Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VIII (1974), págs. 155 - 176

IDEALES DE RIESZ EN ESPACIOS LOCALMENTE K-CONVEXOS

por

Klaus MADLENER

Dedicado a mi profesor, el Dr. Henri Yerly

En los últimos años el análisis funcional en espacios vectoriales no necesariamente sobre los reales o los complejos ha motivado numerosos estudios. Investigaremos aquí qué resultados pueden trasladarse al caso en el cual el cuerpo de base sea un cuerpo no arquimedeanamente (n.a.) valuado; p.e., el cuerpo de los números p-ádicos con la valuación usual. En esta nota trataremos algunos temas de la teoría de operadores en espacios localmente K-convexos; en especial sobre operadores que satisfagan la teoría de Riesz, y tengan, por lo tanto, propiedades similares a los operadores compactos usuales.

Los operadores compactos fueron estudiados en el caso n.a. por Serre [*11*], Ellis [*3*], van Tiel [*13*] y Gruson [*5*]. Se demostró que estos operadores satisfacen la teoría de Riesz, pero su existencia exigía que el cuerpo fuese localmente compacto, lo cual es, como se sabe por la teoría de los cuerpos valuados, demasiado restrictivo.

Gruson introdujo en [*5*] una clase de operadores "compactos" más general, que cumple la teoría de Riesz, incluye los operadores compactos y, en caso de que el cuerpo sea localmente compacto, coincide con éstos. En esta nota investigaremos la existencia de otros ideales de Riesz y, sobre todo, la caracterización del

del ideal de Riesz maximal. En 1 introduciremos las nociones y notaciones necesarias y daremos, sin demostración, algunos resultados que supondremos conocidos. En 2 daremos dos ejemplos que muestran la diferencia entre el caso complejo y el n.a. y que ponen de manifiesto la necesidad de utilizar métodos diferentes a los del caso complejo. En 3 introduciremos los operadores estrictamente singulares, en analogía con Kato, y demostraremos una caracterización de éstos con cuya ayuda podemos dar una caracterización del ideal de Riesz maximal. Finalmente, en 4 trataremos varias generalizaciones de los operadores estrictamente singulares al caso de espacios localmente K-convexos. Con ayuda de éstos podremos dar una nueva caracterización de los operadores precompactos y mostraremos además que, bajo ciertas circunstancias, son éstos los operadores de Riesz que contienen a los operadores precompactos.

1. Notaciones. Resultados generales.

En todo el trabajo K será un cuerpo n.a. valuado, completo, con valuación no trivial y $\mathfrak{R}$ designará su anillo de valuación; esto es, $\mathfrak{R} = \{ \alpha \in K : |\alpha| \leq 1 \}$. Supondremos familiarizado al lector con los resultados sobre espacios n.a. normados y espacios localmente K-convexos (l.c.) de Monna [7], van Tiel [2] y van der Put [9]. En particular, con el hecho de que todo espacio n.a. normado de tipo enumerable (es decir, que contiene un subespacio denso de dimensión enumerable), posee una base *α-ortogonal* (esto es, existe un subconjunto enumerable $\{x_n\}$ tal que todo elemento x del espacio puede representarse de manera única como $x = \sum \alpha_n x_n$ donde $|\alpha| \, máx \, \|\alpha_n x_n\| \leq \|x\| \leq máx \, \|\alpha_n x_n\|$, $0 < |\alpha| < 1$). Un espacio vectorial topológico separado E sobre K se llamará l.c. si en E existe una base de vecindades de cero formada por módulos sobre $\mathfrak{R}$. En este caso la topología de E puede definirse mediante una familia de seminormas n.a.continuas $\Gamma(E)$. Supondremos además que esta familia $\Gamma(E)$ es saturada en el sentido usual.

El siguiente concepto de precompacidad fue introducido por Gruson [5].

1.1. DEFINICIÓN. Sea E un espacio l.c. sobre K. Un subconjunto $S \subset E$ se llamará *precompacto*, si para toda vecindad de cero $V \subset E$ existe un $\mathfrak{R}$-módulo F_V de tipo finito tal que $S \subset F_V + V$. Si S es precompacto y completo S se dice compacto.

1.2. Observaciones. a) Si K es localmente compacto, la noción de precompacidad usual coincide con la nuestra.

b) (Gruson [5]) *$S \subset E$ es precompacto sii toda sucesión en S es precompacta.*

c) Un subconjunto $S \subset E$ no es precompacto sii existe una vecindad de cero $V \subset E$, tal que para algún $\alpha \in K$, con $0 < |\alpha| \leq 1$, existe una sucesión (x_n), $x_n \in S$, que cumple $x_{n+1} \notin \alpha^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{R} x_i + V$.

d) Todo conjunto precompacto es acotado.

e) La imagen lineal continua de un conjunto precompacto es precompacta.

f) La suma finita de conjuntos precompactos es precompacta.

1.3. Ejemplos. Sea E un espacio n.a. normado sobre K.

a) Toda sucesión convergente es precompacta.

b) Si $S \subset E$ es precompacto entonces $\langle S \rangle$ (el espacio lineal generado por S) es de tipo enumerable. (Vale también si E es ultramétrico).

c) Toda familia α-ortogonal no finita (esto es, para la cual existe un $\alpha \in K$, $0 < |\alpha| \leq 1$, tal que $\| \sum \alpha_i x_i \| \geq |\alpha| \, \text{máx} \, \| \alpha_i x_i \|$, en caso de que la serie converja, con $\inf \| x_i \| = c > 0$), *no es precompacta,* pues $\| x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \| \geq |\alpha| \, \| x_{n+1} \| > \varepsilon$.

d) Si E es de dimensión finita se tiene que $E_1 = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es precompacto y todo subconjunto acotado de E es precompacto.

En la teoría clásica de los operadores compactos se utiliza a menudo el siguiente lema, que, como veremos,es también válido en el caso n.a. .

1.4. Análogo del lema de Riesz .

Sean E un espacio l.c. sobre K y $F \subseteq E$, $F \neq E$, un subespacio cerrado de E. Si U es un $\Re$-módulo acotado y absorbente de E, se tiene que $\delta U \not\subset F + U$ para todo $\delta \in K$ con $|\delta| > 1$.

Demostración : Supongamos que $\delta U \subset F + U$. Se tiene entonces que para $n \in \mathbb{N}$, $\delta^n U = \delta^{n-1}(\delta U) \subset \delta^{n-1}(F + U) \subset F + \delta^{n-1} U \subset \cdots \subset F + U$, esto es, $\delta^n U \subset F + U$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como F es cerrado y U acotado, se sigue que $U \subset F$. Esto no es posible ya que U es absorbente y $F \neq E$.

1.5. TEOREMA. Un espacio vectorial topológico separado E sobre K es de dimensión finita sii existe una vecindad de cero en E que es un $\Re$-módulo precompacto.

Demostración : Demostraremos sólo una dirección; la otra es 3. d. . Claro está que E es n.a. normado, ya que tiene una vecindad de cero convexa y acotada. Supongamos que E sea de dimensión infinita y sea U la vecindad precompacta. Como U es un $\Re$-módulo acotado y absorbente podemos utilizar 1.4. Sea $\alpha \in K$ con $0 < |\alpha| < 1$; con ayuda de 1.4 construimos una sucesión (x_n) con $x_n \in \alpha^{-1} U$ pero $x_{n+1} \notin \alpha^{-1} \sum_{i=1}^{n} \Re x_i + U$. La sucesión (x_n) no es precompacta, lo cual contradice el hecho de que $\alpha^{-1} U$ es precompacto.

1.6. Notaciones. Sean E, F espacios l.c. sobre K. Si T es un operador lineal de E en F denotaremos por $R(T)$ al rango y por $N(T)$ al núcleo de T .

Con $\alpha(T)$ resp. $\beta(T)$ denotaremos la dimensión de $N(T)$ resp. la codimensión de $R(T)$ en caso de que sean finitas. $L(E,F)$ es el espacio de todas las aplicaciones lineales continuas de E en F y $B(E,F)$ el subespacio de $L(E,F)$ formado por los operadores acotados, esto es, para los cuales existe una vecindad de cero en E tal que la imagen de ésta es acotada en F. Finalmente, $F(E,F)$ es el espacio de los operadores lineales continuos cuyo rango es de dimensión finita.

1.7. DEFINICIÓN. Sean E, F como en 1.6 y $T \in L(E,F)$.

a) T se llamará *relativamente regular,* si

i) T es abierta, esto es, transforma abiertos en abiertos.

ii) $N(T)$ posee un complemento topológico en E.

iii) $R(T)$ posee un complemento topológico en F.

b) T es un *operador de Fredholm,* si T es relativamente regular y $\alpha(T)$ y $\beta(T)$ son ambos finitos. En este caso se define $ind(T) = \alpha(T) - \beta(T)$ el índice de T. Con $\Sigma(E,F)$ se denota al conjunto de todos los operadores de Fredholm de E en F y $\Sigma(E)$ será el semigrupo de los endomorfismos de Fredholm en E.

c) Sea $E = F$. Decimos que T es un *operador de Riesz,* si

i) $I - \alpha T$ es un operador de Fredholm para todo $\alpha \in K$.

ii) $I - \alpha T$ cumple para todo $\alpha \in K$ las condiciones de cadena; esto es, existen enteros $p(\alpha)$ y $q(\alpha)$ tales que $N((I-\alpha T)^{p}) = N((I-\alpha T)^{p+1})$ y $R((I-\alpha T)^{q}) = R((I-\alpha T)^{q+1})$.

iii) Los valores propios de T forman un conjunto finito o una sucesión convergente hacia 0.

1.8. Observaciones. Como en el caso complejo, [4], se pueden demostrar las siguientes propiedades :

a) $T \in L(E,F)$ *es un operador de Fredholm sii existen operadores* $L, R \in L(F,E)$ *tales que* $LT = I_E - F_1$ *y* $TR = I_F - F_2$ *con* $F_1 \in F(E)$ *y* $F_2 \in F(F)$ *, en donde* I_E *y* I_F *son las aplicaciones idénticas de* E *y* F*, respectivamente. En particular, se tiene que* $T \in L(E)$ *es un operador de Fredholm sii* T *es invertible en* $L(E)/F(E)$ *.*

b) Si $E' = 0$ *se obtiene que* $T \in L(E)$ *es un operador de Fredholm sii* T *es invertible en* $L(E)$ *.*

Nota : **En contraste con el caso arquimedeano** $(\mathbb{R}$ **o** $\mathbb{C})$ **en el caso n.a. puede ocurrir que** $E' = 0$ **aunque se trate de un espacio l.c., ya que el teorema de Hahn-Banach es válido solamente cuando el cuerpo** K *es esféricamente completo* **(e.c.); esto es, cuando toda familia decreciente de esferas tenga una intersección no vacía (ver, p.e., [7]) . Por lo general, no haremos esta suposición sobre** K.

c) Si E' *y* F' *son totales, p.e., cuando* K *es e.c., se tiene que* $T \in L(E,F)$ *es un operador de Fredholm sii* T *es abierto,* $\alpha(T)$ *y* $\beta(T)$ *son finitos y* $R(T)$ *es cerrado.*

d) Si E *y* F *son espacios ultramétricos completos con duales totales, p.e., si* E *y* F *son espacios de Banach n.a. sobre un cuerpo e.c., se obtiene que* $T \in L(E,F)$ *es un operador de Fredholm sii* $\alpha(T)$ *y* $\beta(T)$ *son finitos.* **(Depende de un lema de Kato bien conocido que también vale en nuestro caso).**

e) Si $T \in F(E,F)$*, se tiene que* $I - T \in \Sigma(E,F)$ *e* $ind(I-T) = 0$ *, para todo isomorfismo topológico de* E *sobre* F*.*

1.9. DEFINICIÓN . **Sea** E **un espacio l. c. sobre** K **y** J **un ideal en** $L(E)$.

a) J **es un** Σ*-ideal* **si** $I - T \in \Sigma(E)$ **para todo** $T \in J$.

b) J **es un** Σ_0*-ideal* **si** J **es un** Σ**-ideal e** $ind(I-T) = 0$ **para todo** $T \in J$.

c) J es un *ideal de Riesz,* si J contiene solamente operadores de Riesz.

1.10. Observación . Sean $\overline{L} = L(E) / F(E)$ y h la aplicación canónica de $L(E)$ sobre $\overline{L}$. Entonces existe exactamente un Σ -ideal maximal en $L(E)$ y éste es igual a $h^{-1}(j)$ en donde j es el radical de Jacobson de $\overline{L}$. Esta caracterización depende de las propiedades del radical de Jacobson y de 1.8.a. En la mayoría de los casos, cuando el cuerpo es $\mathbb{C}$, se puede demostrar que este ideal es también el ideal de Riesz maximal. En el caso n.a. este problema no ha podido ser resuelto por completo. En el siguiente número daremos unos ejemplos para mostrar que las demostraciones del caso complejo no pueden ser usadas en el caso n.a. Un ideal de Riesz siempre existe, ya que $F(E)$ es un ideal de Riesz que bien puede ser trivial (cuando $E' = 0$).

2. Ejemplos.

2.1. Sea E un espacio de Banach n.a. sobre K. Un operador $T \in L(E)$ se dice *cuasicompacto* si $\overline{T} \in L(E)/F(E)$ es *cuasinilpotente ;* esto es, cuando $\lim \sqrt[n]{\| \overline{T}^n \|} = 0$. Para espacios de Banach complejos se tiene el siguiente teorema :

$T \in L(E)$ es un operador de Riesz sii T es cuasicompacto.

En el caso n.a. vale solamente una dirección : Si T es cuasicompacto, T es un operador de Riesz (ver, p.e., [5]). El recíproco es por lo general falso como lo muestra el siguiente ejemplo : Sea $\overline{K}$ una extensión infinita n.a. valuada del cuerpo K (existe siempre, en oposición al caso complejo) y sea $\alpha \in \overline{K} - K$. El operador αI definido por $(\alpha I)x = \alpha x$ es un operador de Riesz definido sobre $\overline{K}$ ya que $\sigma(\alpha I) = \phi$, pero, claro está, no es cuasicompacto.

2.2. Un lema importante para la caracterización del ideal de Riesz maximal en el caso complejo, que vale aún para espacios p-normados, es el siguiente :

Si $T-\alpha I$ es un operador de Fredholm para todo $0 \neq \alpha \in K$, T es un operador de Riesz. En particular, se tiene que $ind(T-\alpha I) = 0$ para todo $0 \neq \alpha \in K$.

En el caso no arquimedeano el lema es por lo general falso : Sea $E = c_o(K)$ el espacio de Banach n.a. de las sucesiones convergentes a cero con la norma usual. El operador $T((\alpha_n)) = (\alpha_{n+1})$ tiene las siguientes propiedades : $\sigma(T) = \{\beta \in K : |\beta| < 1\}$. Como $\|T\| = 1$, se tiene que para $|\beta| > 1$, $T-\beta I$ es invertible (serie de Neumann), en particular, $ind(T-\beta I) = 0$: Sea $|\beta| = 1$. Claro está, basta con mostrar que $R(T-\beta I) = E$: Sea $(\delta_n) \in E$. Definiendo $\alpha_n = -\beta^{n-1} \sum_{i=n}^{\infty} \beta^{-i} \delta_i$, tenemos que $|\alpha_n| \leq \max_{i \geq n} |\delta_i|$; por lo tanto, $(\alpha_n) \in E$ y claro está $(T-\beta I)(\alpha_n) = (\delta_n)$. Obtenemos, por consiguiente, que $T-\beta I$ es también invertible para $|\beta| = 1$. Para $|\beta| < 1$ se tiene que $N(T-\beta I) = \langle(\beta^n)\rangle$ y $R(T-\beta I) = E$; por lo tanto, $ind(T-\beta I) = 1$ para $|\beta| < 1$.

Este ejemplo muestra que, aparentemente existen, en el caso n.a., más operadores de Fredholm que en el caso arquimedeano. Por otra parte, muestra también que, en el caso n.a. el radio de Riesz, $\inf\{r > 0 : T-\alpha I \in \Sigma(E),\ ind(T-\alpha I) = 0$ y $T-\alpha I$ cumple las condiciones de cadena para todo $|\alpha| > r\}$, no coincide, en general, con el radio de Fredholm, $\inf\{r > 0 : T-\alpha I \in \Sigma(E)$ para todo $\alpha \in K$ con $|\alpha| > r\}$, ya que en nuestro ejemplo el primero es 1 y el segundo es 0. Para caracterizar el ideal de Riesz maximal tenemos en nuestro caso, por lo tanto, que desarrollar métodos diferentes a los clásicos.

3. *Operadores precompactos y estrictamente singulares en espacios n.a. normados.*

3.1. *DEFINICIÓN.* Sean E,F espacios n.a. normados sobre K y $T \in L(E,F)$.

a) T es *precompacto*, si $T(E_1)$ es precompacto en F con $E_1=\{x\in E: ||x||\leq 1\}$.

b) T es *estrictamente singular*, si ninguna restricción de T a un sub-espacio de dimensión infinita en E tiene un inverso continuo.

c) T es *compacto*, si $T(E_1)$ es relativamente compacto en F.

d) T es *débilmente compacto*, si $T(E_1)$ es débilmente relativamente compacto, claro está, solamente en caso de que exista una topología débil separada en F.

Con $P(E,F)$ (resp., $S(E,F)$; resp., $C(E,F)$; resp., $DC(E,F)$) designamos el espacio de los operadores precompactos (resp., estrictamente-singulares; resp., compactos; resp., débilmente compactos de E en F).

3.2. Observaciones.

a) Se tiene siempre $F(E,F) \subset C(E,F) \subset P(E,F) \subset (DC(E,F))$ *y* $F(E,F) \subset S(E,F)$.

b) $P(E,F)$ *y* $S(E,F)$ *son subespacios cerrados de* $L(E,F)$ *con la norma usual.*

c) Si F *es completo se tiene que* $C(E,F) = P(E,F)$.

d) Si K es e.c., se sabe que los $\mathfrak{K}$-módulos compactos coinciden para todas las topologías admisibles. Tenemos, por lo tanto, en este caso, si F es completo, que $C(E,F) = P(E,F) = DC(E,F)$. Más adelante daremos una demostración diferente de este hecho.

El siguiente lema fue demostrado en casos particulares por Serre en [11] y por Gruson en [5]. Con su ayuda podremos caracterizar el ideal de Riesz maximal.

3.3. LEMA. Sean E,F *espacios n.a. normados sobre* K. *Se tiene entonces*

$$\overline{F(E,F)} = S(E,F) = P(E,F)$$

Demostración: Como $F(E,F) \subset S(E,F)$ y $S(E,F)$ es cerrado en $L(E,F)$, tenemos que $\overline{F(E,F)} \subset S(E,F)$. Supongamos que T no sea precompacto. Demostraremos que T tiene un inverso continuo en un subespacio de dimensión infinita de E. Como $T(E_1)$ no es precompacto podemos, por 1.2.b., suponer que existe un subespacio de tipo enumerable $G \subset F$ tal que $T(E_1) \cap G$ no sea precompacto. Sin pérdida de generalidad, podemos pues suponer que F es un espacio de tipo enumerable. Sea F_1 la esfera unidad de F. Como $T(E_1)$ no es precompacto, existe un $\varepsilon \in K$, con $0 < |\varepsilon| < 1$, tal que $T(E_1) \not\subset H + \varepsilon F_1$, para todo $\mathfrak{R}$-módulo de tipo finito $H \subset F$. Sea $\alpha \in K$ con $|\varepsilon| \leq |\alpha| < 1$. Escojamos una sucesión (Tx_n), $x_n \in E_1$, con

$$\alpha^{-1} T x_{n+1} \notin \alpha^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{R}(T x_i) + \varepsilon F_1 ,$$

en donde $\alpha^{-1} T x_{n+1} \in \alpha^{-1} T(E_1) \cap H_n$ y H_n es un complemento α-ortogonal de $\langle T x_i : i = 1, \dots, n \rangle$ en $R(T)$. Esto es posible ya que $R(T)$ es de tipo enumerable, y posee, por consiguiente, una base α-ortogonal. Como $R(T)$ no puede ser de dimensión finita, tenemos que la sucesión (Tx_n) es una sucesión infinita. Poniendo $M = \langle x_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ se ve, utilizando las propiedades de Tx_i, que $T|_M$ tiene un inverso continuo. Hemos demostrado así que $S(E,F) \subset P(E,F)$.

Demostremos ahora que $P(E,F) \subset \overline{F(E,F)}$. Sea $T(E_1)$ precompacto y sea ε_n una sucesión convergente a 0 en K. Existe entonces una sucesión de $\mathfrak{R}$-módulos de tipo finito $G_n \subset R(T)$, $G_n \subset G_{n+1}$, con $T(E_1) \subset G_n + \varepsilon_n F_1$. Sea $H_n = \langle G_n \rangle$. Como $R(T)$ es de tipo enumerable y los H_n son subespacios finitos de $R(T)$, existen proyecciones P_n de $R(T)$ sobre H_n con $\|P_n\| \leq |\alpha^{-1}|$, donde $\alpha \in K$, $0 < |\alpha| \leq 1$. Tenemos entonces que $(T - P_n T)(E_1) \subset \alpha^{-1} \varepsilon_n F_1$; como $P_n T \in F(E,F)$ obtenemos $T \in \overline{F(E,F)}$ y, por lo tanto, $\overline{F(E,F)} = S(E,F) = P(E,F)$.

3.4. Observaciones.

a) Como se puede deducir de la demostración de 3.3., en caso de que E y F sean espacios de Banach n.a., vale lo siguiente : o bien T es un operador precompacto o bien existe un subespacio cerrado de tipo enumerable M de dimensión infinita en E, tal que la restricción de T a M tenga un inverso continuo.

b) Si $E' = 0$, se tiene que no existen operadores precompactos o estrictamente singulares, diferentes de cero, de E en F.

c) Existen espacios de Banach n.a. de dimensión infinita, para los cuales $P(E,F) = L(E,F)$.

d) Si T es precompacto o estrictamente singular, también lo es su operador conjugado T'.

e) Se sabe que en el caso complejo la propiedad de aproximación (p.a.) para espacios l.c. es equivalente a la propiedad $\overline{F(E,F)} = C(E,F)$ para espacios de Banach E y F. Como ahora se sabe, del contraejemplo de Per Enflo aparece en nuestro caso una diferencia fundamental con el caso clásico. En el caso n.a. decimos que un espacio l.c. E sobre K *posee la propiedad de aproximación* si la aplicación idéntica se deja aproximar uniformemente en conjuntos precompactos por operadores de $F(E)$. Claro está que esta propiedad tiene solamente sentido si tenemos suficientes operadores en $F(E)$; esto es, si E' es total. Supondremos, por lo tanto que K es e.c. . Por analogía con el caso complejo, basta demostrar la propiedad de aproximación para espacios de Banach n.a. . Sea, pues, E un tal espacio y sea A un subconjunto precompacto de E. Entonces $\langle A \rangle$ es un espacio de de tipo enumerable y posee, por lo tanto, una base α-ortogonal (x_n) . Sea $\varepsilon \in K$; como A es precompacto, existe un $\Re$-módulo de tipo finito $\sum_{i=1}^{m} \Re y_i$, $y_i \in A$, tal que $A \subset \sum_{i=1}^{m} \Re y_i + \varepsilon F_1$. Sea $x \in \langle A \rangle$; entonces se tiene que

$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$. Sea P_n la proyección de $<A>$ definida por $P_n x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$; claro está, P_n tiene rango finito. Como $y_j \in A$, tenemos que $y_j = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^j x_i$ para $j = 1, \ldots, m$. Si escogemos $n_o \in \mathbb{N}$ de modo que $P_n y_j - y_j \in \varepsilon E_1$, para $n \geq n_o$, obtenemos que $P_n x - x \in \varepsilon E_1$, para todo $x \in A$ y $n \geq n_o$. Como todo espacio de dimensión finita sobre un cuerpo e.c. es e.c., el rango de P_n posee la propiedad de extensión. Existe, por lo tanto, una extensión continua P de P_{n_o} definida en todo E con el mismo rango que P_{n_o}. Para P se tiene entonces $Px - x \in \varepsilon E_1$, para todo $x \in A$. Para mayores detalles y otras consecuencias ver [2].

e) Si E es un espacio de Banach n.a., entonces $P(E)$ es un ideal de Riesz.

El siguiente corolario muestra otra diferencia con el caso complejo; en especial, para espacios reflexivos.

3.5. COROLARIO. Si E,F son espacios de Banach n.a. sobre un cuerpo e.c. K, se tiene que $C(E,F) = P(E,F) = DC(E,F)$.

Demostración : Por 3.2.c. basta mostrar la segunda igualdad. Supongamos que $T \in DC(E,F)$ y que existe un subespacio cerrado M sobre el cual T tiene una inverso continuo. Como la restricción de T a M es un isomorfismo topológico, la esfera unidad de M es débilmente compacta; por lo tanto, M es reflexivo. Pero en el caso n.a., los espacios reflexivos sobre cuerpos e.c. son los de dimensión finita. Obtenemos, en consecuencia, que T es estrictamente singular o precompacto por 3.3.

En los siguientes dos teoremas damos una caracterización del ideal de Riesz maximal.

3.6. TEOREMA. Sea E un espacio de Banach n.a. topológicamente isomorfo a un espacio esféricamente completo sobre K. Entonces el ideal $P(E)$ de los operadores precompactos es el Σ-ideal maximal. En particular, $P(E)$ es el ideal *de Riesz maximal y el álgebra* $L(E)/P(E)$ *es semisimple.*

Demostración: Supongamos que J sea un Σ-ideal en $L(E)$ y que exista un $T \in J$ con $T \notin P(E)$. De 3.4.a. se sigue que existe un subespacio cerrado de dimensión infinita $G \subset E$, en el cual T induce un isomorfismo topológico. T^{-1} está definido y es continuo para un subespacio cerrado de dimensión infinita H de E. Como E es isomorfo a un espacio e.c., existe una extensión continua $\overline{T} \in L(E)$ de T^{-1}, tal que $\overline{T}|H = T^{-1}$. Pero J es un ideal en $L(E)$, de donde se sigue que $\overline{T}T$ o $T\overline{T}$ está contenido en J, lo cual no es posible, ya que $N(I - T\overline{T})$ es de dimensión infinita.

Las otras propiedades siguen de 3.4.e. y de 1.10, ya que en 1.10 $F(E)$ puede ser reemplazado por $\overline{F(E)}$ en caso de que E sea un espacio de Banach n.a.

3.7. TEOREMA. *Sea E un espacio de Banach n.a. que admite una base. Entonces $P(E)$ es el Σ-ideal maximal. En particular, $P(E)$ es el ideal de Riesz maximal y el álgebra $L(E)/P(E)$ es semisimple.*

Demostración: La demostración es análoga a la de 3.6. En vez de utilizar la propiedad de extensión se utiliza aquí que todo subespacio de tipo enumerable H de un espacio de Banach n.a. que admite una base, es continuamente proyectado, esto es, existe una proyección continua $P \in L(E,H)$. Poniendo $\overline{T} = T^{-1}P$ se continua como en la demostración de 3.6.

3.8. Observaciones.

a) Existen espacios de Banach n.a. e.c. que no admiten una base [7] y al contrario.

b) Todo espacio de Banach n.a. sobre un cuerpo valuado discreto admite una base; podemos utilizar por lo tanto 3.7.

c) **Nótese que en 3.6 no es necesario que K sea e.c. . Si K es esféricamente completo tenemos que E' también lo es y utilizando 3.6 obtenemos :**

Si E es un espacio de Banach n.a. sobre un cuerpo e.c. K, entonces $P(E')$ es el Σ -ideal maximal y, por lo tanto, también el ideal de Riesz maximal de $L(E')$.

Este último hecho nos lleva a formular la siguiente conjetura que aún no ha podido demostrar el autor :

Si E es un espacio de Banach n.a. sobre un cuerpo e.c., se tiene que $P(E)$ es el Σ-ideal maximal y, por lo tanto, también es el ideal de Riesz maximal de $L(E)$; y, en consecuencia, $L(E)/P(E)$ es semisimple.

4. Operadores precompactos y estrictamente singulares en espacios l.c.

Sean E,F espacios l.c. sobre K. Sean $\Gamma(E)$ (resp., $\Gamma(F)$) familias de seminormas n.a. continuas saturadas que definen la topología de E (resp., F) .

4.1. DEFINICIÓN . **Sea $T \in L(E,F)$**

a) **T es *precompacto* (compacto), si existe una vecindad de cero V en E para la cual $T(V)$ es precompacto (relativamente compacto) en F .**

El espacio de los operadores precompactos (compactos) de E en F será denotado con $P(E,F)$ $(C(E,F))$.

b) **T es *completamente continuo,* si la imagen por T de todo conjunto acotado en E es precompacta en F .**

El espacio de los operadores completamente continuos será denotado $CC(E,F)$.

c) **T tiene la *propiedad S1,* si existe una vecindad de cero V en E, tal que para todo subespacio de dimensión infinita $M \subset E$ existe un subespacio de dimensión infinita $N \subset M$, tal que $T(V \cap N)$ sea precompacto en F .**

d) T tiene la *propiedad* $S2$, si para todo subespacio de dimensión infinita $M \subset E$ existe una vecindad de cero W en E y un subespacio de dimensión infinita $N \subset M$, tal que $T(W \cap N)$ sea precompacto en F.

e) T tiene *la propiedad* $S3$, si para todo subespacio de dimensión infinita $M \subset E$, la restricción de T a M no tiene un inverso continuo.

Con $Si(E,F)$ designamos el conjunto de los operadores acotados de E en F con la propiedad Si, para $i = 1,2,3$.

4.2. Observaciones.

a) Si $T \in P(E,F)$, entonces T es acotado y tiene cada una de las propiedades Si. Además, siempre se tiene $F(E,F) \subset C(E,F) \subset P(E,F) \subset CC(E,F)$.

Si F es *cuasicompleto*, esto es, si todo conjunto acotado y cerrado es completo, se tiene que $C(E,F) = P(E,F)$. En general, $P(E,F) \neq CC(E,F)$ [1].

b) Para espacios E,F cualesquiera se tiene siempre

$$P(E,F) \subset S1(E,F) \subset S2(E,F) \subset S3(E,F) \subset B(E,F) \subset L(E,F)$$

c) Los $Si(E,F)$ son subespacios lineales de $L(E,F)$.

d) Sean E,F,G espacios l.c. sobre K, $A \in L(E,F)$ y $B \in L(G,E)$; entonces si A o B tienen la propiedad Si, entonces también la tiene AB.

En particular, se tiene que los $Si(E)$ son ideales en $L(E)$.

e) (Gruson [5]). *Todo operador compacto es un operador de Riesz. Los operadores compactos forman, por lo tanto, un ideal de Riesz en caso de que* $C(E)$ *sea un ideal*.

f) Se tiene que $CC(E,F) \cap B(E,F) \subset S3(E,F)$: Sea $T \in CC(E,F) \cap B(E,F)$ y sea V una vecindad de cero tal que $T(V)$ sea acotado en F. Si T tiene un inverso continuo en un subespacio $G \subset E$, obtenemos que $V \cap G$ es una vecindad de cero precompacta, lo cual implica, por 1.5, que G es de dimensión finita. Se sigue que $T \in S3(E,F)$.

Si K es esféricamente completo tenemos que $\overline{F(E,F)} = CC(E,F)$, en donde la clausura se toma con respecto a la topología de la convergencia uniforme en conjuntos acotados. Esta propiedad se deduce inmediatamente de la propiedad de aproximación, que es válida en nuestro caso (3.4.e).

4.3. LEMA. Sea E un espacio n.a. normado sobre K y F un espacio l.c. sobre K. Se tiene entonces $P(E,F) = S1(E,F) = S2(E,F) = S3(E,F) = CC(E,F)$.

Demostración: Claro está que $P(E,F) = CC(E,F)$. Basta pues mostrar que si T tiene $S3$, entonces T es precompacto. Supongamos que $T \in B(E,F)$ no sea precompacto; demostraremos que T tiene un inverso continuo en un subespacio de dimensión infinita de E. En efecto, como T no es precompacto, existe una vecindad de cero W, en F, tal que $T(E_1) \not\subset H + W$, para todo $\mathfrak{R}$-módulo de tipo finito $H \subset F$. Sin pérdida de generalidad, sea $W = \{ y \in F : q(y) \leq 1$ con $q \in \Gamma(F) \}$. Como en la demostración de 3.3, escogemos una sucesión (x_n), $x_n \in E_1$, tal que para $\alpha \in K$, con $0 < |\alpha| < 1$, valga

$$\alpha^{-1} Tx_{n+1} \notin \alpha^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{R}(Tx_i) + W,$$

en donde $\alpha^{-1} Tx_{n+1} \in \alpha^{-1} T(E_1) \cap H_n$ y H_n es un complemento α-ortogonal en G de $< Tx_i : i = 1, \ldots, n >$, módulo $N(q)$, con respecto a la seminorma q. Hemos supuesto que $G \subset F$ se ha escogido de manera que $T(E_1) \cap G$ no sea precompacto y sea de tipo enumerable con respecto a q. Tenemos entonces que $q(\alpha^{-1} Tx_{n+1} - \alpha^{-1} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Tx_i) > 1$, para $\alpha_i \in R$. En particular, $q(Tx_n) > |\alpha| \, \|x_n\|$ para $n \in \mathbb{N}$. Sea $M = < x_n : n \in \mathbb{N} >$; entonces $T|_M$ tiene un inverso continuo, ya que para $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ se tiene

$$q(T \sum \alpha_i x_i) = q(\sum \alpha_i T x_i) \geq |\alpha| \, \text{máx}\, q(\alpha_i T x_i) \geq |\alpha^2| \, \text{máx} \|\alpha_i x_i\| \geq |\alpha^2| \, \|x\| \, .$$

En la siguiente proposición damos una caracterización de los operadores pre-compactos análoga al caso complejo.

4.4. PROPOSICIÓN. Sean E, F espacios l.c. sobre un cuerpo e.c. **K**. *Las siguientes propiedades de un operador acotado de E en F son equivalentes :*

a) T es precompacto .

b) Existe una seminorma n.a., $p \in \Gamma(E)$, tal que para todo $\varepsilon > 0$ y para toda seminorma n.a., $q \in \Gamma(F)$, existe un subespacio N de codimensión finita en E, tal que $q(Tx) \leq \varepsilon\, p(x)$, para todo $x \in N$.

Demostración: a) Escogemos $p \in \Gamma(E)$ tal que $V = \{ x \in E : p(x) \leq 1 \}$ sea una vecindad de cero cuya imagen sea precompacta. Sean $q \in \Gamma(F)$ y $\varepsilon > 0$. Como $T(V)$ es precompacto, existen $x_i \in V$, $i = 1, \ldots, n$, tales que, para cada $x \in V$ existen $\alpha_i \in \Re$, $i = 1, \ldots, n$ con

$$q(Tx - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T x_i) \leq |\alpha| \varepsilon \quad \text{y} \quad 0 < |\alpha| < 1 .$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los Tx_i son linealmente independientes. Por el teorema de Hahn-Banach-Ingleton existen funcionales continuos $y_i' \in F'$, $i = 1, \ldots, n$, con las siguientes propiedades :

$$q(Tx_i) \leq |y_i'(Tx_i)| \leq |\alpha^{-1}| \, q(Tx_i) \, , \quad y_j'(Tx_i) = 0 \quad \text{para } i \neq j$$

y además, $|y_i'(Tx)| \leq |\alpha^{-1}| \, q(Tx)$, para todo $x \in E$, $i = 1, \ldots, n$. Ponemos $N = \bigcap_{i=1}^{n} \{ x \in E : y_i'(Tx) = 0 \}$ Claro está que N tiene codimensión finita en E y para $x \in V \cap N$ se tiene $q(Tx) \leq \varepsilon$. Obtenemos, por lo tanto, para $x \in N$, si

$p(x) \neq 0$, que $q(Tx) \leq \varepsilon p(x)$. Si $p(x) = 0$ se tiene que $q(Tx) = 0$, lo que demuestra la desigualdad para todo $x \in N$.

b) Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $V = \{ x \in E : p(x) \leq 1 \}$ es la vecindad de cero cuya imagen es acotada en F. Pasando a $E/N(p)$ con la norma n.a., $\|\bar{x}\| = p(x)$, $x \in \bar{x}$, podemos suponer que E es normado. Tenemos que mostrar que $T(V)$ es precompacto. Sean $1 > \varepsilon > 0$ y $q \in \Gamma(F)$. Por hipótesis, existe un subespacio N de codimensión finita en E tal que $q(Tx) \leq \varepsilon \| x\|$ para $x \in N$. Tomando, si es preciso, $\bar{N}$ en vez de N podemos suponer que N es cerrado. Sea $E = N \oplus M$, en donde M es un complemento algebraico de N de dimensión finita y sea $x_1, \ldots, x_n$ una base ortogonal de M. Sea $N_i = N \oplus < x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n >$. Entonces N_i es un subespacio cerrado de E, para $i = 1, \ldots, n$. Podemos escoger, en consecuencia, $x_i' \in E'$, con $x_i'(x_j) = \delta_{ij}$ y $x_i'(x) = 0$, para $x \in N_i$. Se tiene entonces que $Px = \sum_{i=1}^{n} x_i'(x) x_i$ es una proyección continua de E sobre M a lo largo de N; esto es, cada $x \in E$ se puede representar en forma única como $x = y + \sum_{i=1}^{n} x_i'(x)\, x_i$ con $y \in N$. Se sigue que

$$q(Tx) \leq máx\,(q(Ty),\ q(\sum_{i=1}^{n} x_i'(x)\, Tx_i)) \leq máx(q(Ty),\ máx_i\ | x_i'(x) |\ q(Tx_i))$$

y que

$$\|y\| \leq máx\,(\|x\|,\ máx_i\ | x_i'(x) |\, \|x_i\|).$$

Si ponemos $r = máx\,(q(Tx_i),\ \|x_j\|)$ y observamos que $q(Ty) \leq \varepsilon \|y\|$ obtenemos

$$(*) \qquad q(Tx) \leq máx\,(\varepsilon \|x\|, \varepsilon r |x_i'(x)|,\ r |x_j'(x)|).$$

Como V es acotado, existen $y_i \in V$, $i = 1, \ldots, m$, tales que para $v \in V$ existen $\alpha_i \in \Re$ $i = 1, \ldots, m$ con

$$| x_j'(v - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i) | \leq \frac{\varepsilon}{r} =: s, \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, n.$$

(La demostración es análoga al caso complejo y depende solamente de que todo conjunto acotado en K^n es precompacto). Si sustituimos en (*) x por $x = v - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i$ obtenemos

$$q(T(v - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i)) \leq máx(\varepsilon, \varepsilon rs, rs) \leq \varepsilon$$

o sea que $T(V)$ es precompacto.

Con ayuda de esta caracterización pueden darse caracterizaciones similares para los operadores con la propiedad Si.

En lo que sigue demostramos que los operadores acotados con la propiedad Si son operadores de Riesz.

4.5. Observación. Sean E,F espacios l.c. sobre K. Si U es una vecindad de cero convexa en E sea $p_U(x) := inf \{|\alpha| : x \in \alpha U\}$ la seminorma n.a. continua definida por U. Entonces $E(U) = E(p_U) = E/N(p_U)$ es un espacio n.a. normado, si definimos $||x|| = p_U(x)$, para $x \in \bar{x} \in E(U)$. Con h_U designamos el homomorfismo canónico de E sobre $E(U)$, claro está, éste es continuo. Si $T \in B(E,F)$ existe una vecindad de cero U en E, tal que $T(U)$ es acotado en F y U puede ser escogido como $\Re$-módulo. El operador $\bar{T} : E(U) \to F$ definido por $\bar{T}\bar{x} = Tx$, para $x \in \bar{x} \in E(U)$, está bien definido y es acotado. Se tiene finalmente que $T = \bar{T} h_U$.

4.6. PROPOSICIÓN. Sea $T \in B(E,F)$ acotado para la seminorma n.a., $p \in \Gamma(E)$. Si T tiene la propiedad $S1$ entonces también la tiene $\bar{T} \in L(E(p), F)$. En particular, T es precompacto y obtenemos con $P(E,F) = S1(E,F)$ una nueva caracterización de los operadores precompactos, esta vez sin análogo complejo.

Demostración : Si $E(p)$ es de dimensión finita la conclusión es inmediata. Sea por lo tanto $\bar{M}$ un subespacio de dimensión infinita y sea $\{\bar{x}_i : i \in I\}$ una base algebraica de $\overline{M}$. Ponemos $M = \langle x_i : x_i \in E$ representante de $\overline{x}_i \rangle$. Se tiene que $dim\, M = dim\, \overline{M}$ y h_p induce un isomorfismo algebraico de M sobre $\overline{M}$. Sea $V = \{ x \in E : p(x) \leq 1 \}$; sin pérdida de generalidad podemos suponer que V es la vecindad de cero que aparece en la definición de los operadores con $S1$ (4.1.c). Como T tiene la propiedad $S1$ existe un subespacio $N \subset M$ de dimensión infinita tal que $T(V \cap N)$ es precompacto en F. $\overline{N} = h_p(N)$ es un subespacio de dimensión infinita de $\overline{M}$ y se tiene

$$\overline{T}\,(h_p(V \cap N)\,) = \overline{T}\,(h_p(V) \cap \overline{N}) = T(V \cap N)\,.$$

De manera que $\overline{T}\,(h_p(V) \cap \overline{N})$ es precompacto en F. Hemos demostrado que $\overline{T}$ tiene la propiedad $S1$, ya que $h_p(V)$ es la esfera unidad de $E(p)$. Por el lema 4.3 obtenemos que $\overline{T}$ es precompacto y, por lo tanto, $T = \overline{T} h_p$ también es precompacto.

4.7. *LEMA. Sean E,F,G espacios l.c. sobre K, $S \in B(E,F)$ y $T \in L(F,G)$. Si T tiene la propiedad $S2$ o $S3$, TS es precompacto.*

Demostración : Supongamos que S es acotado con respecto a $p \in \Gamma(E)$. Tenemos entonces

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h_p"] \arrow[rr, bend right, "S"'] & E(p) \arrow[r, "\overline{S}"] & F \arrow[r, "T"] & G \end{tikzcd}$$

$T\overline{S}$ tiene la propiedad $S2$ o $S3$ por 4.2.d. Del lema 4.3 deducimos que $T\overline{S}$ es precompacto; pero entonces $TS = T\overline{S}h_p$ también es precompacto.

4.8. *COROLARIO. Si $T \in Si(E)$ entonces T^2 es precompacto.*

Para la demostración del siguiente teorema utilizamos el siguiente resultado de Pietsch [8] que también vale en el caso n.a. : *Si T^n, $n > 0$, es un operador de*

Riesz, también lo es T.

4.9. TEOREMA. *Sea E un espacio l.c. cuasicompleto sobre K, entonces $S2(E)$ y $S3(E)$ son ideales de Riesz.*

Demostración: Sea $T \in Si(E)$, $i=2,3$. T^2 es precompacto y, por lo tanto, compacto por 4.2.a. De 4.2.e se sigue que T^2, y por lo tanto también T, es un operador de Riesz.

4.10. *Nota final.* El teorema 9 puede ser generalizado utilizando el método desarrollado por Pietsch en [8] a espacios l.c. para los cuales toda sucesión de Cauchy es convergente. Queda por resolver el problema de la caracterización de los espacios para los cuales $P(E,F) \neq S2(E,F) \neq S3(E,F)$. Nótese en esta dirección, que si F es semireflexivo (todo conjunto acotado es precompacto), entonces $P(E,F) = B(E,F)$. Por otra parte, si E no es un espacio de Schwartz se tiene, por lo general, que $P(E,F) \neq B(E,F)$, y si E es semireflexivo, $S3(E,F) = B(E,F)$.

REFERENCIAS

1. De Grande-De Kimpe, *On spaces of operators between locally K-convex spaces* Indag. Nath., 34, 112- 130 (1972).

2. ——————————, *On the Grothendieck approximation property in non-archimedean analysis.* Preprint apareció en Nieuw Archief v. Wisk. 1973.

3. Ellis, R. L., *The Fredholm alternative for non-archimedean fields.* J. Lond. Math. Soc., 42, 701-705 (1967).

4. Gramsch, B. *Ein Schema zur Theorie Fredholmscher Endomorphismen und eine Anwendung auf die Idealkette der Hilberträume.* Math. Annalen 171, 263-272 (1967).

5. Gruson, L., *Théorie de Fredholm p-adique.* Bull. Soc. Math. France 94, 67-95 (1966).

6. ——————, *Categories d'espaces de Banach ultramétriques.* Bull. Soc. Math. France 94, 287-299 (1966).

7. *Monna, A. F., Analyse non-archimediénne.* Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete Bd. 56 (1970).

8. *Pietsch, A., Zur Theorie der σ-Transformationen in lokalkonvexen Räumen.* Math. Nachr. 21, 347-369 (1960).

9. *Put van der, M., Espaces de Banach non-archimediens.* Bull. Soc. Math. France 97, 309-320 (1969).

10. ——————, *The ring of bounded operators on a non-archimedean normed space.* Indag. Math. 30, 260-264 (1968).

11. *Serre, J. P., Endomorphismes complétement continues des espaces de Banach p-adiques* I.H.E.S.12, 69-85 (62).

12. *Tiel van, J., Espaces localement K-convexes.* Indag. Math. 27 249-258. 259-272 273-289 (1965).

13. ——————, *Une note sur les applications complétement continues.* Indag.Math. 27,772-776 (1965).

Fachbereich Mathematik U. Trier-Kaiserslautern

675 Kaiserslautern Pfaffenbergstr. 95

Alemania

(Recibido en marzo de 1974).