Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VIII(1974), págs. 177 - 182

UNA DEMOSTRACIÓN SENCILLA Y ELEMENTAL DE LA DESIGUALDAD DE YOUNG

por

José I. NIETO

A Monsieur Henri Yerly à l'ocassion de son soixante-douzième anniversaire.

En esta nota se da una demostración de un teorema bastante conocido y útil debido a W. H. Young [2] . El teorema afirma la validez de una desigualdad, que contiene dos integrales, y da la condición para que se tenga igualdad. El teorema es tal que si se recurre a la interpretación geométrica de la integral como un área, el teorema es "intuitivamente evidente", que es la expresión que usan muchos autores como argumento de demostración. La situación es análoga a la de la famosa proposición que "toda curva simple y cerrada del plano divide al plano en dos regiones disyuntas, de las cuales sólo una es acotada". En efecto, esta proposición se conoce hoy como el teorema de Jordan, por haber sido Camille Jordan el primero en señalar (en 1892) que dicha proposición, "intuitivamente evidente", requería una prueba, que él también trató de dar. Vale la pena mencionar que su demostración era incompleta, y que sólo fue en 1902 cuando O. Veblen vino a presentar una demostración completa y rigurosa del teorema de Jordan.

La demostración del teorema de Young que se presenta aquí sólo supone que se conozca la definición de la integral de Riemann y la existencia de tal integral para una función continua en un intervalo cerrado (por lo tanto uniformemente continua), lo cual requiere un mínimo de conocimientos de parte del lector. Por este motivo la demostración tiene un valor didáctico. Hay además dos razones para publicar esta demostración. La primera, porque en algunos libros la demostración que se da no es correcta, como por ejemplo en [1], en donde se hace uso de una integración por partes, permisible sólo bajo hipótesis adicionales. La segunda, porque a veces se enuncia el teorema en una forma poco general, que es la que aquí formulamos como corolario, y además en su enunciado se olvida mencionar que la función en cuestión ϕ debe satisfacer la condición $\lim_{s \to \infty} \phi(s) = \infty$. Sin esa condición, la integral de la función inversa ψ puede no tener un significado.

Finalmente, para no caer en un pedantismo analítico de tipo Lagrange (quien se jactaba de que en su gran obra *Mécanique Analytique* no aparecía ninguna figura), se ha incluído, por motivos pedagógicos, una figura, pero sólo después de haber demostrado el teorema.

TEOREMA (Young [2]). *Sea ϕ una función continua y estrictamente creciente en el intervalo $[0,c]$, con $c > 0$, y tal que $\phi(0) = 0$. Si ψ es la función inversa de ϕ, entonces*

$$(1) \qquad xy \leq \int_0^x \phi(s)ds + \int_0^y \psi(t)\,dt \quad \text{para todo} \quad x \in [0,c],\ y \in [0,\phi(c)].$$

Además se tiene igualdad si y sólo si $y = \phi(x)$.

Demostración. Comencemos por demostrar que para todo $x \in [0,c]$:

$$(2) \qquad x\,\phi(x) = \int_0^x \phi(s)\,ds + \int_0^{\phi(s)} \psi(t)\,dt.$$

Como el caso $x=0$ es trivial, supongamos $x>0$. A cada número entero $n \geq 1$

se le puede asociar la partición $P_n = \{0, x/n, 2\cdot x/n, \ldots, ix/n, (i+1)x/n, \ldots, x\}$ del intervalo $[0,x]$, la cual nos da n subintervalos $[ix/n, (i+1)x/n]$ $(i=0,\ldots,n-1)$, cada uno de longitud x/n. A P_n corresponde la suma inferior de Riemann de la función ϕ :

$$I(P_n, \phi) = \sum_{i=o}^{n-1} \phi(i\tfrac{x}{n})\tfrac{x}{n} = \frac{x}{n}\cdot \sum_{i=1}^{n-1} \phi(i\tfrac{x}{n}) .$$

Además, al mismo entero n se le puede hacer corresponder la partición $P'_n = \{0 = \phi(0), \phi(\frac{x}{n}), \phi(2\frac{x}{n}), \ldots, \phi(i\frac{x}{n}), \phi((i+1)\frac{x}{n}), \ldots, \phi(x)\}$ del intervalo $[0,\phi(x)]$, a la cual corresponde la suma superior de Riemann de la función ψ :

$$S(P'_n, \psi) = \sum_{i=o}^{n-1} \psi(\phi((i+1)\tfrac{x}{n}))(\phi((i+1)\tfrac{x}{n}) - \phi(i\tfrac{x}{n}))$$

$$= \frac{x}{n}\cdot \sum_{i=o}^{n-1} (i+1)(\phi(i+1)\tfrac{x}{n}) - \phi(i\tfrac{x}{n})).$$

Por otra parte para todo n se tiene

$$(3) \qquad I(P_n, \phi) + S(P'_n, \psi) = x\,\phi(x) ,$$

ya que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \phi(i\tfrac{x}{n}) + \sum_{i=o}^{n-1} (i+1)(\phi((i+1)\tfrac{x}{n}) - \phi(i\tfrac{x}{n})) = \sum_{i=o}^{n-1} (i+1)\phi((i+1)\tfrac{x}{n}) - \sum_{i=1}^{n-1} i\phi(i\tfrac{x}{n})$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} j\phi(j\tfrac{x}{n}) + n\phi(x) - \sum_{i=1}^{n-1} i\phi(i\tfrac{x}{n}) = n\phi(x) .$$

Por ser ϕ continua en $[0,x]$, también lo es ψ en $[0,\phi(x)]$. Por consiguiente existen las integrales $\int_o^x \phi(s)\,ds$, $\int_o^{\phi(x)} \psi(t)\,dt$. Además, debido a la continuidad uniforme de ϕ en $[0,x]$, cuando n tiende a infinito la longitud de cada subintervalo $[\phi(i\frac{x}{n}), \phi((i+1)\frac{x}{n})]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$ tiende a cero, de modo que en virtud de la definición misma de la integral de Riemann se tiene

$$\lim_{n\to\infty} I(P_n, \phi) = \int_0^x \phi(s)\, ds \;, \quad \lim_{n\to\infty} S(P_n', \psi) = \int_0^{\phi(x)} \psi(t)\, dt \;,$$

de lo cual se deduce, utilizando (3), la fórmula (2).

De (2) resulta que para demostrar el teorema basta establecer que si $y \neq \phi(x)$, entonces

$$xy < \int_0^x \phi(s)\, ds + \int_0^y \psi(t)\, dt \,.$$

Supongamos que $y > \phi(x)$. Por ser ψ estrictamente creciente, si $t \in (\phi(x), y)$ entonces $x < \psi(t)$, y por consiguiente

$$\int_{\phi(x)}^y \psi(t)\, dt > x(y-\phi(x)) \;,$$

de lo cual resulta que

$$xy = x\,\phi(x) + x(y-\phi(x)) < \int_0^x \phi(s)\, ds + \int_0^{\phi(x)} \psi(t)\, dt + \int_{\phi(x)}^y \psi(t)\, dt =$$

$$= \int_0^x \phi(s)\, ds + \int_0^y \psi(t)\, dt \;.$$

Si $y < \phi(x)$, entonces

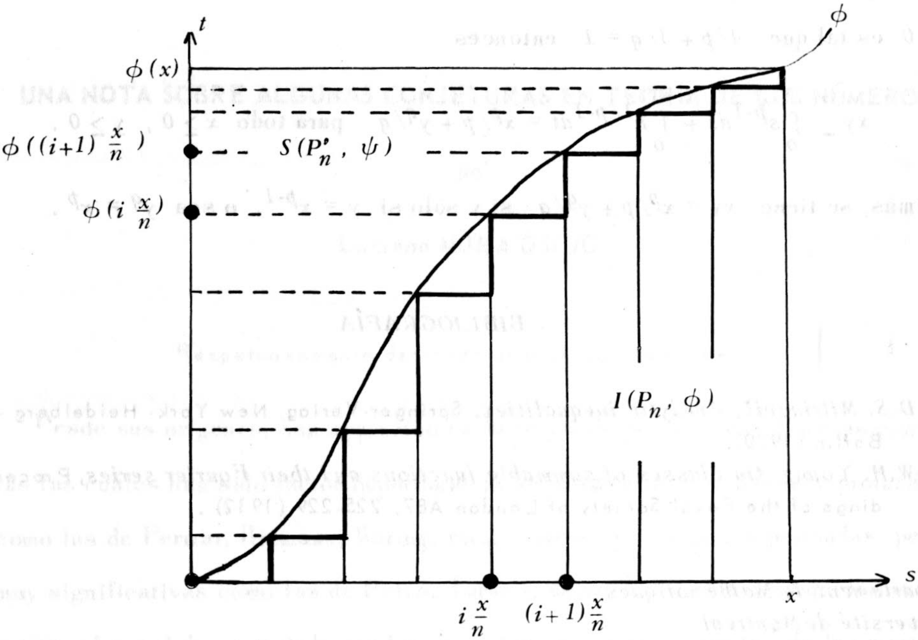
$$\int_y^{\phi(x)} \psi(t)\, dt < x(\phi(x) - y) \;,$$

y por lo tanto

$$xy = x\phi(x) - x(\phi(x)-y) < \int_0^x \phi(s)\, ds + \int_0^{\phi(x)} \psi(t) dt - \int_y^{\phi(x)} \psi(t)\, dt = \int_0^x \phi(s)\, ds + \int_0^y \psi(t)\, dt \;,$$

lo cual concluye la demostración.

La figura adjunta ayuda a comprender mejor la demostración de (2) y (3).



COROLARIO. Sea ϕ continua y estrictamente creciente en $[0,\infty)$ y tal que $\phi(0)=0$, $\lim_{s\to\infty}\phi(s)=\infty$. Si ψ es la función inversa, entonces

$$(4) \qquad xy \leq \int_0^x \phi(s)\,ds + \int_0^y \psi(t)\,dt \quad \text{para todo} \quad x \geq 0\,,\; y \geq 0\,.$$

La igualdad se cumple si y sólo si $y=\phi(x)$.

Demostración. En primer lugar la condición $\lim_{s\to\infty}\phi(s)=\infty$ implica que ψ está definida en $[0,\infty)$, y por consiguiente la integral $\int_0^y \psi(t)\,dt$ está bien definida para todo $y\geq 0$. (4) resulta de (1) tomando c suficientemente grande y tal que $y\leq\phi(c)$. (En efecto, $\lim_{s\to\infty}\phi(s)=\infty$ significa que para todo $y\geq 0$ existe $c>0$

tal que $y \leq \phi(c)$.)

Ejemplo. Sea $\phi(s) = s^{p-1}$, con $p > 1$. ϕ satisface las condiciones del corolario y tiene como función inversa $\psi(t) = t^{1/p-1}$. Del corolario resulta que si $q > 0$ es tal que $1/p + 1/q = 1$ entonces

$$xy \leq \int_0^x s^{p-1} ds + \int_0^y t^{1/p-1} dt = x^p/p + y^q/q \quad \text{para todo } x \geq 0\,,\ y \geq 0\,.$$

Además, se tiene $xy = x^p/p + y^q/q$ si y sólo si $y = x^{p-1}$, o sea $y^q = x^p$.

BIBLIOGRAFÍA

1. D.S. Mitrinovič, *Analytic inequalities*, Springer-Verlag, New York- Heidelberg - Berlin (1970).
2. W.H. Young, *On classes of summable functions and their Fourier series*, Proceedings of the Royal Society of London A87, 225-229 (1912).

Département de Mathématiques
Université de Montréal
Montréal, Canada

(*Recibido en octubre de 1973*).