Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VIII (1974), págs. 191-206

OBSERVACIONES DIDÁCTICAS SOBRE EL CÁLCULO CON NÚMEROS ORDINALES

por

Otto BAESSLER

Dedicado al Dr. Henri Yerly, bajo cuya dirección he pasado los años más satisfactorios de mi profesión.

Para muchos principiantes en la teoría de los conjuntos resulta más difícil tratar números ordinales que cardinales. La razón es, según me parece, que el concepto del número cardinal puede relacionarse fácilmente con el concepto de cantidad, mientras que en el caso de los números ordinales semejante ayuda aparentemente no existe.

El objeto de estas páginas es mostrar, que una simple representación geométrica permite "ver" números ordinales y muchas de sus propiedades. De las proposiciones que siguen, voy a suprimir algunas demostraciones bien conocidas.

Sean A un conjunto cualquiera y R una relación de buen orden sobre A, es decir, una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, con respecto a la cual cada subconjunto no vacío de A tiene un primer elemento. Al conjunto A bien ordenado por R le asignamos el símbolo (A,R). El primer elemento de A lo designamos con $m\acute{\imath}n\, A$, el último elemento (si existe) lo designamos con $m\acute{a}x\, A$ (en algunos casos puede ser necesario escribir más correctamente $mín\,(A,R)$ y $máx\,(A,R)$). En vez de $(a_1, a_2) \in R$ escribimos $a_1 R a_2$ o simplemente $a_1 \leq a_2$. (Generalmente el contexto determina a cuál relación se refiere el símbolo $\leq$). $a_1 < a_2$ significa $a_1 \leq a_2$ y $a_1 \neq a_2$.

(1) DEFINICIÓN. Dos conjuntos bien ordenados (A,R) y (B,S) se llaman *isomorfos* (símbolo $(A,R) \approx (B,S)$), si existe una biyección monótona entre ambos conjuntos, es decir, una biyección $f: A \to B$ que satisfaga

$$a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2) \quad \text{para toda} \quad a_1, a_2 \in A .$$

f se llama un *isomorfismo.*

Obviamente, conjuntos isomorfos coinciden en todas sus propiedades que se refieren al orden. Por ejemplo, el último elemento existe ó en ambos conjuntos ó en ninguno de ellos.

(2) PROPOSICIÓN Y DEFINICIÓN. Dada una familia $\mathfrak{F} := \{(A_i, R_i) \mid i \in \mathfrak{I}\}$ de conjuntos bien ordenados, la relación "$\approx$" es una relación de equivalencia sobre $\mathfrak{F}$. La clase de equivalencia $\overline{(A,R)}$, engendrada por $(A,R) \in \mathfrak{F}$, la llamamos el *número ordinal* de (A,R). Designamos números ordinales por lo general con letras griegas : $\alpha = \overline{(A,R)}$. Cada elemento de la clase $\overline{(A,R)} = \alpha$ se llama un representante del número ordinal α.

Nota. Esta definición tiene el problema de que la definición del número ordinal depende de la familia $\mathfrak{F}$. (Desafortunadamente, el concepto de la familia de *todos* los conjuntos bien ordenados es contradictorio). Este problema es serio. Se puede superar usando la definición del número ordinal de v. Neumann, definición totalmente distinta, más abstracta y más difícil para usarla de base para un desarrollo de ideas intuitivas. Para un principiante, el desarrollo de tales ideas intuitivas es esencial. Es por eso, que en un primer curso de teoría de conjuntos prefiero la definición (2) a la de v.Neumann. Las propiedades comunes de números ordinales se pueden demostrar correctamente, imaginándose $\mathcal{F}$ "suficientemente" grande.

Poniendo $\mathbb{N}_{(n)} := \{1, 2, \ldots, n\}$ y designando por el momento con $\leq$ el orden común entre números naturales, podemos introducir los *números ordinales finitos* :

$$\underline{n} := \overline{(\mathbb{N}_{(n)}, \leq)} \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N} .$$

Siendo $R = \phi$ un buen orden del conjunto $A = \phi$, ponemos

$$\underline{0} := \overline{(\phi, \phi)} .$$

Los números ordinales no finitos se llaman *transfinitos*. Ponemos

$$\omega := \overline{(\mathbb{N}, \leq)} .$$

Ahora bien, representamos un número ordinal $\alpha = \overline{(A, R)}$ geométricamente por un representante (A,R) dibujado en forma de una flecha :

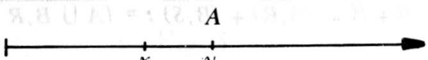

Fig. 1

En el dibujo vemos $x < y$. El orden $R \subseteq A \times A$ se puede representar geométricamente en la siguiente forma :

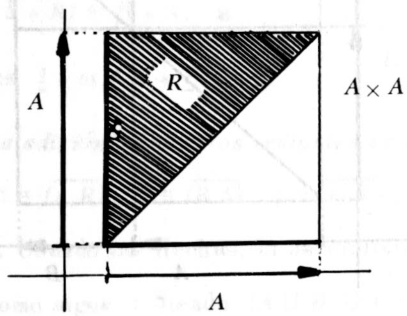

Fig. 2

(3) DEFINICIÓN. Adición de números ordinales. Sean α, β números ordinales con representantes (A,R) y (B,S), donde $A \cap B = \phi$. (Tales representantes disyuntos siempre se pueden construir e incluir en la familia $\mathfrak{F}$). Entonces $\alpha + \beta$ es el número ordinal del conjunto $A \cup B$, bien ordenado según la siguiente figura :

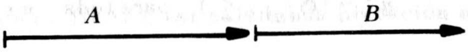

Fig. 3

El dibujo ya dice todo. Pero definámoslo exactamente :

Para toda $x, y \in A \cup B$ definimos

$$x \leq y :<=> (x \in A \wedge y \in B) \vee (x, y \in A \wedge xRy) \vee (x, y \in B \wedge xSy).$$

Bautizamos este orden con $R + S$, así que

$$\alpha + \beta = \overline{(A,R)} + \overline{(B,S)} := \overline{(A \cup B, R + S)}.$$

De la definición de $R + S$ se puede concluir

$$R + S = R \cup S \cup A \times B \text{ (compárense las figuras 2 y 4)}$$

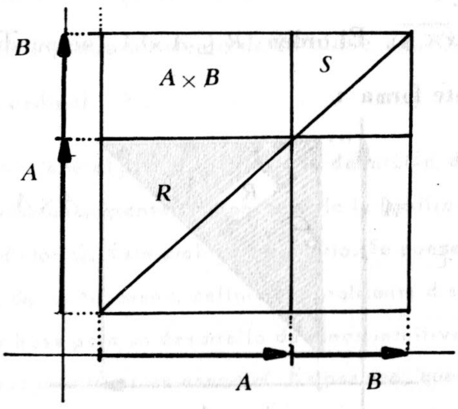

Fig. 4

Para que (3) sea una definición válida, hay que demostrar, naturalmente, que $R+S$ es un buen orden, y que la suma $\alpha + \beta$ está bien definida, es decir, es independiente de los representantes escogidos : Que $R+S$ es una relación de orden, "se ve" en fig. 4. El purista lo puede verificar, usando la definición de $R+S$. Veamos ahora, que $R+S$ es un buen orden : Siendo $C \neq \phi$ un subconjunto de $A \cup B$, en el caso $C \cap A \neq \phi$ vale $\min C = \min(C \cap A)$, y, en el caso $C \cap A = \phi$, vale $\min C = \min(C \cap B)$. La independencia resulta de la manera siguiente : Siendo $A' \cap B' = \phi$, f_1 un isomorfismo de (A,R) sobre (A',R'), y f_2 un isomorfismo de (B,S) sobre (B',S'), entonces $f := f_1 \cup f_2$ es un isomorfismo de $(A \cup B, R+S)$ sobre $(A' \cup B', R'+S')$. ■

(4) *PROPOSICIÓN. La adición de números ordinales no es conmutativa.*

Demostración :

Fig. 5

El dibujo lo dice todo : si $\alpha = \overline{(A,R)}$ y $\beta = \overline{(B,S)}$ tal que $\max A$ existe y $\max B$ no, entonces $\max(A \cup B, R+S)$ no existe, mientras que $\max(A \cup B, S+R)$ sí existe. Por consiguiente, $(A \cup B, R+S) \not\simeq (A \cup B, S+R)$, y eso implica que $\alpha + \beta = \overline{(A \cup B, R+S)} \neq \overline{(A \cup B, S+R)} = \beta + \alpha$. ■

Un ejemplo concreto es $\underline{1} + \omega \neq \omega + \underline{1}$

(5) *PROPOSICIÓN. La adición de números ordinales es asociativa.*

Demostración : Sea $\alpha = \overline{(A,R)}$, $\beta = \overline{(B,S)}$, $\gamma = \overline{(C,T)}$, con los representantes disyuntos por parejas. Usando las flechas, la asociatividad salta a la vista. La demostración exacta es como sigue : Siendo $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ basta mostrar $(R+S)+T=R+(S+T)$: En efecto

$$(R+S)+T=(R\cup S\cup A\times B)\cup(T\cup(A\cup B)\times C)$$
$$=R\cup S\cup T\cup A\times B\cup A\times C\cup B\times C$$
$$=(R\cup A\times(B\cup C))\cup(S\cup T\cup B\times C)=R+(S+T). \blacksquare$$

Las siguientes propiedades se pueden mostrar fácilmente :

$$\alpha=\underline{0}+\alpha=\alpha+\underline{0} \quad \text{para toda } \alpha .$$
$$\underline{n}+\underline{m}=\underline{m}+\underline{n} \quad \text{para toda } m,n\in \mathbb{N} .$$
$$\underline{n}+\omega=\omega\neq\omega+\underline{n} \quad \text{para toda } n\in\mathbb{N} .$$

(6) DEFINICIÓN . Multiplicación de números ordinales. Sean α, β números ordinales con representantes (A,R) , (B,S) . Entonces $\alpha\beta$ es el número ordinal del conjunto $B\times A$, ordenado lexicográficamente . Es decir,

$$(b_1,a_1)\leq(b_2,a_2): \Longleftrightarrow b_1<b_2 \vee (b_1=b_2\wedge a_1\leq a_2) .$$

Bautizamos este orden con SR , de modo que

$$\alpha\beta=\overline{(A,R)}\cdot\overline{(B,S)}:=\overline{(B\times A,SR)}.$$

¡Igual que en (3) hay que mostrar, que el nuevo concepto está bien definido!

Representamos el producto $\alpha\beta$ de la manera siguiente :

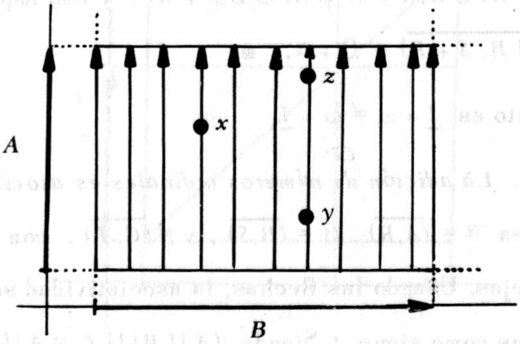

Fig. 6

En caso que B sea un conjunto infinito, se pueden dibujar solamente unas pocas de las innumerables flechas. Mirando el dibujo desde el margen derecho de la página, las flechas de $(B \times A, SR)$ se siguen como los renglones de un libro. Así que $x < y < z$, por ejemplo.

¡Nótese el intercambio de A,B y R,S en la definición de $\alpha\beta$! Más común en la literatura sobre números ordinales (pero menos cómodo para representarlo) es la definición de $\alpha\beta$ como número ordinal del conjunto $A \times B$ con el orden "antilexicográfico".

Las siguientes propiedades son consecuencias fáciles de (6) :

$$\alpha = \underline{1} \cdot \alpha = \alpha \cdot \underline{1} \quad \text{para toda } \alpha$$

$$\underline{0} = \underline{0} \cdot \alpha = \alpha \cdot \underline{0} \quad \text{para toda } \alpha$$

$$\omega = \underline{n} \cdot \omega \neq \omega \cdot \underline{n} \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N} .$$

Veamos, por ejemplo, el último caso para $n = 2$:

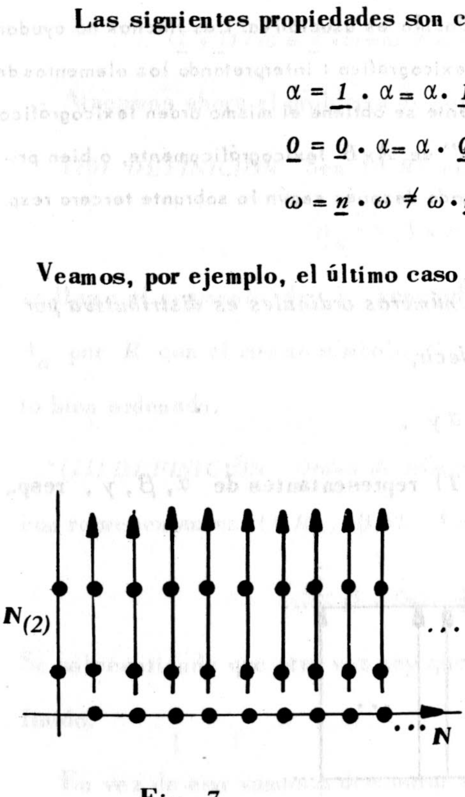

Fig. 7

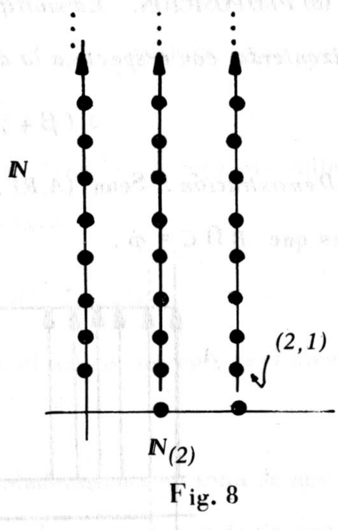

Fig. 8

Obviamente, el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(2)}$ en la figura 7 representa el mismo tipo de orden que $(\mathbb{N}, \leq)$. De hecho, $f(a,b) := 2(a-1)+b$ define un isomorfismo entre los conjuntos bien ordenados $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(2)}$ y $\mathbb{N}$. Luego $\underline{2} \cdot \omega = \omega$. En la figura 8 vemos que el elemento $(2,1) \in \mathbb{N}_{(2)} \times \mathbb{N}$ es un elemento distinto al primero y no tiene predecesor inmediato. En la figura 7, cualquier elemento de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(2)}$ distinto al primero sí tiene predecesor inmediato. Luego los dos conjuntos ordenados $\mathbb{N} \times \mathbb{N}_{(2)}$ y $\mathbb{N}_{(2)} \times \mathbb{N}$ no pueden ser isomorfos, es decir, $\underline{2} \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$.

Acabamos, pues, de demostrar :

(7) PROPOSICIÓN. La multiplicación de números ordinales no es conmutativa. ∎

Omitimos la demostración de que la multiplicación es asociativa. Las flechas no ayudan mucho en este caso. Sí ayuda la idea del orden lexicográfico : interpretando los elementos de $A \times B \times C$ como palabras de tres letras, obviamente se obtiene el mismo orden lexicográfico ordenando o bien primero las "palabras parciales" de $A \times B$ lexicográficamente, o bien primero las palabras parciales de $B \times C$, y ordenando después según la sobrante tercera resp. primera letra.

(8) PROPOSICIÓN. La multiplicación de números ordinales es distributiva por la izquierda, con respecto a la adición, es decir,

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \; .$$

Demostración : Sean (A,R), (B,S), (C,T) representantes de α, β, γ, resp., tales que $B \cap C = \phi$.

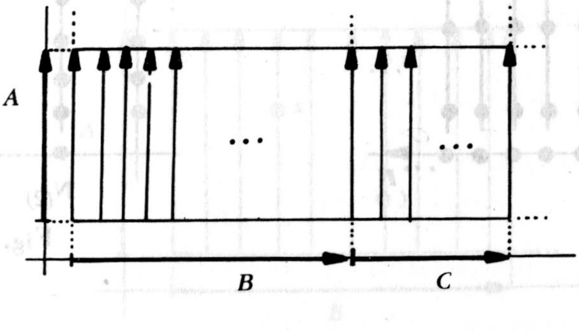

Fig. 9

Todo se lee en la figura 9 : Al sumar $\alpha\beta + \alpha\gamma$, las flechas correspondientes a $C \times A$ se ponen "después" de las que corresponden a $B \times A$, y se obtiene el mismo orden de $(B \cup C) \times A$. De manera exacta : el isomorfismo requerido entre el conjunto ordenado $(B \times A) \cup (C \times A)$ que representa a $\alpha\beta + \alpha\gamma$ y el conjunto ordenado $(B \cup C) \times A$ que representa a $\alpha(\beta + \gamma)$, es la aplicación idéntica. ■

(9) PROPOSICIÓN. La multiplicación de números ordinales no es distributiva por la derecha, con respecto a la adición.

Demostración . Usando resultados anteriores, obtenemos el contra-ejemplo :

$$(\underline{1} + \underline{1}) \cdot \omega = \underline{2} \cdot \omega = \omega \neq \omega \cdot \underline{2} = \omega\,(\underline{1} + \underline{1}) = \omega \cdot \underline{1} + \omega \cdot \underline{1} = \underline{1} \cdot \omega + \underline{1} \cdot \omega \ . \qquad ■$$

Atacamos ahora el problema de comparar números ordinales .

(10) DEFINICION. Sea (A,R) un conjunto bien ordenado, $a \in A$. Entonces

$$A_a := \{ x \in A \mid x < a \}$$

se llama el *segmento* de A , generado por a . Designando el orden inducido en A_a por R con el mismo símbolo R , se tiene que (A_a, R) también es un conjunto bien ordenado.

(11) DEFINICIÓN . Orden de números ordinales. Sean α, β números ordinales con representantes (A,R) , (B,S). Entonces definimos

$$\alpha < \beta \ :\Longleftrightarrow\ \exists\, b \in B : \ (A,R) \approx (B_b, S) \ .$$

Se sobreentiende que otra vez hay que mostrar que el nuevo concepto está bien definido.

En vez de eso vamos a demostrar aquí, que verdaderamente se trata de una relación de orden. La relación definida en (11) es un orden estricto, es decir, una relación irreflexiva, antisimétrica y transitiva. El correspondiente orden débil (es decir reflexivo) se obtiene definiendo como de costumbre : $\alpha \leq \beta :\Leftrightarrow \alpha < \beta \vee \alpha = \beta$.

(12) PROPOSICIÓN. Sean α, β, γ *números ordinales. Entonces vale*

1) $\alpha \nless \alpha$ *(irreflexividad)*

2) $\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$ *(transitividad)*

3) $\alpha < \beta \Rightarrow \beta \nless \alpha$ *(antisimetría)*

(Lógicamente equivalente a 3) es la forma $\alpha < \beta \quad \beta < \alpha \Rightarrow \alpha = \beta$ *).*

Demostración : Sean (A,R), (B,S), (C,T) representantes de α, β, γ.

1) Demostración indirecta. Supongamos $\alpha < \alpha$. Entonces existe un $a \in A$ y un isomorfismo f de (A,R) sobre (A_a, R). Por consiguiente vale $A_a \ni f(x) < a$ para toda $x \in A$, en especial $f(a) < a$. En virtud de la monotonía de f, obtenemos $f(f(a)) < f(a)$, y, en general,

$$f^{n+1}(a) < f^n(a), \quad \text{para toda } n \in \mathbb{N}$$

(definiendo $f^1 := f$, $f^{n+1} := f \circ f^n$).

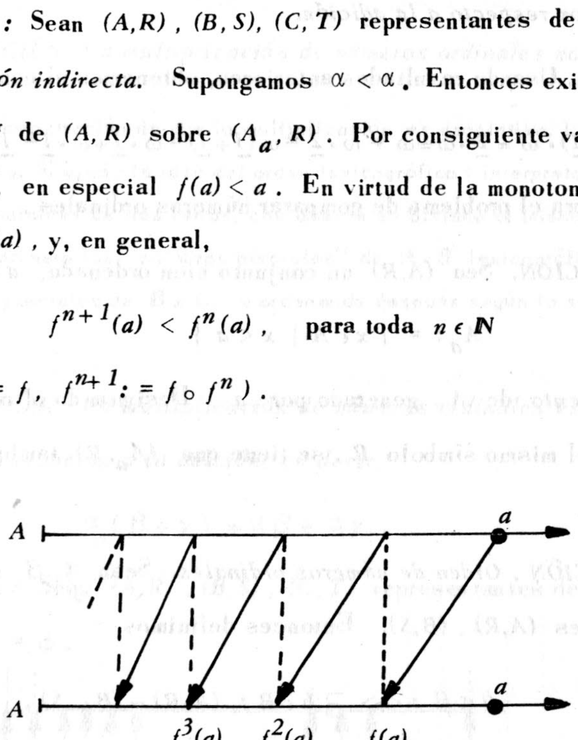

Fig. 10

Entonces el conjunto $M := \{ f^n(a) \mid n \in \mathbb{N} \}$ obviamente no tiene un primer elemento, lo que contradice el hecho que A es bien ordenado.

Esta parte de (12) es equivalente a un teorema de Zermelo que dice lo siguiente: siendo f una biyección monótona de un conjunto bien ordenado (A, R) sobre un subconjunto (B, R), vale $a \leq f(a)$ para toda $a \in A$).

2) Por hipótesis, existen elementos $b \in B$, $c \in C$ y dos isomorfismos : $f: A \to B_b$ y $g: B \to C_c$. Entonces $g \circ f$ es un isomorfismo de (A,R) sobre (C_c, T). Por consiguiente, tenemos $\alpha < \gamma$.

3) es consecuencia inmediata de 2) y 1). ■

Omitimos la demostración del siguiente teorema más profundo :

(13) TEOREMA. El orden de los números ordinales es un orden completo.

(No necesitamos la afirmación aún más fuerte que este orden es un buen orden).

(14) PROPOSICIÓN. Sean (A, R) un conjunto bien ordenado y $B \subseteq A$ un subconjunto cualquiera. Sean $\alpha := \overline{(A, R)}$ y $\beta := \overline{(B, R)}$. Entonces vale $\beta \leq \alpha$

Demostración: (indirecta). Supongamos $\alpha < \beta$. Entonces existe un $a \in B$ y un isomorfismo f de (A,R) sobre (B_a, R). La contradicción deseada resulta de la misma manera que en (12). Por consiguiente, tenemos $\alpha \nless \beta$. Con la ayuda de (13) obtenemos $\beta \leq \alpha$. ■

(El ejemplo de los números naturales pares $(2\,\mathbb{N}, \leq)$ en comparación con $(\mathbb{N}, \leq)$ muestra que "=" es posible, aunque valga $B \subset A$).

No es difícil demostrar las siguientes propiedades :

$\underline{0} \leq \alpha$ *para cualquier número ordinal* α

$\underline{n} < \alpha$ *para cualquier número ordinal transfinito* α *y para cualquier* $n \in \mathbb{N}$.

$\omega \leq \alpha$ *para cualquier número ordinal transfinito* α.

(15) PROPOSICIÓN. Sean α, β números ordinales cualesquiera. Entonces va-

le

a) $\alpha \leq \beta + \alpha$

b) $\alpha < \alpha + \beta$ (si $\beta \neq \underline{0}$).

Demostración : Sean (A,R), (B,S) representantes disyuntos de α, β, resp.

a) es consecuencia de (14) y de que

$$A \subseteq A \cup B \quad \text{y} \quad (A,R) = (A, R + S).$$

b)

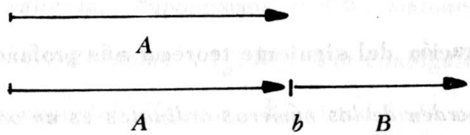

Fig. 11

Sea $b := \text{mín}\, B$. Entonces $(A,R) = ((A \cup B)_b, R + S)$. Usando (11), se obtiene $\alpha < \alpha + \beta$ (la aplicación idéntica es un isomorfismo). ∎

El hecho $\omega = \underline{1} + \omega$ muestra, que en a) no se puede poner $<$.

(16) PROPOSICIÓN. Sean α, β números ordinales cualesquiera con $\alpha \neq \underline{0}$. Entonces vale

a) $\beta \leq \alpha\beta$

b) $\alpha < \alpha\beta$ (*si* $\underline{1} < \beta$).

Demostración : Sean (A,R), (B,S) representantes de α, β, resp. . Sea $a := \text{mín}\, A$, $b := \text{mín}\, B$. En el caso b), b' sea el sucesor inmediato de b (para la existencia de b' se necesita $\underline{1} < \beta$, y el buen orden de (B,S)).

a) Sea $M := \{(x,a) \mid x \in B\}$. Entonces $M \subseteq B \times A$. En la figura 12 vemos que $\beta = \overline{(M, SR)}$. (El dibujo facilita también el isomorfismo f, necesario para la

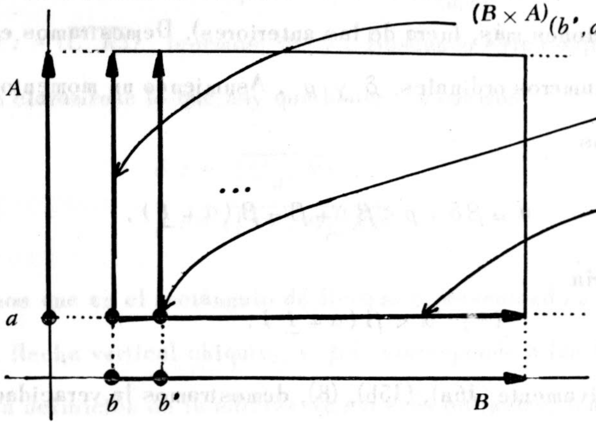

Fig. 12

demostración exacta : $f(x,a) := x$ para toda $x \in B$) . Entonces, por (14) : $\beta = \overline{(M, SR)} \leq \overline{(B \times A, SR)} = \alpha\beta$.

b) En la figura 12 vemos que $(A, R) \approx ((B \times A)_{(b',a)}, SR)$. (Un isomorfismo f para mostrar esto es $f(x) := (b,x)$ para toda $x \in A$). Luego, por (11) : $\alpha < \alpha\beta$.■

El hecho $\omega = \underline{2} \cdot \omega$ muestra, que en a) no se puede poner $<$.

El siguiente teorema sobre el algoritmo euclídeo para números ordinales es el último de estas páginas. Las motivaciones para una demostración común y corriente de este teorema no son muy fáciles para entender. Un dibujo con las flechas hace transparentes las ideas esenciales, y la demostración se presenta sin dificultad alguna.

(17) TEOREMA. (Algoritmo euclídeo). Sean α , β números ordinales cualesquiera, con $\beta \neq \underline{0}$. Entonces existen números ordinales únicos $\delta \leq \alpha$ y $\rho < \beta$, tales que

$$\alpha = \beta\,\delta + \rho \; .$$

Demostración : (No vamos a demostrar la unicidad, para la cual necesitaríamos algunas proposiciones más, fuera de las anteriores). Demostramos entonces la existencia de tales números ordinales δ y ρ . Asumiendo un momento la existencia de δ , ρ, tenemos

$$\alpha = \beta\delta + \rho < \beta\,\alpha + \beta = \beta\,(\alpha + \underline{1}) .$$

De esto resultaría

$$(*) \quad \alpha < \beta\,(\alpha + \underline{1}) .$$

Aplicando sucesivamente (16a), (15b), (8), demostramos la veracidad de (*) :

$$\alpha \leq \beta\,\alpha < \beta\,\alpha + \beta = \beta\,\alpha + \beta \cdot \underline{1} = \beta(\alpha + \underline{1}) .$$

Sean ahora (A',R) , (B,S) representantes de $\alpha + \underline{1}$, β , resp. Entonces existe $m := \text{máx}\, A'$. Siendo $A := A' \setminus \{m\}$, tenemos que (A, R) es un representante de α , con $A = A'_m \subset A'$.

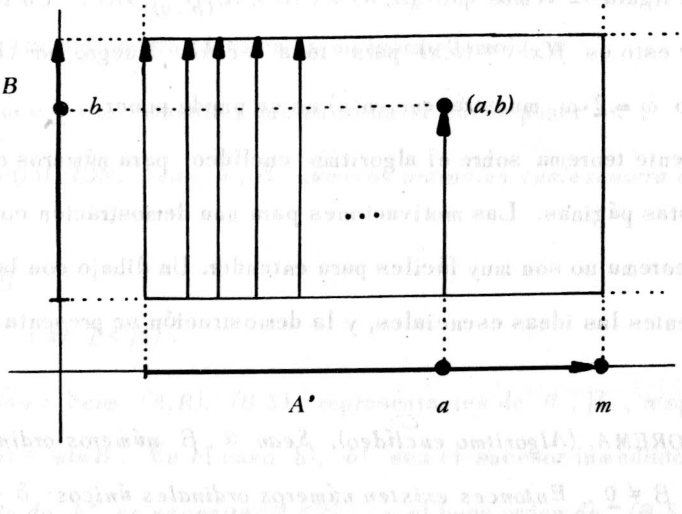

Fig. 13

De (*) y (11) concluimos la existencia de un elemento $(a,b) \in A' \times B$ tal que

$(A,R) = (A'_m, R)$ es isomorfo al conjunto $((A' \times B)_{(a,b)}, RS) =: (C, RS)$. Así que, poniendo $\gamma := \overline{(C, RS)}$, tenemos $\alpha = \gamma$. Buscando este conjunto (C, RS) en figura 13, vemos claramente lo que hay que hacer : Ponemos

$$\delta := \overline{(A'_a, R)},$$

$$\rho := \overline{(\{a\} \times B_b, RS)}.$$

En el dibujo vemos que en el rectángulo de flechas representando a $\beta(\alpha + \underline{1})$, ρ corresponde a la flecha vertical chiquita, y $\beta\delta$ corresponde a las flechas anteriores a esta. Por la definición de la adición de números ordinales, tenemos $\beta\delta + \rho = \gamma = \alpha$. Además, obviamente $\delta \leq \alpha$ y $\rho < \beta$. Esto es todo para el que sabe leer en la figura 13. Para los que exigen más, el dibujo nos ayuda a encontrar los isomorfismos necesarios para la demostración rigurosa :

$\delta \leq \alpha$ se obtiene mediante (11) y la aplicación idéntica de A'_a en A'. (En el caso $a = m$ obtenemos $\delta = \alpha$).

$\rho < \beta$ se obtiene mediante (11) y la aplicación f, definida por $f(a,x) := x$ para toda $x \in B_b$. Siendo $M := \{a\} \times B_b$ tenemos, que f es un isomorfismo de (M, RS) sobre (B_b, S). Por consiguiente, tenemos $\rho < \beta$, y además $\rho = \overline{(B_b, S)}$.

Ahora $\overline{(A'_a \times B, RS)} = \beta\delta$, por (6). Siendo $(A'_a \times B) \cup M = (A' \times B)_{(a,b)}$ y siendo la aplicación idéntica un isomorfismo de $((A'_a \times B) \cup M, RS + RS)$ sobre $((A' \times B)_{(a,b)}, RS)$, obtenemos

$$\beta\delta + \rho = \overline{(A'_a \times B, RS)} + \overline{(M, RS)} = \overline{((A'_a \times B) \cup M, RS + RS)} = \overline{((A' \times B)_{(a,b)}, RS)} =$$

$$= \gamma = \alpha \quad \blacksquare$$

El propio algoritmo euclídeo se obtiene bautizando

$$\alpha_o := \alpha \; ; \; \alpha_1 := \beta \; ; \; \alpha_2 := \rho \; ; \; \delta_1 := \delta \; ,$$

e iterando el proceso de (17). Se puede mostrar, que después de un número finito de pasos se obtiene $\alpha_{n-1} = \alpha_n \cdot \delta_n$, es decir $\alpha_{n+1} = \underline{0}$.

Con el método de las flechas se pueden visualizar un buen número de otras proposiciones, no citadas aquí .

Sección de Matemáticas
Universidad de Maguncia, Alemania
(Profesor honorario del Departamento de Matemáticas
de la Universidad de los Andes en Bogotá).

(Recibido en marzo de 1974).