Revista Colombiana de Matemáticas
Volumen VIII (1974), págs. 207-216

LA MÁXIMA EXTENSIÓN ABELIANA DE UN CUERPO LOCAL COMO UNA EXTENSIÓN KUMMERIANA, II : CÁLCULO EXPLÍCITO DE ALGUNAS BASES

por

Víctor Samuel **ALBIS GONZÁLEZ**

Dedicado al profesor Henri Yerly

§ *1. Introducción.* En esta segunda parte seguiremos usando la notación introducida en la primera ([1]), en la cual hemos expresado la máxima extensión abeliana L_a/L de un cuerpo local $L/\mathbb{Q}_p$ en la forma $L_q(\sqrt[q]{\beta}) = L_a$, $\beta \in L^\times$ *mód* $L^{\times q}$, $Gal(L_a/L_q) \approx \mu_q$ = grupo de las raíces q-ésimas de 1 contenidas en L, donde q es la potencia de p máxima con esta propiedad. Recordemos que los $\beta \in L^\times$ *mód* $L^{\times q}$ que satisfacen la anterior propiedad (la cual hemos denominado P) fueron determinados en los teoremas 5 y 6 de [1] pero que, sin embargo, en el caso en que $L(\sqrt{\zeta_q})/L$, donde ζ_q es una raíz primitiva q-ésima de L, ramificase totalmente [1; teorema 6], un conocimiento explícito de los β que cumplían P requería un conocimiento también explícito de las bases cuya existencia se demostraba en los teorema 1 y 2 de [1]. Es, pues, nuestro propósito explicitar algunas de estas bases, en especial cuando $L = \mathbb{Q}_p(\zeta_q)$. Para ello será necesario servirnos de algunas relaciones entre los símbolos locales y la *ley de reciprocidad potencial.* Para las correspondientes definiciones y resultados, y sus demostraciones, remitimos a [5 : chapter 13] y [2].

PROPOSICIÓN 1. Sea dado $\varepsilon \in \mathbb{Q}(\zeta_q)$, $\varepsilon \equiv 1 \ (\text{mód}\ \pi)$, *donde* $\pi = 1 - \zeta_q$. *Entonces :*

a) $$\left(\frac{\zeta_q}{\varepsilon}\right) = (\varepsilon, \zeta_q)$$

donde el miembro izquierdo representa al símbolo de reciprocidad potencial [5: pág. 243] y $(-,-)$ *el símbolo local sobre* $\mathbb{Q}_p(\zeta_q)$ *con respecto a las potencias q-ésimas.*

b) $$\left(\frac{\zeta_q}{\varepsilon}\right) = \zeta_q^{[|N_{\mathbb{Q}(\zeta_q)/\mathbb{Q}}|-1]/q}$$

donde $N_{\mathbb{Q}(\zeta_q)/\mathbb{Q}}$ *designa la norma .*

c) $$\left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} \zeta_q^{[T_{\mathbb{Q}(\zeta_q)/\mathbb{Q}}(\log \varepsilon)]/q} & si \ p \neq 2 \\ \zeta_q^{(1+q/2)[T_{\mathbb{Q}(\zeta_q)/\mathbb{Q}}(\log \varepsilon)]/q} & si \ p = 2 \end{cases}$$

donde $T_{\mathbb{Q}(\zeta_q)/\mathbb{Q}}$ *designa la traza y log el logaritmo p-ádico.* [*b) y d) son las llamadas fórmulas explícitas de la reciprocidad .*]

El caso, repetimos, en el cual estamos interesados es aquél en que $L(\sqrt[q]{\zeta_q})/L$ **ramifica totalmente y en él los** β **requeridos pueden bien ser unidades o bien parámetros uniformizadores de** L. **Pero estos últimos se determinan una vez que se ha escogido un parámetro uniformizador** π **que cumpla** $(\pi, \zeta_q) = 1$. **Por lo tanto, podemos limitar nuestros cálculos a las unidades de** L **, y como** $N_{L/\mathbb{Q}_p(\zeta_q)}(U_L) \subseteq U_{\mathbb{Q}_p(\zeta_q)}$, **podemos siempre utilizar la siguiente**

PROPOSICIÓN 2. Sean dados $\mathbb{Q}_p(\zeta_q) \subseteq L$. *Entonces* $\beta \in L^\times$ *mód* $L^{\times q}$ *sa-*

tisface la propiedad P si, y sólo si, $\mathbb{Q}_p(\zeta_q)(\sqrt[q]{\beta'})/\mathbb{Q}_p(\zeta_q)$, *donde* $\beta' = N_{L/\mathbb{Q}_p(\zeta_p)}(\beta)$, *satisface P con respecto al cuerpo* $\mathbb{Q}_p(\zeta_q)$.

Además, podemos limitarnos únicamente a las unidades principales, pues $U_L = \mu_q^{\bullet} \times U_{L,1}$ ($\mu_q^{\bullet}$ **es el grupo de las raíces de** 1 **contenidas en** L **y de orden primo con** p) **y** $(\eta_1, \zeta_q) = 1$ **si** $\eta \in \mu_q^{\bullet} \subset L^{\times q}$. **La dificultad de los cálculos, sin embargo, puede ser tremenda. En consecuencia, el siguiente resultado puede ser útil si sólo queremos exhibir un** $\beta \in L^{\times} \text{ mód } L^{\times q}$ **que satisfaga** P.

PROPOSICIÓN 3. Sean dados $L = \mathbb{Q}_p(\zeta_q)$ *y* $\beta \in U_{L,1}$. *Entonces*

a) $L(\sqrt[q]{\beta}) = L(\sqrt[q]{\varepsilon})$ *para algún* $\varepsilon \equiv 1 \ (\text{mód } \pi)$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}(\zeta_q)$ *y* $(\beta, \zeta_q) = (\varepsilon, \zeta_q)$, *donde* $\pi = 1 - \zeta_q$.

b) Las siguientes afirmaciones son equivalentes :

(I) $L(\sqrt[q]{\beta})/L$ *satisface P*

(II) $|N_{L/\mathbb{Q}_p}(\varepsilon)| \not\equiv 1 \ (\text{mód } pq)$

(III) $T_{L/\mathbb{Q}_p}(\varepsilon) \not\equiv 0 \ (\text{mód } pq)$

Demostración. b) **sigue de** *a)* **usando la proposición 1 y el hecho de que** $N_{L/\mathbb{Q}_p}(\varepsilon) = N_{\mathbb{Q}(\zeta_q)/\mathbb{Q}}(\varepsilon)$ **si** $\varepsilon \in \mathbb{Q}(\zeta_q)$ **(de igual modo para la traza), pues** $\mathbb{Q}(\zeta_q)/\mathbb{Q}$ **ramifica totalmente en** p **[5 : págs. 77 y 99]. Demostremos a) : tomando** $\varepsilon \in \mathbb{Q}(\zeta_q)$ **tal que** $\beta\varepsilon^{-1} \equiv 1 \ (\text{mód } \mathcal{P}_L^{\,m})$ **para** m **suficientemente grande, obtenemos** $L(\sqrt[q]{\beta}) = L(\sqrt[q]{\varepsilon})$ **[5 : pág. 226] y** $(\beta\varepsilon^{-1}, \zeta_q) = 1$ **(por continuidad, todos los elementos suficientemente cercanos a** 1 **son normas), es decir,** $(\beta, \zeta_q) = (\varepsilon, \zeta_q)$.

§ 2. *Cálculo explícito de algunas bases.*

LEMA 1. [3: pág. 49] $\gamma \in \mathbb{Q}_2^{\times 2}$ *si, y sólo si,* $\gamma \equiv 1 \ (\text{mód } 8)$.

PROPOSICIÓN 4. $\mathbb{Q}_2(\sqrt{\beta})/\mathbb{Q}_2$ *satisface la condición P si, y sólo si,*

$\beta = -1, -2, 6, 3$ *mód* $\mathbb{Q}_2^{\times 2}$. *Además, si* $\pi = 2$ *entonces* $\pi = 2$, $\alpha_o = 1 - \pi^2 = -3$ y $\alpha_1 = 1 - \pi = -1$ *forman una base de* $\mathbb{Q}_2^{\times}$ *mód* $\mathbb{Q}_2^{\times 2}$ *que cumple las condiciones del teorema* 2 *en* [1].

Demostración: En efecto, como $-3 \not\equiv 1$ *(mód 8)* y $-3 \equiv 1$ *(mód 4)*, síguese, respectivamente, que $-3 \notin \mathbb{Q}_2^{\times 2}$ (por el lema 1) y que $\mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})/\mathbb{Q}_2$ es inramificado (puesto que en $\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$ el primo 2 no ramifica). Por otro lado, usando la ley suplementaria de la reciprocidad (proposición 1, a), obtenemos las siguientes relaciones

$$(2,2)_2 = 1 \; ; \quad (2,-3)_2 = -1 \; ; \quad (2, \cdot 1)_2 = 1 \; ;$$

$$(-3,-3)_2 = 1 \; ; \quad (-3,-1)_2 = 1 \; ; \quad (-1,-1)_2 = -1 \; ;$$

de modo que $\{2, 3, -1\}$ es una base de $\mathbb{Q}_2^{\times}$ *mód* $\mathbb{Q}_2^{\times 2}$ que cumple las condiciones requeridas. Finalmente, si

$$\beta = 2^m (-3)^{b_o} (-1)^{b_1} \text{ mód } \mathbb{Q}_2^{\times 2},$$

entonces $b_1 = 1$ si, y sólo si, $\beta = 6, -2, 3, -1$ *(mód* $\mathbb{Q}_2^{\times 2}$*)*, y la proposición resulta entonces del teorema 6, b), en [1].

COROLARIO 1. Sea dada $L(\sqrt{-1})/L$ *totalmente ramificada. Si* β *es una unidad en* L, *entonces* $L(\sqrt{\beta})/L$ *satisface la propiedad* **P** *si, y sólo si,* $N_{L/\mathbb{Q}_2}(\beta) = -1, -2, 3, 6$ *mód* $\mathbb{Q}_2^{\times 2}$.

Demostración: Resulta inmediatamente de $(N_{L/\mathbb{Q}_2}(\beta), -1) = (\beta, -1)$.

COROLARIO 2. Sean dadas $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{\beta})$, $\beta = \pm 3, \pm 6$ *(mód* $\mathbb{Q}_2^{\times 2}$ *). Entonces* $L(\sqrt{-1})/L$ *ramifica totalmente si* $\beta = \pm 2, \pm 3, \pm 6$ *(mód* $\mathbb{Q}_2^{\times 2}$ *). Además, se tiene :*

a) Si $\beta = \pm 2, -3, \pm 6$ *mód* $\mathbb{Q}_2^{\times 2}$ *y* $\varepsilon = \eta + \xi\sqrt{\beta}$, $\eta, \xi \in \mathbb{Z}_p$ *es una uni-*

dad de L, *entonces la extensión* $L(\sqrt{\varepsilon})/L$ *satisface* P *si, y sólo si,* $\eta^2 + \beta\xi^2 = -1, -2, 3, 6$ *mód* $\mathbb{Q}_2^{\times 2}$.

b) Si $\beta = \pm 3$ *(mód* $\mathbb{Q}_2^{\times 2}$ *), estamos en la situación del teorema 5 en* [1] .

Demostración : Del diagrama

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & Q_2(\sqrt{\beta}, \sqrt{-1}) = L(\sqrt{-1}) \\
L = Q_2(\sqrt{\beta}) \arrow[urr, dash] & & \\
 & Q_2(\sqrt{-\beta}) \arrow[uur, dash] & \\
 & & Q_2(\sqrt{-1}) \arrow[uuu, dash] \\
Q_2 \arrow[uuu, dash] \arrow[uur, dash] \arrow[urr, dash] & &
\end{tikzcd}$$

y observando que :

i) Para $\beta = \pm 2, \pm 6, \pm 3$ $(\text{mód } \mathbb{Q}_2^{\times 2})$ la extensión $\mathbb{Q}_2(\sqrt{\beta})/\mathbb{Q}_2$ ramifica totalmente ; y

ii) $$Gal(L(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}_2) \approx \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} ,$$

dedúcese que $L(\sqrt{-1})/L$ ramifica totalmente sólo cuando $\beta \neq 3$ $\text{mód } \mathbb{Q}_2^{\times 2}$. El resto sigue del corolario 1 observando que $N_{L/\mathbb{Q}_2}(\eta + \xi\sqrt{\beta}) = \eta^2 + \xi^2\beta$.

Nuestro caso siguiente es $L = \mathbb{Q}_2(\zeta_4) = \mathbb{Q}_2(\sqrt{-1})$. Para calcular una base de $L^\times$ *mód* $L^{\times 4}$ usamos el siguiente lema :

LEMA 2 . (Eisenstein - Gauss) [6 : pág. 96] . *Sea dada* $L = \mathbb{Q}_2(i)$. *Entonces*

$$(\varepsilon, i) = i^{(\alpha - 1)/2} \quad y \quad (\varepsilon, \pi) = i^{-[(\alpha-1)+\beta]/4}$$

si $\varepsilon = \alpha + \beta i \equiv 1$ $(\text{mód } \pi^3)$, $\pi = 1 - i$.

PROPOSICIÓN 5. Sea dada $L = \mathbb{Q}_2(i)$. Entonces

$$\pi = 1-i \ , \alpha_o \, , \alpha_1 = i \ , \ \alpha_2 = 7-6i \ ,$$

donde α_o es cualquier elemento 4-primario de L, forman una base de $L^\times$ mód $L^{\times 4}$ que cumple las condiciones del teorema.

Demostración : Como $g = q' = 1$ (véase el teorema 1 en [1]), podemos tomar $\alpha_1 = i$ y α_o arbitrario y 4-primario. Determinamos ahora $\alpha_2 = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ (podemos tomar $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ pues éste es denso en $\mathbb{Z}_2$) según las condiciones

$$(\alpha_2, i) = i^{(\alpha-1)/2} = i^{-1} \ ; \ (\alpha_2, \pi) = i^{-[(\alpha-1)+\beta]/4} = 1$$

y

$$\alpha + \beta i = 1 - 2(1+i)(\eta + \xi i), \ \eta, \xi \in \mathbb{Z} \ .$$

Una solución de este sistema de ecuaciones está dado por $\alpha = 7$, $\beta = -6$, $\eta = 0$ y $\xi = 3$.

Consideremos ahora $L = \mathbb{Q}_3(\zeta_3)$. Aquí usamos el

LEMA 3. (Einsenstein) [6: pág. 96]. *Sean dados $L = \mathbb{Q}_3(\zeta_3)$ y $\pi = 1-\zeta_3$. Entonces*

$$(\varepsilon, \zeta_3) = \zeta_3^{-[(\alpha-1)+\beta]/3} \ \text{y} \ (\varepsilon, \pi) = \zeta_3^{(\alpha-1)/3}$$

si $\varepsilon = \alpha + \beta\zeta_3 \equiv 1$ (mód 3).

PROPOSICIÓN 6. Sea dada $L = \mathbb{Q}_3(\zeta_3)$. Entonces $\pi, \alpha_o = 1-\pi^3$, $\alpha_1 = 1-\pi$, $\alpha_2 = 4-3\pi$, donde $\pi = 1-\zeta_3$, forman una base de $L^\times$ mód $L^{\times 3}$ que cumple las condiciones del teorema 1 en [1].

Demostración : Sirviéndose del lema 3, la demostración prosigue como en la proposición 5, observando ahora que $1-\pi^3$ es 3-primario [5 : pág. 353].

Observación. A la luz de la proposición 1, c), el método usado en la anterior proposición podría usarse para determinar α_2 en el caso $p > 3$, y obtener así $p^3 \varphi(p)$ extensiones de $L = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$ que cumplen P, a saber, aquellas definidas por

$$\beta = \pi^m (1-\pi^p)^{a_o} (1-\pi)^{a_1} \alpha_2^{a_2} \ (\text{mód } L^{\times p}),$$

donde $a_2 \not\equiv 0 \ (\text{mód } p)$. Queremos anotar aquí que usando las fórmulas explícitas de reciprocidad (proposición 1, b) y c), y a fin de encontrar un α_2 que satisfaga $(\alpha_1, \alpha_2) = (\zeta_p, \alpha_2) = \zeta_p$ y $(\pi, \alpha_2) = 1$, debemos necesariamente tener que $\log \varepsilon \notin \mathbb{Q}_p$, donde $\varepsilon \equiv 1 \ (\text{mód } \pi)$, $\pi = 1-\zeta_q$; esto evidentemente dificulta la tarea. Podríamos preguntarnos si la muy canónica base $\pi = 1-\zeta_p$, $\alpha_o = 1-\pi^p$, $\alpha_1 = 1-\pi$, $\alpha_\nu = 1-\pi^\nu$, $\nu = 2, \ldots, p\text{-}1$ de $L^\times$ *mód* $L^{\times p}$, $L = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)$, satisface las condiciones requeridas. Desafortunadamente, éste no es el caso. En efecto, usando las siguientes propiedades [4 : pág. 353],

i) $L(\sqrt[p]{\alpha_o})/L$ es inramificada ;

ii) $(\alpha_\nu, \alpha_\mu) = (\alpha_\nu, \alpha_{\nu+\mu})(\alpha_{\nu+\mu}, \alpha_\mu)(\alpha_{\nu+\mu}, \pi)^{-\mu}$, donde $\alpha_\nu = 1-\pi^\nu$, $\nu = 1, 2, p\text{-}1$, y, por supuesto, $\alpha_o = \alpha_p$;

iii) si $\nu+\mu \geq p+1$, entonces $(\alpha, \beta) = 1$ cuando $\alpha \in U_{L,\nu}, \beta \in U_{L,\nu}$;

iv) $$(\alpha_\nu, \pi) = \begin{cases} \zeta_p & \text{si } \nu = p \\ 1 & \text{en el caso contrario}, \end{cases}$$

vemos fácilmente que para $p=3$, $(\alpha_1, \alpha_2) = 1 \neq \zeta_3$, de modo que la condición (iv) del teorema 1 en [1] no subsiste. Sin embargo, no debe sorprendernos el hecho de que para el primo 2 las cosas marchen, como lo vimos en la proposición 4. Nuestro siguiente ejemplo es $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})$. En este caso demostramos la

PROPOSICIÓN 7. Si $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})$, *entonces* $\pi = 2$, α_o, $\alpha_1 = -1$ y $\alpha_2 =$

$2+\sqrt{-3}$, *donde* α_o *es cualquier elemento* 2*-primario de* L, *forman una base, del tipo requerido, de* $L^\times$ *mód* $L^{\times 2}$.

Demostración: Como $\mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})/\mathbb{Q}_2$ es inramificada (proposición 4), 2 es aún un parámetro uniformizador de $\mathbb{Q}_2(\sqrt{-3})$. Sabemos también que $g = q' = 1$, por el corolario 2,a), proposición 4. Sea entonces α_o cualquier elemento 2-primario de L, y tomemos $\pi = 2$, $\alpha_1 = -1$. Queremos determinar α_2 de tal manera que α_2 de tal manera que $(\pi, \alpha_2) = 1$ y $(\alpha_1, \alpha_2) = -1$.

$$(\alpha+\beta\sqrt{-3},\, 2) = (\alpha^2+3\beta^2, 2)_2 \quad \text{y} \quad (\alpha+\beta\sqrt{-3},\, -1) = (\alpha^2+3\beta^2, -1)_2$$

(los miembros derechos se calculan sobre $\mathbb{Q}_2$), podemos verificar que $\alpha_2 = 2+\sqrt{-3}$ satisface ambas condiciones.

Veamos ahora cómo se calculan bases del tipo requerido si $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{\beta})$, $\beta = \pm 2, \pm 6$ $(\text{mód } \mathbb{Q}_2^{\times 2})$. En todos estos casos, $q' = g = 1$, de modo que tomamos $\alpha_1 = -1$; obviamente, $L(\sqrt{-3})/L$ es inramificada, pudiéndose tomar de nuevo $\alpha_o = -3$. En seguida escogemos π de tal manera que $(\pi, -1) = (N_{L/\mathbb{Q}_2}(\pi), -1) = 1$ (esto es fácil por tanteo o de cualquier otra manera). Sólo falta determinar una unidad α'_2 tal que $(-1, \alpha'_2) = -1$ y $(\pi, \alpha'_2) = (\alpha_o, \alpha'_2) = 1$. Valiéndonos de la relación $(\alpha'_2, -1) = (N_{L/\mathbb{Q}_2}(\alpha_2), -1)_2$, es fácil determinar α'_2 en forma tal que $(\alpha'_2, -1) = (-1, \alpha'_2) = -1$; como siempre se tiene $(\alpha'_2, \alpha_o) = 1$, el único hecho que falta es decidir si $(\alpha'_2, \pi) = 1$ o no. Si por acaso $(\alpha'_2, \pi) = -1$, entonces $\alpha_2 = -3\alpha'_2$ se encargará de lo que queremos, pues $(\alpha_2, \pi) = (-3, \pi)(\alpha'_2, \pi) = (-1)(-1) = 1$. Tomemos, por ejemplo, $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$. En este caso, podemos determinar

$$\pi = 4+3\sqrt{2}, \quad \alpha_o = -3, \quad \alpha_1 = -1, \quad \alpha'_2 = 1+\sqrt{2},$$

tal como se ha indicado arriba. Ahora bien, $(4+3\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}) = 1 \iff 4+3\sqrt{2}$

es una norma proveniente de $\mathbb{Q}_2(\sqrt{2}, \sqrt{1+\sqrt{2}}) \Leftrightarrow 4+3\sqrt{2} = (\alpha+\beta\sqrt{2})^2 - (\eta+\xi\sqrt{2})^2(1+\sqrt{2})$, $\alpha, \beta, \eta, \xi \in \mathbb{Z}_2 \Leftrightarrow$ **el sistema de ecuaciones diofánticas**

$$\alpha^2 + 2\beta^2 - \eta^2 - 2\xi^2 - 4\eta\xi = 4$$
$$2\alpha\beta - 2\eta\xi - \eta^2 - 2\xi^2 = 3$$

tiene solución en $\mathbb{Z}_2$. **Este parece ser difícil. Por eso usamos el siguiente sistema**

$$\alpha^2 + 2\beta^2 + 3\eta^2 + 6\xi^2 + 12\eta\xi = 4$$
$$2\alpha\beta + 3\eta^2 + 6\xi^2 + 6\eta\xi = 3,$$

el cual, por un razonamiento análogo al anterior, tiene solución si, y sólo si, $(4+3\sqrt{2}, -3(1+\sqrt{2})) = 1$. **Por tanteo, encontramos** $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 1$. **De modo que hemos demostrado la**

PROPOSICIÓN 8. Si $L = \mathbb{Q}_2(\sqrt{2})$, *entonces* $\pi = 4+3\sqrt{2}$, $\alpha_o = -3$, $\alpha_1 = -1$ *y* $\alpha_2 = -3(1+\sqrt{2})$ *forman una base de* $L^\times$ *mód* $L^{\times 2}$ *que satisface las condiciones requeridas.*

COROLARIO. El sistema de ecuaciones diofánticas

$$\alpha^2 + 2\beta^2 - \eta^2 - 2\xi^2 - 4\eta\xi = 4$$
$$2\alpha\beta - 2\eta\xi - \eta^2 - 2\xi^2 = 3$$

no tiene soluciones enteras.

Observación. **Este corolario pone de manifiesto nuevamente la estrecha relación que existe entre la ley de reciprocidad y las formas nórmicas [2 : capítulo II].**

BIBLIOGRAFÍA

1. *Albis-González, Víctor S., The maximal abelian extension of a local field as a*

kummerian extension, I, Bol. Soc. Mat. Mexicana.

2. Artin, E. und Hasse, H., *Die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz der l^n-ten Potenzreste im Körper der l^n-ten Enheitswurzeln*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 6 (1928), 146–162.

3. Borevich, Z. I. and Shafarevich, I. R., *Number theory*, Academic Press, Nueva York, 1965.

4. Cassels, J. W. S. and Frohlich, A, eds., *Algebraic number theory*, Thompson Book Co., Washington, D. C., 1967.

5. Goldstein, L. J., *Analytic number theory*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1971.

6. Hasse, H., *Bericht über neure Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Teil II : Reziprozitätsgesetz*, B. G. Teubner, Berlin, 1930.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Ciudad Universitaria
Bogotá 6, D. E., Colombia, S. A.

(Recibido en noviembre de 1973).