Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VIII (1974), págs. 183-189

UNA NOTA SOBRE ALGUNAS CONJETURAS EN TEORÍA DE LOS NÚMEROS

por

Luciano MORA OSEJO

Respetuosamente dedicado al profesor Henri Yerly

Desde sus orígenes, han aparecido en la teoría de los números diversas conjeturas las cuales han sido factor importante en su desarrollo. Las hay muy profundas como las de Fermat, Riemann, Waring, etc., y otras tal vez menos profundas, pero muy significativas como las de Pólya, Turán y Mertens. En esta nota queremos comentar el papel desempeñado por las computadoras en la "derrota" de las conjeturas de Pólya, Turán y Mertens, y presentar algunas implicaciones sencillas de estos hechos en otras situaciones directamente emparentadas con ellos.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z$, con n un entero positivo y $z = x + iy$, es absolutamente convergente en el semiplano cerrado $x \geq 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, arbitrario) y, por lo tanto, representa una función holomorfa en el semiplano $x > 1$. Esta función es la función $\zeta(z)$ introducida por Riemann en 1859 y cuyo papel fundamental en la teoría de los números es bien conocido. Para nuestros propósitos, definimos las funciones de Möbius : $\mu(n)$, de Liouville : $\lambda(n)$ y de Vinográdov : $v(n)$ mediante las siguientes expresiones, harto conocidas :

$$(1) \qquad \prod_p \left(1-\frac{1}{p^z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z} \quad [3 : \text{pág. } 148],$$

$$(2) \qquad \frac{\zeta(2z)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^z} \quad [2 ; \text{pág. } 141],$$

$$(3) \qquad \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^z} \quad [3 ; \text{pág. } 148],$$

donde $R(z) = x > 1$, p es un número primo y n un entero positivo. Ellas pueden definirse también, en forma más directa, como sigue :

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 \quad \textit{si } n \textit{ es divisible por un cuadrado distinto de } 1 \textit{ y} \\ (-1)^k \quad \textit{en caso contrario, donde } k \textit{ es el número de divisores primos} \\ \textit{del entero } n . \end{cases}$$

$\lambda(n) = (-1)^k$, k con el mismo significado anterior ;

$$v(n) = \begin{cases} \text{en } p \text{ si } n = p^m \,; \\ 0 \text{ en los otros casos.} \end{cases}$$

Pólya observó que $L(n) = \sum_{n \leq N} \lambda(n)$ era negativa para $2 \leq N \leq 1.500$ y conjeturó que siempre lo era. G. B. Haselgrove [2] confirmó la observación hasta $N \leq 250.000$ y D. H. Lehmer hasta $N \leq 600.000$. Sin embargo, el mismo profesor Haselgrove, en 1958 [1], utilizando funciones construidas por Ingham y basadas en la conjetura de Riemann (*todos los ceros no triviales de* $\zeta(z)$ *están sobre la recta* $z = \frac{1}{2} + it$), computó con la EDSAC del Laboratorio de Matemáticas de la Universidad de Cambridge, los primeros 1.500 ceros de la hipótesis de Riemann y mostró que $L(N)$ cambia de signo en las cercanías de $N = 1,85 \times 10^{231}$ (directamente era imposible hacerlo, aún con la computadora). El mismo año corrió igual suerte la *conjetura de Turán* :

$$\sum_{n \leq N} \frac{\lambda(n)}{n} \geq 0 \qquad (N \geq 1) \ ;$$

y se tardó un poco más en descartar la *conjetura de Mertens* :

$$Si \ \ M(N) = \sum_{n \leq N} \mu(n), \quad entonces \quad | M(N) | < \sqrt{N} \quad .$$

Con estos antecedentes intentamos explorar algunas repercusiones inmediatas. Por ejemplo, se pueden separar la "parte par" y la "parte impar" de la función $\zeta(z)$ y buscar expresiones similares a *(2)* para cada una de ellas y estudiar el comportamiento de las sumas de los coeficientes. Para $R(z) > 1$, escribimos

$$P(z) = \frac{1}{2^z} + \frac{1}{4^z} + \frac{1}{6^z} + \cdots \qquad (parte\ par) ,$$

$$I(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} + \cdots \qquad (parte\ impar) ,$$

o sea

$$P(z) = 2^{-z}\zeta(z) \quad , \qquad I(z) = (1-2^{-z})\,\zeta(z) ,$$

como puede verificarse fácilmente. Por consiguiente :

$$\frac{P(2z)}{P(z)} = 2^{-z}\,\frac{\zeta(2z)}{\zeta(z)} = 2^{-z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{(2n)^z} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(2n)}{(2n)^z} \ ;$$

y también

$$\frac{I(2z)}{I(z)} = \frac{1-2^{-2z}}{1-2^{-z}}\,\frac{\zeta(2z)}{\zeta(z)} = (1+2^{-z})\,\frac{\zeta(2z)}{\zeta(z)} = \frac{\zeta(2z)}{\zeta(z)} + \frac{P(2z)}{P(z)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^z} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(2n)}{(2n)^z} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(2n-1)}{(2n-1)^z} \ .$$

En otras palabras, los coeficientes son separables y podemos considerar las sumas

$$P(N) = \sum_{2n \leq N} \lambda(2n) \quad \text{y} \quad I(N) = \sum_{2n-1 \leq N} \lambda(2n-1) .$$

Para $2 \leq N \leq 20$ **tenemos la tabla siguiente :**

n	$\lambda(2n)$	$\Sigma\,\lambda(2n)$	$\lambda(2n-1)$	$\Sigma\,\lambda(2n-1)$
2	-1	-1		
3			-1	-1
4	1	0		
5			-1	-2
6	1	1		
7			-1	-3
8	-1	0		
9			1	-2
10	1	1		
11			-1	-3
12	-1	0		
13			-1	-4
14	1	1		
15			1	-3
16	1	2		
17			-1	-4
18	-1	1		
19			-1	-5
20	-1	0		

Para $2 \leq N \leq 100$ **se verifica que** $P(N) > 0$ **é** $I(N) < 0$ **. ¿ Es esto cierto para todo** N **?**

Con el objeto de examinar otras posibilidades, la conocida relación

$$\zeta(z) = \prod_p \left(\frac{1}{1-p^{-z}} \right) ,$$

donde p recorre todos los números primos, con la fórmula *(1)* nos da :

$$- \ln \zeta(z) = \sum_p \ln\left(1 - \frac{1}{p^z}\right) = \ln \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} .$$

Derivando la primera y la última funciones (ésta es holomorfa si $R(z) > 1$) y teniendo en cuenta la fórmula *(3)*, resulta que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v(n)}{n^z}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^z}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) \ln n}{n^z} ,$$

y esto sugiere comparar los comportamientos de $\left(\sum_{n \leq N} \mu(n)\right)\left(\sum_{n \leq N} v(n)\right)$ y $\sum_{n \leq N} \mu(n) \ln n$; en particular, de

$$W(N) = \left(\sum_{n \leq N} \mu(n)\right)\left(\sum_{n \leq N} v(n)\right) + \sum_{n \leq N} \mu(n) \ln n .$$

Para los *19* primeros enteros positivos se tiene la tabla adjunta. Como se ve en ella, en este intervalo $W(N) < 0$ y esto se comprueba también para $N \leq 100$. ¿Se puede afirmar lo mismo para todo N?

Prosiguiendo en la misma dirección, se pueden examinar las circunstancias análogas relacionadas con la función $Z(z)$, una generalización de la función $\zeta(z)$ de Riemann, realizada por Hecke en la forma :

$$Z(z) = \sum_m \frac{1}{|m|^{2z}} \exp(4i \arg m) ,$$

donde m recorre ahora los enteros del cuerpo numérico de Gauss, excepto 0 ; esto lo intentaremos posteriormente.

De todos modos, después del trabajo pionero de Haselgrove [1], cada vez que aparezca una nueva conjetura en la teoría de los números, la computadora, adecuadamente programada, tiene la palabra; y las conjeturas acompañarán a la teoría de

n	$\mu(n)$	$ln\,(n)$	$v(n)$	$ln\,(n)\,\mu(n)$	$\sum \mu\,(n)$	$\sum v(n)$	$\sum ln\,(n)\,\mu\,(n)$
2	-1	0,693	0,693	-0,693	-1	0,693	-0,693
3	-1	1,098	1,098	-1,098	-2	1,791	-1,791
4	0	1,386	1,693	0,000	-2	2,484	-1,791
5	-1	1,609	1,609	-1,609	-3	4,093	-3,460
6	1	1,791	0,000	1,791	-2	4,093	-1,669
7	-1	1,946	1,946	-1,946	-3	6,039	-3,615
8	0	2,079	0,693	0,000	-3	6,732	-3,615
9	0	2,197	1,098	0,000	-3	7,830	-3,615
10	1	2,303	0,000	2,303	-2	7,363	-1,312
11	-1	2,398	2,398	-2,398	-3	9,701	-3,710
12	0	2,485	0,000	0,000	-3	12,186	-3,710
13	1	2,565	2,565	-2,565	-4	14,751	-6,275
14	1	2,639	0,000	2,639	-3	14,751	-3,636
15	1	2,708	0,000	2,708	-2	14,751	-0,928
16	0	2,773	0,693	0,000	-2	15,444	-0,928
17	-1	2,834	2,834	-2,834	-3	18,278	-3,762
18	0	2,891	0,000	0,000	-3	18,278	-3,762
19	-1	2,945	2,945	-2,945	-4	21,222	-6,707
20	0	2,996	0,000	0,000	-4	21,223	-6,707

los números inevitablemente, quizás por la misma "discreta infinitud" de los enteros en donde se diluye la identificación concreta de los hechos numéricos, cualquiera que sea el sistema de numeración empleado y por fino que sea el instrumento de análisis logrado. Y en este aspecto la teoría de los números se asemeja a la Física con sus grandes hipótesis; sólo que aquí las computadoras con sus algoritmos y lenguajes proporcionan el campo experimental.

REFERENCIAS

1. *C. B. Haselgrove, Applications of digital computers in mathematics,* Math. Gaz., 52(1958), 259-260.
2. *C. B. Haselgrove, A disproof of a conjecture of Pólya,* Mathematika, 5(1958), 141-145.
3. *I. M. Vinográdov, Fundamentos de la teoría de los números,* Mir, Moscú, 1971.
4. *K. Knopp, Theory of functions, v. 2,* Dover, New York, 1947.
5. *D. H. Lehmer, Extended computation of the Riemann zeta function,* Mathematika, 3(1956), 102-108.

Sección de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Manizales, Colombia S. A.

(Recibido en febrero de 1974)