjunto E se *dota de una seudotopología,* cuando se asigna a cada punto x de E un conjunto de filtros sobre E, llamados *filtros convergentes a* x, de tal manera que :

1. *Si un filtro converge a* x, *todo filtro más fino que él también converge a* x.

2. *Si dos filtros convergen a* x, *su máxima cota inferior también converge a* x.

3. *El filtro* $[x]$ *de las partes de* E *que contienen a* x, *converge a* x.

Si el filtro $\mathfrak{X}$ converge a x en el espacio seudotopológico E, escribiremos $\mathfrak{X} \downarrow_x E$.

Una aplicación f de un espacio seudotopológico E_1 en otro E_2 se llamará *contínua en el punto* x de E_1 si, para todo filtro $\mathfrak{X}$ de E_1, convergente a x se tiene que $f(\mathfrak{X}) \downarrow_{f(x)} E_2$, donde $f(\mathfrak{X})$ es el filtro sobre E_2 generado por $\{ f(A) \mid A \in \mathfrak{X} \}$. Si f es continua en todo punto x de E_1 diremos que f es continua en E_1.

Sea E un espacio seudotopológico tal que su conjunto subyacente sea un espacio vectorial real. Si las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{+} & E \\ (x,y) & \to & x+y \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \xrightarrow{\cdot} & E \\ (\lambda, x) & \to & \lambda x \end{array}$$

son continuas, se dice que E es un *espacio vectorial seudotopológico*. En este caso, en vez de $\mathfrak{X} \downarrow_o E$, escribiremos simplemente $\mathfrak{X} \downarrow E$. Si E es un espacio vectorial, una seudotopología sobre E se dirá *compatible*, si hace continuas las dos aplicaciones $+$ y $\cdot$

Observaciones. Designando por $\mathcal{V}$ el filtro de vecindades de cero en $\mathbb{R}$, representaremos por $\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2$ (resp., $\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2$) a la imagen de $\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_2$ por la aplicación $+$ (resp., $g: E \times E \to E$, dada por $g(x,y) = x-y$). Análogamente, $[\lambda]\mathfrak{X}$, $\mathcal{V}\mathfrak{X}$ y $\mathcal{V}[x]$ significarán las imágenes por $\cdot$ de los filtros $[\lambda] \times \mathfrak{X}$, $\mathcal{V} \times \chi$ y $\mathcal{V} \times [x]$, respectivamente.

Sean $a \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$; si $T_a : E \to E$ y $b_\lambda : E \to E$ son la translación $T_a(x) = x + a$ y la homotecia $b_\lambda(x) = \lambda x$, escribiremos $\mathfrak{X} + a$, $\mathfrak{X} - a$ y $\lambda \mathfrak{X}$ en vez de $T_a(\mathfrak{X})$, $T_{-a}(\mathfrak{X})$ y $b_\lambda(\mathfrak{X})$, respectivamente. Es fácil probar que $\mathfrak{X} \pm a = \mathfrak{X} \pm [a]$, $\lambda \mathfrak{X} = [\lambda]\mathfrak{X}$ y $\mathcal{V}x = \mathcal{V}[x]$, donde $\mathcal{V}x$ es el filtro imagen de

$\mathcal{V}$ por la aplicación $t \to tx$ de $\mathbb{R}$ en E.

De la continuidad de $+$, $\cdot$ y g se deduce que las translaciones y las homotecias son homeomorfismos; en consecuencia, $\mathcal{X} \downarrow_a E \iff \mathcal{X} - a \downarrow E$ o, lo que es equivalente, $\mathcal{X} \downarrow E \iff \mathcal{X} + a \downarrow_a E$, para cualquier filtro $\mathcal{X}$. Esto significa que la seudotopología queda completamente determinada dando los filtros convergentes a cero. Surge entonces el siguiente resultado:

TEOREMA. Sea E un espacio vectorial real; una seudotopología sobre E es compatible si, y sólo si, sus filtros convergentes a cero, verifican las propiedades siguientes:

a) Si $\mathcal{X}_1 \downarrow E$ y $\mathcal{X}_2 \downarrow E$, entonces $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 \downarrow E$.

b) Si $\mathcal{X} \downarrow E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \mathcal{X} \downarrow E$.

c) Si $\mathcal{X} \downarrow E$, entonces $\mathcal{V}\mathcal{X} \downarrow E$.

d) Si $x \in E$, entonces $\mathcal{V} x \downarrow E$.

Demostración. De las observaciones anteriores se deduce fácilmente la necesidad de las condiciones; veamos entonces su suficiencia. La última de las observaciones sugiere que se tome como definición $\mathcal{X} \downarrow_a E \iff \mathcal{X} - a \downarrow E$, para cualquier a en E; probemos que en esta forma se obtiene una seudotopología compatible:

i) Si $\mathcal{X}_1 \downarrow_{x_1} E$ y $\mathcal{X}_2 \downarrow_{x_2} E$, entonces $\mathcal{X}_1 - x_1$ y $\mathcal{X}_2 - x_2$ convergen a cero en E; por a), $(\mathcal{X}_1 - x_1) + (\mathcal{X}_2 - x_2) = (\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2) - (x_1 + x_2) \downarrow E$ luego $\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2 \downarrow_{x_1 + x_2} E$ lo cual prueba la continuidad de la adición.

ii) Si $\mathcal{X} \downarrow_x E$, entonces $\mathcal{X} - x \downarrow E$ y, por b), $\lambda(\mathcal{X} - x) = \lambda \mathcal{X} - \lambda x \downarrow E$, o sea que $\lambda \mathcal{X} \downarrow_{\lambda x} E$.

iii) Si $\mathcal{X} \downarrow_x E$, veamos que el filtro $\mathcal{V}\mathcal{X}$ es más fino que el filtro $\mathcal{V}(\mathcal{X} - x) + \mathcal{V} x$: cualquier elemento de este último filtro contiene otro de la forma $V(A-x) + V'x$ con $A \in \mathcal{X}$ y $V, V' \in \mathcal{V}$. Pero $V \supset I_\delta$ y $V' \supset I_\gamma$ para convenientes $\delta, \gamma \in \mathbb{R}$, donde $I_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq \varepsilon\}$; luego $V(A-x) + V'x \supset I_\delta(A-x) + I_\gamma x$. Si $\alpha = \min\{\delta, \gamma\}$, entonces $I_\delta(A-x)+I_\gamma x \supset I_\alpha(A-x)+I_\alpha x$. Es de rutina demostrar que

$I_\alpha(X+Y)\subset I_\alpha X+I_\alpha Y$, para $X,Y\subset A$, lo cual implica $I_\alpha(A-x)+I_\alpha x\supset I_\alpha(A-x+x)= =I_\alpha A$. Como este último pertenece a $\mathcal{O}\mathcal{X}$ y $V(A-x)+V'x\supset I_\alpha A$, entonces $V(A-x)+V'x\in\mathcal{O}\mathcal{X}$, concluyéndose que $\mathcal{O}(\mathcal{X}-x)+\mathcal{O}x$ es menos fino que $\mathcal{O}\mathcal{X}$.

iv) Si $\mathcal{X}\downarrow_x E$, $\mathcal{X}-x\downarrow E$ y, por c) $\mathcal{O}(\mathcal{X}-x)\downarrow E$. Como por d) $\mathcal{O}x\downarrow E$, entonces usando a) se deduce que $\mathcal{O}(\mathcal{X}-x)+\mathcal{O}x\downarrow E$. Este hecho unido a iii) permite concluir que $\mathcal{O}\mathcal{X}\downarrow E$.

v) Sean $\mathcal{T}\downarrow_\lambda \mathbb{R}$ y $\mathcal{X}\downarrow_x E$. Probemos que $\mathcal{T}\mathcal{X}\geq(\mathcal{T}-\lambda)\mathcal{X}+\lambda\mathcal{X}$. Sea $M\in(\mathcal{T}-\lambda)\mathcal{X}+\lambda\mathcal{X}$; entonces $M\supset(F-\lambda)A+\lambda B$, con $A,B\in\mathcal{X}$ y $F\in\mathcal{T}$. Si $A'=A\cap B$, tenemos $M\supset(F-\lambda)A'+\lambda A'$. Pero es muy fácil demostrar que $PA'+\alpha A'\supset(P+\alpha)A'$, con $P\subset\mathbb{R}$ y $A'\subset E$; luego $M\supset[(F-\lambda)+\lambda]A'= FA'\in\mathcal{T}\mathcal{X}$.

vi) Nuevamente, sean $\mathcal{T}\downarrow_\lambda\mathbb{R}$ y $\mathcal{X}\downarrow_x E$. Como $\mathcal{T}-\lambda\downarrow\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{T}-\lambda\geq\mathcal{O}$ y se tiene $(\mathcal{T}-\lambda)\mathcal{X}\geq\mathcal{O}\mathcal{X}$, lo cual junto con iv) implica $(\mathcal{T}-\lambda)\mathcal{X}\downarrow E$. Por ii), $\lambda\mathcal{X}\downarrow_{\lambda x}E$, luego $(\mathcal{T}-\lambda)\mathcal{X}+\lambda\mathcal{X}\downarrow_{\lambda x}E$ por la continuidad de la adición probada en i). Si a este último resultado unimos v), podemos concluir $\mathcal{T}\mathcal{X}\downarrow_{\lambda x}E$, probándose así la continuidad de la aplicación $\mathbb{R}\times E \longrightarrow E$ con lo cual queda completa la demostración.

REFERENCIAS

1. A. Bastiani, *Applications différentiables et varietés différentiables de dimension infinie*, Analyse Math., 13(1964), 1-114.
2. A. Frolicher and W. Bucher, *Calculus in Vector spaces without norm*, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg, 1966.
3. H. H. Keller, *Über probleme die bei einer Differential rechnung in topologischen Vektorraumen auftreten*, Nevanlinna Festband, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg, 1967.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, 6, D. E., Colombia, S. A.

(Recibido en febrero de 1974).